现代物理基础丛书



量子场论

Quantum Field Theory

李灵峰 著
古 杰 万林焱 张 洋 译

科学出版社



中国科学院科学出版基金资助出版

现代物理基础丛书　71

量 子 场 论

Quantum Field Theory

李灵峰　著

古　杰　万林焱　张　洋　译

科 学 出 版 社

北　京

《现代物理基础丛书》编委会

内 容 简 介

本书是研究生课程“量子场论”的教材，内容涵盖相对论性波动方程、正则量子化、微扰论与费曼规则、量子电动力学、路径积分方法、重整化、整体与局域对称性、对称性自发破缺与 Higgs 机制、电弱统一理论，以及量子色动力学等内容. 本书的主要特点是给出了详尽的推导过程，方便读者阅读和学习，所用材料主要基于作者多年来在美国、中国授课的讲义，并加以扩充，而且一直依据学生的反馈和建议进行改进. 本书对读者的起点要求不高，具备量子力学和电动力学知识的高年级本科生就可理解，而且尽量自足，并不要求读者太多群论和粒子物理知识. 这在本书中讲授对称性和电弱统一理论的部分有明确的体现.

本书适合高等院校理论物理专业的研究生以及高年级本科生阅读学习，也可以作为相关专业的研究人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

量子场论/（美）李灵峰著；古杰，万林焱，张洋译. —北京：科学出版社，2015.9

(现代物理基础丛书；71)

ISBN 978-7-03-045897-1

Ⅰ. ①量… Ⅱ. ①李… ②古… ③万… ④张… Ⅲ. ①量子场论 Ⅳ. ①O413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 230845 号

责任编辑：钱 俊 裴 威／责任校对：彭 涛
责任印制：徐晓晨／封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 9 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2015 年 9 月第一次印刷 印张：26
字数：503 000

定价：148.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

电弱和强相互作用理论标准模型的构造在 20 世纪 70 年代就取得了巨大的成功, 现如今它已经成为一套基本原理, 而除此之外的新物理则被称为“超出标准模型的物理”(the beyond standard model physics). 标准模型的理论是基于规范对称性的原理建立的 —— 强相互作用、弱相互作用和电磁相互作用都是在量子场论的框架下建立起来的规范相互作用. 对于任何一个对现代高能物理感兴趣的人来说, 规范场论知识的重要性是不言而喻的.

本书的内容包括场论和规范理论的基本原理以及它们在粒子物理中的应用, 主要目标是给学生和研究人员提供一个对上述内容的实用的介绍. 在讲述的过程中专注于最终有用的结果, 尽可能地省略了复杂的数学证明, 而代之以启发式的讨论和具体的例证, 并且包括了大部分参考资料中省略掉的中间步骤.

作者在卡内基梅隆大学、新竹清华大学和北京的清华大学等学校教授研究生场论课程已有 30 多年. 本书是基于作者的讲稿整理而成的, 其中也参考了很多来自学生的反馈和建议. 此外, 书中的内容也被加以扩展以满足想要自学本科目的同学的需要. 阅读本书的预备知识是一年期的量子力学课程.

本书内容分为三个部分. 第一部分是场论的基本知识, 其中第 1、2 章回顾了狭义相对论的内容, 讨论张量分析和相对论性波动方程；第 3~5 章讨论的是正则量子化、微扰论的内容以及 QED 的应用；第 6 和 7 章分别是路径积分量子化的方法和重整化理论. 第二部分是有关对称性的讨论, 第 8、9 章分别是整体与局域对称性以及对称性自发破缺的内容. 第三部分是描述标准模型的内容, 第 10、11 章分别建立了电弱相互作用理论和强相互作用的 QCD 理论. 书中包含的内容可以在两学期的量子场论课程从容地讲完.

尽管关于量子场论已经有不少优秀的英文教材, 但是中文的场论教材却不多见. 作者希望这一中文版的场论教材可以作为现有教材的一个补充. 本书第一部分的内容翻译自 2013 年秋季作者在北京清华大学教授的场论课程的讲稿. 第二部分和第三部分翻译自作者在各地 (包括美国、中国大陆和中国台湾) 讲授标准模型及其应用时所使用的讲稿. 翻译工作由古杰、张洋、万林焱三位同学完成. 他们三位都选修了作者 2013 年秋季在北京清华大学的场论课程. 其中古杰仔细检查了前几章的翻译初稿, 并提出了许多修改意见. 万林焱同学除承担许多章节的翻译工作之外, 还提供了很多编排稿件的技术性建议. 张洋完成了对翻译稿最后的修改工作, 并将稿子组织成最终的格式. 正是由于这三位同学所做的工作, 本书的出版成为可

能, 在此谨向他们表示感谢.

本书最后列出的参考文献和参考书目是作者所熟悉的资料中经常被引用到的, 但它并不是一个全面的列表. 在此对没有被充分提及的同行表示歉意. 作者希望这个列表已经提供了充足的材料, 可以让感兴趣的读者由此出发继续寻找其他的文献.

本书是作者多年到各处访问的过程中完成的. 在此要感谢北京清华大学的邝宇平院士、王青教授和阮东教授, 中国科学院理论物理研究所的吴岳良院士、张肇西院士和庄辞博士, 华中科技大学的龚云贵教授, 重庆邮电大学的张益教授, 新竹清华大学的耿朝强教授, 感谢他们对作者的热情招待. 此外, 还要感谢中国科学院科学出版基金的资助, 以及科学出版社钱俊编辑给予的许多帮助和建议.

李灵峰

2015 年于北京

目　录

第 1 章　绪　　论

1.1　绪　　论

尽管非相对论性量子力学可以对其适用的领域的问题进行合理的解释, 但对粒子能量极高并伴随着粒子产生和湮没的相对论系统却无能为力. 本节先从量子力学基本原理的角度说明它的不足, 然后对狭义相对论进行一个回顾, 因为对于能量极高且速度接近光速的粒子来说, 狭义相对论是一个必要的理论框架.

当我们学习经典或非相对论系统时, 拉氏量形式都是一个合适的框架. 另外, 它在对系统对称性的讨论中尤其方便, 因此本章还将回顾从质点力学到场论的最小作用量原理以及拉氏量形式. 作为后面章节的铺垫, 还将讨论 Lagrange 场论中的对称性与守恒律.

1.1.1　量子场论的必要性

我们已经学过非相对论性量子力学, 它可以很好地解决原子甚至亚原子尺度的涉及微观粒子的一些物理问题. 那么为什么我们需要一个相对论性的场论呢？一方面, 我们所研究的高能物理领域, 很多粒子速度极高, 相对论的引入就很必要了; 另一方面, 该领域的物理现象通常伴随着粒子的产生和湮没, 非相对论量子力学是无能为力的, 而量子场论的引入则可以描述粒子数变化的过程, 这将在后面的章节中讨论. 下面我们先来讨论非相对论量子力学在这一点的局限性.

在非相对论量子力学中, Schrödinger 方程包含了粒子数守恒, 这从下面的推导中可以看出. Schrödinger 方程给出

$$H\psi = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \int \mathrm{d}^3x(\psi^\dagger H\psi) = \mathrm{i}\hbar\int \mathrm{d}^3x\left(\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \tag{1-1}$$

利用哈密顿量的厄米性 (Hermitian), 取复共轭得到

$$\psi^\dagger H = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \int \mathrm{d}^3x(\psi^\dagger H\psi) = -\mathrm{i}\hbar\int \mathrm{d}^3x\left(\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi\right) \tag{1-2}$$

两式相减得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3x\psi^\dagger\psi = 0 \tag{1-3}$$

因此 $\int d^3x(\psi^\dagger\psi)$ 是不随时间变化的. 换句话说, 粒子数守恒, 没有粒子产生或湮没. 但同时, 利用正则对易关系

$$[x,p]=\mathrm{i}\hbar \tag{1-4}$$

可以得到 Heisenberg 不确定关系

$$\Delta x\Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2} \tag{1-5}$$

相对论将动量和能量用质能关系联系起来, 即

$$p^2c^2+m^2c^4=E^2 \tag{1-6}$$

因此能量的不确定度为

$$\Delta E=\frac{p\Delta p}{E}c^2 \geqslant \frac{p\hbar c^2}{E\Delta x} \Longrightarrow \Delta x \geqslant \frac{pc}{E}\left(\frac{\hbar c}{\Delta E}\right) \tag{1-7}$$

为了避免新粒子的产生, 我们要求 $\Delta E \leqslant mc^2$. 于是得到了坐标不确定度 Δx 的下限

$$\Delta x \geqslant \frac{pc}{E}\frac{\hbar}{mc}=\frac{v}{c}\frac{\hbar}{mc} \tag{1-8}$$

下面分两种情况讨论.

(a) 非相对论粒子. 速度远小于光速 c, 即

$$\frac{v}{c} \ll 1 \tag{1-9}$$

所以 Δx 并无太大限制. 波函数的概率诠释说明 $|\psi(x)|^2$ 是在点 $\boldsymbol{x}$ 附近 d^3x 的体积内观察到粒子的概率密度. 换句话说, 粒子可以局限在任意小的一个空间范围内.

(b) 相对论粒子. 在这种情况下, 有

$$\frac{v}{c} \approx 1 \tag{1-10}$$

因此

$$\Delta x \geqslant \frac{\hbar}{mc} \tag{1-11}$$

也就是说, 粒子不能居于一个比 Compton 波长 $\dfrac{\hbar}{mc}$ 小的空间尺度内. 反过来说, 在比 Compton 波长小的空间尺度内, 将不可避免地产生新的粒子.

标量场和旋量场的非相对论性波动方程是 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程. 下面两章将会详细讨论 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程作为单粒子波动方程所产生的困难, 包括负几率和负能量问题, 及对应场量子化是如何解决这些困难的. 此处以 Klein 佯谬为例说明这个问题.

Klein 佯谬

Klein-Gordon 方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2+m^2\right)\psi\left(x,t\right)=0 \tag{1-12}$$

其中, m 为质量. 它是最简单的相对论性波动方程. 考虑一个阶跃势垒 $V_0>0$(图 1-1), 波函数的解为

$$\begin{aligned}&\psi_{\mathrm{L}}(x,t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et-\mathrm{i}p_1x}+R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}p_1x}\\&\psi_{\mathrm{R}}\left(x,t\right)=T\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et-\mathrm{i}p_2x}\end{aligned} \tag{1-13}$$

其中

$$p_1=\sqrt{E^2-m^2},\quad p_2=\sqrt{\left(E-V_0\right)^2-m^2} \tag{1-14}$$

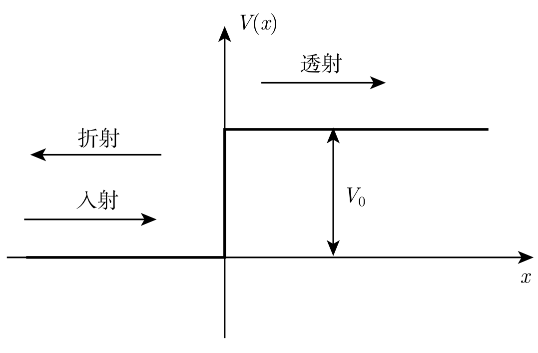


图 1-1　阶跃势垒

波函数在边界 $x=0$ 处的连续性条件

$$\psi_{\mathrm{L}}(t,0)=\psi_{\mathrm{R}}(t,0)\quad\text{和}\quad\partial_x\psi_{\mathrm{L}}(t,0)=\partial_x\psi_{\mathrm{R}}(t,0) \tag{1-15}$$

给出

$$1+R=T,\quad(1-R)\,p_1=Tp_2 \tag{1-16}$$

由上式可求得 R 和 T 分别为

$$T=\frac{2p_1}{p_1+p_2},\quad R=\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2} \tag{1-17}$$

在非相对论情形中, 如果 $E>V_0+m$, 则 p_1 与 p_2 均为实数, 既有透射也有反射; 如果 $E<V_0+m$, 则 p_2 为虚数, 只有反射波存在, 透射波在 Compton 波长内指数衰减. 然而在相对论情形中, 当势垒增加至 $V_0>2m$ 且能量在 $m<V_0-E$ 范围

内时, p_1 和 p_2 均为实数, 部分透射, 部分反射. 这是一个奇怪的结果, 因为当 V_0 很大时, 它应该不让粒子透射过去, 而结果却是在 $x>0$ 的地方发现有粒子传播. 这个结果称为 **Klein 佯谬**. 这只能由在阶跃势垒处产生了新粒子来解释.

1.1.2　自然单位制

高能物理中为方便起见通常取自然单位制, 即

$$\hbar = c = 1 \tag{1-18}$$

在国际单位制中

$$\hbar = 1.055 \times 10^{-34}\mathrm{J\cdot s} \tag{1-19}$$

因此, 在自然单位制中 $\hbar=1$ 就意味着能量的量纲为 [时间]$^{-1}$. 同样地, 光速

$$c = 2.99 \times 10^{8}\mathrm{m/s} \tag{1-20}$$

所以 $c=1$ 意味着时间和长度有着相同的量纲. 在计算的最终结果中, 通常需采用国际单位制, 所以需要将 $\hbar$ 和 c 的数值代回. 需要注意, 在不同的场合下同一物理量可能有不同的意义. 比如, 质量就可能有如下几种情况:

(a) [长度]$^{-1}$

$$m_{\mathrm{e}} = \frac{1}{\dfrac{\hbar}{m_{\mathrm{e}}c}} = \frac{1}{3.86\times10^{-11}\mathrm{cm}} \tag{1-21}$$

(b) [时间]$^{-1}$

$$m_{\mathrm{e}} = \frac{1}{\dfrac{\hbar}{m_{\mathrm{e}}c^2}} = \frac{1}{1.29\times10^{-21}\ \mathrm{s}} \tag{1-22}$$

(c) 能量

$$m_{\mathrm{e}} = m_{\mathrm{e}}c^2 = 0.511\ \mathrm{MeV} \tag{1-23}$$

(d) 动量

$$m_{\mathrm{e}} = m_{\mathrm{e}}c = 0.511\mathrm{MeV/c} \tag{1-24}$$

另外, 高能物理中常用 eV 和 cm 作为能量和长度的单位, 因此下面的转换关系非常有用

$$\hbar = 6.58\times10^{-22}\mathrm{MeV\cdot s},\quad \hbar c = 1.973\times10^{-11}\mathrm{MeV\cdot cm} \tag{1-25}$$

例 1-1　(a) Thomson 散射截面.

$$\sigma = \frac{8\pi\alpha^2}{3m_{\mathrm{e}}^2} = \frac{8\pi\alpha^2(\hbar c)^2}{3m_{\mathrm{e}}^2c^4} = \left(\frac{1}{137}\right)^2 \times \frac{(1.973\times10^{-11}\mathrm{MeV\cdot cm})^2}{(0.5\mathrm{MeV})^2} \times \frac{8\pi}{3} \simeq 6.95\times10^{-25}\mathrm{cm}^2 \tag{1-26}$$

在这个例子中, 我们知道散射截面的量纲应为 [长度]^2, 而这个公式中唯一出现的有量纲的物理量为 m_e, 所以此处实际上是上文对质量 m_e 讨论的情况 (a), 即 m_e 为 [长度]$^{-1}$ 的情况. 因此, 需要利用因子 $\hbar c$ 将量纲转换为我们需要的面积的量纲. 首先在自然单位制中计算

$$\sigma = \frac{8\pi\alpha^2}{3m_e^2} = \frac{8\times 3.14}{3\times(0.5\text{MeV})^2}\times\left(\frac{1}{137}\right)^2 = 1.78\times 10^{-3}\,(\text{MeV})^{-2} \tag{1-27}$$

然后乘以因子 $\left(\hbar c = 1.973\times 10^{-11}\text{MeV}\cdot\text{cm}\right)^2$ 将面积单位转换为 cm^2, 即

$$\sigma = 1.78\times 10^{-3}\,(\text{MeV})^{-2}\times\left(1.973\times 10^{-11}\text{MeV}\cdot\text{cm}\right)^2 = 6.95\times 10^{-25}\text{cm}^2 \tag{1-28}$$

(b) W 玻色子的衰变率.

标准模型中反应 $\text{W}^-\to e\nu$ 的衰变率为

$$\Gamma(\text{W}^-\to e\nu) = \frac{G_\text{F}}{\sqrt{2}}\frac{M_\text{W}^3}{6\pi} \tag{1-29}$$

其中, $M_\text{W} = 80.4\text{GeV/c}^2$ 是 W 玻色子的质量; $G_\text{F} = 1.166\times 10^{-5}\text{GeV}^{-2}$ 是弱作用耦合常数. 首先在自然单位制中计算

$$\Gamma(\text{W}^-\to e\nu) = \frac{G_\text{F}}{\sqrt{2}}\frac{M_\text{W}^3}{6\pi} = \frac{\left(1.166\times 10^{-5}\text{GeV}^{-2}\right)\times(80.4\text{GeV})^3}{\sqrt{2}\times 6\pi} = 0.227\text{GeV} \tag{1-30}$$

然后除以因子 $\hbar$ 得到正确的单位

$$\Gamma(\text{W}^-\to e\nu) = \frac{0.228\text{GeV}}{6.58\times 10^{-22}\text{MeV}\cdot\text{s}} = 3.5\times 10^{23}\text{s}^{-1} \tag{1-31}$$

(c) 中微子截面.

对一个准弹性中微子散射 $\nu_\mu + \text{e}\to\mu + \nu_\text{e}$, 低能的截面为

$$\sigma = 2G_\text{F}^2 m_\text{e} E \tag{1-32}$$

其中, E 为中微子的能量. 我们来计算 $E = 10\text{GeV}$ 的情况. 首先在自然单位制中计算

$$\sigma = 2\times\left(1.166\times 10^{-5}\text{GeV}^{-2}\right)^2\times 0.5\text{MeV}\ \times 10\text{GeV} = 1.34\times 10^{-12}\text{GeV}^{-2} \tag{1-33}$$

现在利用转换因子 $\hbar c = 1.973\times 10^{-11}\text{MeV}\ \cdot\text{cm}$ 得到面积的量纲

$$\sigma = 1.34\times 10^{-12}\text{GeV}^{-2}\times\left(1.973\times 10^{-11}\text{MeV}\ \cdot\text{cm}\right)^2 = 5.2\times 10^{-40}\text{cm}^2 \tag{1-34}$$

顺便提一句, 这是一个很小的反应截面, 说明中微子几乎不与有很多电子的物质发生作用, 所以它可以传播很远而不受其他物质的影响; 而且在低能的情况下, 截面随能量增加而增大.

(d) 将牛顿万有引力常数

$$G_{\mathrm{N}} = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2} \tag{1-35}$$

转换到 Planck 能标, 则有

$$G_{\mathrm{N}} = 6.67 \times 10^{-11} \left(\frac{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}\right) \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{kg}^2} = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{J} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{kg}^{-2} \tag{1-36}$$

利用

$$\hbar c = 3.16 \times 10^{-26}\mathrm{J} \cdot \mathrm{m} \tag{1-37}$$

可以得到

$$\frac{\hbar c}{G_{\mathrm{N}}} = 3.16 \times 10^{-26}\mathrm{J} \cdot \mathrm{m} \times \frac{1}{6.67 \times 10^{-11}\mathrm{J} \cdot \mathrm{m}}\mathrm{kg}^2 = 4.73 \times 10^{-16}\mathrm{kg}^2 \tag{1-38}$$

所以

$$\sqrt{\frac{\hbar c}{G_{\mathrm{N}}}} = 2.176 \times 10^{-8}\mathrm{kg} \tag{1-39}$$

又因为

$$1\mathrm{kg} \cdot \mathrm{c}^2 = 1\mathrm{kg} \times (3 \times 10^8\mathrm{m/s})^2 = 9 \times 10^{16}\frac{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2} = 9 \times 10^{16}\mathrm{J}, \quad \text{即 } 1\mathrm{kg} = 9 \times 10^{16}\mathrm{J/c}^2 \tag{1-40}$$

所以

$$\sqrt{\frac{\hbar c}{G_{\mathrm{N}}}} = 1.96 \times 10^9\mathrm{J/c}^2 \tag{1-41}$$

利用转换因子

$$1\mathrm{GeV} = 1.6 \times 10^{-10}\mathrm{J} \quad \Longrightarrow \quad 1\mathrm{J} = \frac{1}{1.6} \times 10^{10}\mathrm{GeV} \tag{1-42}$$

最终得到

$$m_{\mathrm{p}} \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G_{\mathrm{N}}}} = \frac{1.96 \times 10^9}{1.6} \times 10^{10}\mathrm{GeV} = 1.225 \times 10^{19}\mathrm{GeV/c}^2 \tag{1-43}$$

这就是我们通常所说的与引力相关的 Planck 能标, 约为 10^{19}GeV, 这几乎是高能领域里最高的能标. 它的另一种表达方式为

$$G_{\mathrm{N}} = 6.07 \times 10^{-39}(\hbar c)(\mathrm{GeV/c}^2)^{-2} \tag{1-44}$$

1.2 狭义相对论回顾

狭义相对论是描述相对论系统最重要的工具. 它的两条基本原理是:

(a) 光速的大小在任何惯性系中相同.

(b) 物理定律在任何惯性系中有相同的形式.

这里, 惯性系指的是: 在这个参考系中, 质点在不受外力时保持静止状态或做匀速直线运动.

1.2.1 Lorentz 变换

联系两个惯性系的坐标变换称为 **Lorentz 变换 (Lorentz transformation)**. 用 Lorentz 变换可以探讨物理量是如何随惯性坐标系而变化的. 在这里我们只回顾 Lorentz 变换最重要的性质.

假设坐标系 O' 沿坐标系 O 的 x 方向以速度 v 匀速运动. Lorentz 变换的形式为

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{1-45}$$

或

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - vx), \quad \text{其中 } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{1-46}$$

它使得

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \tag{1-47}$$

即组合

$$\tau^2 = t^2 - \boldsymbol{r}^2 \tag{1-48}$$

在 Lorentz 变换下保持不变, 我们称 τ 为固有时 (proper time). 这个关系保证了光速在任何惯性系中都是相等的. 这可以由下面的推导看出. 假设 $\boldsymbol{r}_1(t_1)$ 和 $\boldsymbol{r}_2(t_2)$ 是一个自由粒子轨迹上的两点, 分别处于时间 t_1, t_2. 因此粒子速率为

$$|\boldsymbol{v}| = \frac{1}{|t_2 - t_1|}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \tag{1-49}$$

如果速度为光速, 即 $|\boldsymbol{v}| = 1$, 那么有

$$(t_1 - t_2)^2 = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2 \tag{1-50}$$

由于上式是 Lorentz 不变的, 所以光速在各惯性系中相等. 另外, 对于无穷小间隔, 还可以定义无穷小固有时

$$(\mathrm{d}\tau)^2 = (\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2 \tag{1-51}$$

结合时间和空间坐标可以得到 Minkowski 时空 (Minkowski spacetime, 也称闵氏时空)

$$x^\mu = (t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{1-52}$$

x^μ 称为四矢量 (4−vector). 定义 Lorentz 不变的积为

$$x^2 = (x_0)^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2 \tag{1-53}$$

引入度规 $g_{\mu\nu}$, 将上式写成

$$x^2 = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} \tag{1-54}$$

其中

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1-55}$$

以后我们都默认使用 Einstein 求和规则: 在未明确指出的情况下, 重复指标表示求和. 需注意在 Lorentz 不变量式 (1-54) 中, 同一指标的上标和下标成对. 为了方便起见, 定义另一个四矢量

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -x^1, -x^2, -x^3) = (t, -\boldsymbol{r}) \tag{1-56}$$

因此

$$x^2 = x^\mu x_\mu \tag{1-57}$$

对无穷小间隔有

$$(\mathrm{d}x)^2 = (\mathrm{d}x)^\mu (\mathrm{d}x)_\mu = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2 \tag{1-58}$$

将 Lorentz 变换写成

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{1-59}$$

则 x 方向的 Lorentz 变换为

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \dfrac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1-60}$$

引入广义 Lorentz 变换, 它定义为保持 $x^2 = x^\mu x_\mu$ 不变的线性变换. 由

$$x'^2 = x'^\mu x'^\nu g_{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta\, g_{\mu\nu} x^\alpha x^\beta \tag{1-61}$$

可知, 若要求 $x^2 = x'^2$, 则有

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}\, g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \tag{1-62}$$

这称为**赝正交关系**.

另一种对 Lorentz 变换式 (1-45) 参数化的方式为

$$x' = (\cosh\omega\ )\, x - (\sinh\omega\ )\, t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = (\cosh\omega)\ t - (\sinh\omega)\ x \tag{1-63}$$

其中

$$\tanh\omega = \beta \tag{1-64}$$

这称为 Lorentz 变换的双曲形式 (hyperbolic form). Lorentz 变换可以看成闵氏时空中的双曲转动, ω 为双曲转角, 通常称为快度 (rapidity). 或采用矩阵形式

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L_x(\omega) \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1-65}$$

其中

$$L_x(\omega) = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\left\{ -\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{1-66}$$

因此, 同一方向的快度可以相加, 即

$$L_x(\omega_1)\, L_x(\omega_2) = L_x(\omega_1 + \omega_2) \tag{1-67}$$

类比于绕同一轴的旋转角度可以简单相加.

将四矢量 A^μ 定义为类似于坐标按下式变换的量

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = \Lambda^{\mu}_{\alpha} A^a \tag{1-68}$$

为了描述 Lorentz 不变量, 引入两个四矢量 A^μ 和 B^ν 间的内积

$$A \cdot B \equiv A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} = A^\mu B_\mu = A^0 B^0 - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \tag{1-69}$$

显然这样定义的内积是 Lorentz 不变的

$$A' \cdot B' \equiv A'^\mu B'^\nu g_{\mu\nu} = A^\alpha B^\beta \Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}\, g_{\mu\nu} = A^\alpha B^\beta g_{\alpha\beta} = A \cdot B \tag{1-70}$$

闵氏时空中四矢量自身的内积为

$$x^2 = x \cdot x, \quad (\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}x \tag{1-71}$$

它非常类似于三维欧式空间中的标量积, 但它不是正定的, 因为度规的对角元有正有负. 可以将其分为三类

$$\begin{cases} A^2 > 0, & \text{类时} \\ A^2 < 0, & \text{类空} \\ A^2 = 0, & \text{类光} \end{cases} \tag{1-72}$$

在 Lorentz 变换下这三类不同的物理量不能通过坐标变换从一类变成另一类.

1.2.2 能量和动量

我们希望将能量和动量等物理量在闵氏时空中表达出来. 从无穷小四矢量坐标出发

$$\mathrm{d}x^\mu = (\mathrm{d}x^0, \mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3) \tag{1-73}$$

因为固有时

$$(\mathrm{d}\tau)^2 = \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x_\mu = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2 = (\mathrm{d}t)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right)^2 (\mathrm{d}t)^2 = (1 - v^2)(\mathrm{d}t)^2 \tag{1-74}$$

是 Lorentz 不变的, 可以通过二者之比得到四速度

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\tau}\right) \tag{1-75}$$

它也是闵氏时空中的四矢量. 容易看出其分量需要满足限制条件

$$u^\mu u_\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = 1 \tag{1-76}$$

我们看到它的空间分量为

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\boldsymbol{v} \tag{1-77}$$

对 $v \ll 1$ 的情况, 它就是通常的速度

$$\boldsymbol{u} \approx \boldsymbol{v} \tag{1-78}$$

也就是说, u^μ 就是通常的速度矢量在闵氏时空中的推广. 由四速度可以得到四动量

$$p^\mu = m u^\mu = \left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) \tag{1-79}$$

当 $v \ll 1$ 时,

$$p^0 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m\left(1+\frac{1}{2}v^2+\cdots\right) = m+\frac{m}{2}v^2+\cdots \tag{1-80}$$

就是总能, 而

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = m\boldsymbol{v}+\cdots \tag{1-81}$$

就是通常的动量. 因此能量和动量可以组成一个四矢量

$$p^\mu = (E, \boldsymbol{p}) \tag{1-82}$$

它满足

$$p^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2 = \frac{m^2}{1-v^2}(1-v^2) = m^2 \tag{1-83}$$

这就是相对论性的能量和动量关系. 换句话说, 一个粒子的四动量 p^μ 满足关系 $p^2 = m^2$. 两个粒子的情况就复杂很多, 因为

$$(p_1+p_2)^2 = p_1^2+p_2^2+2p_1\cdot p_2 = m_1^2+m_2^2+2E_1E_2-2\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2 \tag{1-84}$$

因此总的四动量的平方可以有很多值, 取决于 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 的夹角.

Mandelstam 参数

在下面这样的散射过程中

$$a(p_1)+b(p_2)\longrightarrow c(p_3)+d(p_4), \quad 其中 p_1+p_2=p_3+p_4 \tag{1-85}$$

采用 Lorentz 不变的 Mandelstam 参数非常方便, 它定义为

$$s=(p_1+p_2)^2, \quad t=(p_1-p_2)^2, \quad u=(p_1-p_4)^2 \tag{1-86}$$

这些参数的一个优点在于它们与坐标系无关. 例如, 在 b 粒子静止的实验室系中, 有

$$s=(p_1+p_2)^2=p_1^2+p_2^2+2p_1\cdot p_2=m_1^2+m_2^2+2E_1m_2 \tag{1-87}$$

而在质心系中则有

$$\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4=0 \quad\Longrightarrow\quad s=(E_3+E_4)^2 \tag{1-88}$$

所以由末态能量可得, 参数 s 至少为

$$s=(m_3+m_4)^2 \tag{1-89}$$

这样就可以利用初、末态能量来计算实验室系中生成末态 $c+d$ 的最低能量为

$$E_1 = \frac{1}{2m_2}\left[(m_3+m_4)^2 - m_1^2 - m_2^2\right] \tag{1-90}$$

比如, 反应 $\pi^+ + \mathrm{p} \longrightarrow \mathrm{k}^+ + \Sigma^+$ 的阈能为

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2m_\mathrm{p}}\left[(m_\mathrm{k}+m_\Sigma)^2 - m_\pi^2 - m_\mathrm{p}^2\right] \\ &= \frac{1}{2\times 938}\left[(494+1189)^2 - 139.6^2 - 938^2\right] \\ &= 1030\ \mathrm{MeV} \end{aligned} \tag{1-91}$$

1.2.3　张量分析

由广义相对论的第二个原则: 物理定律在所有惯性系中有相同的形式, 这意味着需要将物理定律在闵氏时空中用张量表达. 本节对闵氏时空中的张量分析作一个简单的介绍. 张量基本上有着和矢量积一样的变换性质. 在闵氏时空中, 有两种有着不同变换性质的矢量

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad x'_\mu = \Lambda^\nu_\mu x_\nu \tag{1-92}$$

可以将这些矢量并积组成 3 种不同的 2 阶张量, 这些张量的变换性质如下:

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta T^{\alpha\beta}, \quad T'_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu T_{\alpha\beta}, \quad T'^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\beta_\nu T^\alpha_\beta \tag{1-93}$$

由此类推最一般的张量有着如下的变换性质:

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\cdots\nu_m} = \Lambda^{\mu_1}_{\alpha_1}\cdots\Lambda^{\mu_n}_{\alpha_n}\Lambda^{\beta_1}_{\nu_1}\cdots\Lambda^{\beta_m}_{\nu_m} T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\beta_1\cdots\beta_m} \tag{1-94}$$

注意: 张量分量的变换是线性齐次的.

张量运算

容易证明下面的运算保持张量的变换性质:

(a) 乘常数, (cT) 与 T 变换性质相同.

(b) 同阶张量相加.

比如, A^μ 和 B^ν 都是四动量,

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha A^\alpha, \quad B'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha B^\alpha \tag{1-95}$$

那么

$$A'^\mu + B'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha (A^\alpha + B^\alpha) \tag{1-96}$$

所以 $A^\alpha + B^\alpha$ 也是一个四动量. 数学上可以将任意坐标四矢量 x^μ 与动量四矢量 p^μ 相加得到另一个四矢量 $x^\mu + p^\mu$, 但它并不是一个有意义的物理量, 因为它们的量纲并不相同.

(c) 张量并积.

比如, 2 阶张量 A 与 3 阶张量 B 并在一起得到一个 5 阶张量 AB. 因为一个张量像许多矢量一样并在一起变换, 所以张量并积也像许多矢量并在一起变换.

(d) 张量缩并 (contraction): 分量成对的上下标求和.

比如, $T_\mu^{\mu\alpha}$ 是一个 1 阶张量 (矢量), 它是 3 阶张量 $T_\nu^{\mu\alpha}$ 的一个缩并. 这可以由赝正交关系 (1-62) 得到. 证明如下:

$$T_\nu'^{\mu\alpha} = \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\nu^\sigma \Lambda_\beta^\alpha T_\sigma^{\rho\beta} \tag{1-97}$$

因此

$$T_{\nu\alpha}'^{\alpha} = T_\nu'^{\mu\alpha} g_{\mu\alpha} = g_{\mu\alpha} \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\nu^\sigma \Lambda_\beta^\alpha T_\sigma^{\rho\beta} = \Lambda_\nu^\sigma \left(g_{\rho\beta} T_\sigma^{\rho\beta}\right) = \Lambda_\nu^\sigma T_{\sigma\beta}^{\beta} \tag{1-98}$$

一次缩并总是降两阶. 矢量 A 与 B 的内积就是它们并积得到的 2 阶张量 AB 缩并的结果.

(e) 对称化和反对称化.

设 $T^{\mu\nu}$ 是一个 2 阶张量, 有

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu T^{\alpha\beta} \tag{1-99}$$

交换其指标得

$$T'^{\nu\mu} = \Lambda_\alpha^\nu \Lambda_\beta^\mu T^{\alpha\beta} = \Lambda_\beta^\nu \Lambda_\alpha^\mu T^{\beta\alpha} \tag{1-100}$$

二式相加得

$$T'^{\mu\nu} + T'^{\nu\mu} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \left(T^{\alpha\beta} + T^{\beta\alpha}\right) \tag{1-101}$$

也就是说, 对称的组合得到对称的张量. 同样地, 如果相减, 则可以得到反对称张量的变换.

(f) 度规 $g_{\mu\nu}$ 和置换符号 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 分别有如下性质:

$$\Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu\, g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \det(\Lambda) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \Lambda_\rho^\gamma \Lambda_\sigma^\delta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{1-102}$$

这表示, 如果 $\det(\Lambda) = 1$, 则 $g_{\mu\nu}$ 和 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 可看成张量一样变换, 尽管它们并不随惯性系变化.

闵氏时空中的张量最重要的性质是, 如果在某一个惯性系中它们的每一个分量均为 0, 那么在所有其他惯性系中也为 0. 这来自于式 (1-94) 的线性齐次性. 由

这个性质我们可以看到, 如果把物理定律在闵氏时空中用张量表示, 那么它们将在所有惯性系中取相同的形式. 比如, 如果在一个惯性系中有下列关系

$$f^\mu = ma^\mu \tag{1-103}$$

那么可以定义一个新的张量

$$t^\mu = f^\mu - ma^\mu \tag{1-104}$$

则 t^μ 的所有分量在这个惯性系中均为 0, 因此它的所有分量在其他惯性系中也将为 0:

$$t'^\mu = f^{\mu'} - ma'^\mu = 0 \tag{1-105}$$

也就是

$$f^{\mu'} = ma'^\mu \tag{1-106}$$

即该物理定律在所有惯性系中取相同的形式, 符合相对论的要求.

我们可以利用张量的性质构造 Lorentz 不变量. 容易看出 Lorentz 不变的组合来自于缩并所有的 Lorentz 指标. 例如, 下面的各种组合都是 Lorentz 不变的:

$$x^\mu p_\mu, \quad p_1^\mu p_{2\mu}, \quad M^{\mu\nu}M_{\mu\nu}, \quad J_\mu J^\mu, \quad 其中\ J_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\nu M^{\alpha\beta}, \cdots \tag{1-107}$$

构造 Lorentz 不变量在相对论系统中非常有用. 我们举一个例子来说明.

例 1-2　考虑衰变过程 $\mathrm{A} \to \mathrm{B} + \mathrm{C}$. 能量和动量守恒给出

$$p_\mathrm{A}^\mu = p_\mathrm{B}^\mu + p_\mathrm{C}^\mu \tag{1-108}$$

方便起见我们采用粒子 A 静止的坐标系. 为了计算粒子 B 的能量, 考虑下面的组合

$$(p_\mathrm{A} - p_\mathrm{B})^2 = p_\mathrm{C}^2 = m_\mathrm{C}^2 \tag{1-109}$$

或

$$m_\mathrm{A}^2 + m_\mathrm{B}^2 - 2m_\mathrm{A}E_\mathrm{B} = m_\mathrm{C}^2 \tag{1-110}$$

因此粒子 B 的能量为

$$E_\mathrm{B} = \frac{1}{2m_\mathrm{A}}\left(m_\mathrm{A}^2 + m_\mathrm{B}^2 - m_\mathrm{C}^2\right) \tag{1-111}$$

闵氏时空中的物理定律

从张量分析可知, 如果把物理定律用闵氏时空中的张量表示, 那么所有惯性系中的物理定律有相同的关系. 我们用 Maxwell 方程组作为例子来进行说明. Maxwell 方程组可写成

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1-112}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0,\quad \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{J} \tag{1-113}$$

我们希望将物理量 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B},\boldsymbol{J}$ 和 ρ 写成闵氏时空中的张量. 从高斯定律和安培定律可得

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\rho}{\partial t},\quad \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} \tag{1-114}$$

以及

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}=0 \tag{1-115}$$

如果将 $\boldsymbol{J}$ 和 ρ 视为四矢量的分量, 即 $J^\mu=(\rho,\boldsymbol{J})$, 则连续性方程可以用闵氏时空中的散度表示为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}=\partial_\mu J^\mu=0 \tag{1-116}$$

现在引入矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ 来满足无源 Maxwell 方程组

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{1-117}$$

那么高斯定律和安培定律可以写成

$$-\boldsymbol{\nabla}^2\phi-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \frac{1}{\mu_0}\left[\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\right)-\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}\right]=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)+\boldsymbol{J} \tag{1-118}$$

如果选择规范使得

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{1-119}$$

则这些方程可化简为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2\right)\phi=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2\right)\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{J} \tag{1-120}$$

这说明, ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 可以组成和 J^μ 一样的四矢量 $A^\mu=(\phi,\boldsymbol{A})$, 方程可以进一步写成

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2\right)A^\mu=J^\mu \tag{1-121}$$

其中利用了 $\mu_0\varepsilon_0=1$. 于是电场可以写成

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}A^0-\partial_0\boldsymbol{A}\quad 或\quad E^i=\partial^iA^0-\partial^0A^i \tag{1-122}$$

构造如下反对称二阶张量

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{1-123}$$

可以看到, 电场强度是它的分量

$$E^i = -F^{0i} \tag{1-124}$$

$F^{\mu\nu}$ 称为电磁场张量 (也称电磁张量或场强张量), 它其余的分量 F^{ij} 则对应于磁场强度

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = \varepsilon^{ijk} B^k \tag{1-125}$$

原来的 Maxwell 方程组最终可以写成

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{1-126}$$

其中

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \tag{1-127}$$

这样 Maxwell 方程组就用闵氏时空中的张量表达出来了. 在 Lorentz 变换下, 电磁场张量的变换形式为

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \tag{1-128}$$

在结束本节前, 我们要讨论一下带电粒子在电磁场中的运动方程. 在通常的三维空间矢量形式下, 有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = e\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{1-129}$$

等式右端为 Lorentz 力. 要将它改写为相对论协变的形式, 等式左端显然需要用四矢量 $\mathrm{d}p^\mu/\mathrm{d}\tau$ 替换. 等式右端应为一个由四速度 u^μ 和电磁场张量 $F^{\mu\nu}$ 构成的四矢量. 这个四矢量可以写为 $F^{\mu\nu}u_\nu$, 因此运动方程的形式应为

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = eF^{\mu\nu}u_\nu \tag{1-130}$$

作为验证, 我们先考虑方程的空间分量

$$\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}\tau} = e\left(F^{i0}u_0 + F^{ij}u_j\right) \tag{1-131}$$

根据关系式

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1-v^2}, \quad u^i = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}v^i, \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{1-132}$$

可以看到这就是带电粒子在 Lorentz 力下的运动方程. 我们再考虑方程的时间分量

$$\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}\tau} = eF^{0i}u_i \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} \tag{1-133}$$

这就是能量方程.

1.3 作用量原理

牛顿力学的所有运动方程可以用作用量原理来重新表述. 作用量原理指出一个质点实际轨迹的作用量为最小值. 利用作用量原理的好处在于可以方便地考虑对称性的效果.

1.3.1 质点力学

考虑一个质点在 t_1 时刻从 x_1 开始移动, t_2 时刻到达 x_2. 作用量为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x})\mathrm{d}t, \quad L: \text{拉氏量 (Lagrangian)} \tag{1-134}$$

作用量原理告诉我们

$$\delta S = 0 \tag{1-135}$$

会给出运动方程. 对轨迹 $x(t)$ 作一个微小改变 (变分)

$$x(t) \longrightarrow x'(t) = x(t) + \delta x(t) \tag{1-136}$$

并固定端点

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0 \quad (\text{初始条件}) \tag{1-137}$$

作用量因此而产生的改变为

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta(\dot{x}) \right] \mathrm{d}t \tag{1-138}$$

这里我们看到

$$\delta \dot{x} = \dot{x}'(t) - \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\delta(x)] \tag{1-139}$$

即导数的变分等于变分的导数. 因此

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x) \right] \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) \right] \delta x \mathrm{d}t \tag{1-140}$$

其中运用了分部积分和初始条件. S 取最小值需要满足

$$\frac{\delta S}{\delta x} = 0 \tag{1-141}$$

即

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{1-142}$$

这就是 Euler-Lagrange 方程.

共轭动量定义为

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \tag{1-143}$$

哈密顿量用 Legendre 变换定义

$$H(p,q) = p\dot{x} - L(x,\dot{x}) \tag{1-144}$$

它将变量由 $\dot{x}$ 变为 p, 因此 H 依赖于 p 而非 $\dot{x}$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = p - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p - p = 0 \tag{1-145}$$

对于简单的保守力的情况, 即外力是某个势的梯度的情况, 我们知道牛顿运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{1-146}$$

现在我们用作用量原理的方法来处理, 先写出拉氏量

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - V(x) \tag{1-147}$$

因此

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-148}$$

于是有

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{1-149}$$

可以看到, Euler-Lagrange 方程给出的结果与牛顿运动方程完全相同. 哈密顿量

$$H = p\dot{x} - L = \frac{m}{2}(\dot{x})^2 + V(x), \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{1-150}$$

就是总能量. 很容易推广到多自由度的情况

$$x(t) \longrightarrow q_i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1-151}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i)\mathrm{d}t \tag{1-152}$$

Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1-153}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H = \Sigma p_i \dot{q}_i - L \tag{1-154}$$

例 1-3　三维简谐振子.

拉氏量为

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{mw^2}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &= \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{mw^2}{2}(\boldsymbol{x})^2 \end{aligned} \tag{1-155}$$

有

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -mw^2 x_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i \tag{1-156}$$

Euler-Lagrange 方程为

$$m\ddot{x} = -mw^2 x_i \tag{1-157}$$

与牛顿第二定律得到的方程相同. 注意, 这里的运动方程是矢量形式的, 而拉氏量在旋转下不变.

采用作用量原理的原因主要有:

(1) 我们需要作用量原理或者哈密顿形式来进行量子化, 这在以后将会看到;

(2) 在作用量原理的形式中, 对于对称性的讨论更加简单和方便;

(3) 可以容易地利用 Lagrange 乘子 (Lagrange multiplier) 来考虑对坐标的约束.

1.3.2　场论

场论可以视为质点力学在自由度趋于无穷多时的极限情况. 对简单的情况, 我们用一个连续函数 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ 来描述系统: $q_i(t) \to \phi(\boldsymbol{x},t)$, 作用量为

$$S = \int \mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{x},t), \partial_\mu\phi)\mathrm{d}^3x\mathrm{d}t \tag{1-158}$$

其中,$\mathcal{L}$ 为拉氏量密度. 作用量的变分给出

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right]\mathrm{d}x^4 \\ &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\delta\phi\mathrm{d}x^4 \end{aligned} \tag{1-159}$$

其中利用了 $\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$ 和分部积分. 由 $\delta S = 0$ 可得

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) \quad \text{(Euler-Lagrange 方程)} \tag{1-160}$$

共轭动量密度定义为

$$\pi(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \tag{1-161}$$

哈密顿量密度为

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \tag{1-162}$$

将理论推广到多个场的情况:

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) \longrightarrow \phi_i(\boldsymbol{x}, t), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1-163}$$

运动方程为

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1-164}$$

而共轭动量为

$$\pi_i(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} \tag{1-165}$$

哈密顿量为

$$\mathcal{H} = \pi_i \dot{\phi}_i - \mathcal{L} \tag{1-166}$$

1.4　对称性和 Noether 定理

Noether 定理[1]是说, 连续对称性会给出守恒律. 比如, 时间平移下的不变性

$$t \longrightarrow t + a, \quad a\text{为任意常量} \tag{1-167}$$

给出了能量守恒. 现证明如下. 保守力下的牛顿运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{x}, t) \tag{1-168}$$

假设 $V(\boldsymbol{x}, t) = V(\boldsymbol{x})$ 不含时, 即时间平移不变, 那么

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} \right) = -\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \right) \cdot \nabla V = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[V(\boldsymbol{x})] \tag{1-169}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \right)^2 + V(\boldsymbol{x}) \right] = 0 \tag{1-170}$$

也就是能量守恒. 同样地, 空间平移不变

$$\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \tag{1-171}$$

意味着动量守恒, 旋转不变则对应角动量守恒. Noether 定理是一个在拉氏量形式中讨论对称性的简便方法.

1.4.1　质点力学

我们首先考虑经典力学情况. 作用量为

$$S=\int L(q_i,\dot{q}_i)\mathrm{d}t \tag{1-172}$$

假设 S 在某种连续对称变换下不变

$$q_i\longrightarrow q_i'=f_i(q_j) \tag{1-173}$$

其中, $f_i(q_j)$ 是 q_j 的函数. 因为对称性是连续的, 可以考虑无穷小变换

$$q_i\longrightarrow q_i'\simeq q_i+\delta q_i \tag{1-174}$$

S 在这种变换下的变分为

$$\delta S=\int\delta L\mathrm{d}t=\int\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right]\mathrm{d}t,\quad \delta\dot{q}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_i) \tag{1-175}$$

利用运动方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) \tag{1-176}$$

可以将 δS 写成

$$\delta S=\int\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_i)\right]\mathrm{d}t=\int\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)\right]\mathrm{d}t \tag{1-177}$$

因此由 $\delta L=0$ 可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right)=0 \tag{1-178}$$

或者写成

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=0,\quad A=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i \tag{1-179}$$

这里 A 就是定理中的守恒量.

注意: 假如 δL 不为 0, 而是某个量的时间导数, 即 $\delta L=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K$, 则可以得到如下形式的守恒律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i-K\right)=0 \tag{1-180}$$

因为此时作用量依然是不变的. 比如, 在时间平移的例子中, $t\longrightarrow t+\varepsilon$, 有

$$q\left(t+\varepsilon\right)=q\left(t\right)+\varepsilon\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\quad\Longrightarrow\delta q=\varepsilon\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1-181}$$

同样地,

$$\delta L=L(t+\varepsilon)-L(t)=\varepsilon\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \tag{1-182}$$

守恒律为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i - L\right) = 0 \tag{1-183}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0, \quad H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \tag{1-184}$$

例 1-4　三维空间的旋转对称性.

作用量为

$$S = \int L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})\,\mathrm{d}t = \int L(x_i, \dot{x}_i)\,\mathrm{d}t \tag{1-185}$$

假设 S 在三维空间中旋转不变

$$x_i \longrightarrow x_i' = R_{ij}x_j \tag{1-186}$$

其中, $\boldsymbol{R}$ 是一个正交矩阵, 即

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = 1 \quad 或 \quad R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk} \tag{1-187}$$

例如, 绕 z 轴的旋转为

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1-188}$$

现在考虑一个无穷小变换

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad |\varepsilon_{ij}| \ll 1 \tag{1-189}$$

正交性要求

$$(\delta_{ij} + \varepsilon_{ij})(\delta_{ik} + \varepsilon_{ik}) = \delta_{jk} \Longrightarrow \varepsilon_{jk} + \varepsilon_{kj} = 0, \quad 即\varepsilon_{jk}反对称 \tag{1-190}$$

设 $\theta \ll 1$, 则

$$R_z(\theta) \longrightarrow 1 + \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 \\ -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1-191}$$

$\varepsilon_{12} = \theta$ 对应于绕 z 轴的无穷小旋转变换. 同样地, ε_{23} 对应 x 轴, ε_{31} 对应 y 轴.

由 Noether 定理可得, 旋转不变下的守恒量为

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\varepsilon_{ij}x_j = \varepsilon_{ij}p_i x_j \tag{1-192}$$

展开得

$$J=\varepsilon_{12}\left(p_1x_2-p_2x_1\right)+\varepsilon_{23}\left(p_2x_3-p_3x_2\right)+\varepsilon_{13}\left(p_1x_3-p_1x_3\right) \tag{1-193}$$

如果取

$$\varepsilon_{12}=-\theta_3,\quad \varepsilon_{23}=-\theta_1,\quad \varepsilon_{31}=-\theta_2 \tag{1-194}$$

或

$$\varepsilon_{ij}=-\varepsilon_{ijk}\theta_k \tag{1-195}$$

那么

$$J=-\theta_k\varepsilon_{ijk}p_ix_j=\theta_kJ_k,\quad J_k=\varepsilon_{ijk}x_ip_j \tag{1-196}$$

展开为

$$J_1=\left(x_2p_3-x_3p_2\right),\quad J_2=\left(x_3p_1-x_1p_3\right),\quad J_3=\left(x_1p_2-x_2p_1\right) \tag{1-197}$$

因此 J_k 就是通常的角动量 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$ 的 k 分量.

1.4.2 场论

上面的结果很容易推广到场论. 从下面的作用量出发

$$S=\int\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\mathrm{d}^4x \tag{1-198}$$

考虑对称变换

$$\phi(x)\longrightarrow\phi'(x') \tag{1-199}$$

其中包含了坐标的变换

$$x^\mu\longrightarrow x'^\mu \tag{1-200}$$

对无穷小变换

$$\delta\phi=\phi'\left(x'\right)-\phi\left(x\right),\quad \delta x'^\mu=x'^\mu-x^\mu \tag{1-201}$$

因为其中包含了坐标的变换, 需要计算体积元的变化

$$\mathrm{d}^4x'=J\mathrm{d}^4x,\quad J=\left|\frac{\partial(x_0',x_1',x_2',x_3')}{\partial(x_0,x_1,x_2,x_3)}\right| \tag{1-202}$$

也就是坐标变换的雅可比行列式 (Jacobian). 对无穷小变换

$$J=\left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right|\approx\left|g^\mu_\nu+\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu}\right|\approx 1+\partial_\mu(\delta x^\mu) \tag{1-203}$$

其中利用了关系

$$\det(1+\varepsilon)\approx 1+\mathrm{tr}(\varepsilon),\quad \text{如果 } |\varepsilon|\ll 1 \tag{1-204}$$

因此

$$\mathrm{d}^4 x' = \mathrm{d}^4 x(1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)) \tag{1-205}$$

作用量的变分为

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) + \mathcal{L} \partial_\mu(\delta x^\mu) \right] \mathrm{d}x^4 \tag{1-206}$$

定义 x^μ 固定时的变分为

$$\bar{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \phi'(x) - \phi'(x') + \phi'(x') - \phi(x) = \phi'(x) - \phi'(x) - (\partial_\mu \phi')\delta x^\mu + \delta\phi \tag{1-207}$$

我们看到算子 $\bar{\delta}$ 与微分算符可交换, 而 δ 算子则不能. δ 与 $\bar{\delta}$ 的关系为

$$\delta\phi = \bar{\delta}\phi + (\partial_\mu \phi)\delta x^\mu \tag{1-208}$$

同样地,

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \bar{\delta}(\partial_\mu \phi) + \partial_\nu(\partial_\mu \phi)\delta x^\nu \tag{1-209}$$

因此

$$\delta S = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\bar{\delta}\phi + (\partial_\mu \phi)\delta x^\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \left[\bar{\delta}(\partial_\mu \phi) + \partial_\nu(\partial_\mu \phi)\delta x^\nu \right] + \mathcal{L} \partial_\mu(\delta x^\mu) \right\} \mathrm{d}x^4 \tag{1-210}$$

利用 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \tag{1-211}$$

得到

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \bar{\delta}\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta}(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta}\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\bar{\delta}\phi) = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta}\phi \right] \tag{1-212}$$

其中利用了

$$\partial_\mu(\bar{\delta}\phi) = \bar{\delta}(\partial_\mu \phi) \tag{1-213}$$

将其余几项结合起来

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}(\partial_\nu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu(\partial_\mu \phi) \right] \delta x^\nu + \mathcal{L} \partial_\nu(\delta x^\nu) = (\partial_\nu \mathcal{L})\delta x^\nu + \mathcal{L} \partial_\nu(\delta x^\nu) = \partial_\nu(\mathcal{L} \delta x^\nu) \tag{1-214}$$

最后可以得到

$$\delta S = \int \mathrm{d}x^4 \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta}\phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] \tag{1-215}$$

如果在对称变换下 $\delta S=0$, 就得到

$$\partial_\mu J^\mu=\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar{\delta}\phi+\mathcal{L}\delta x^\mu\right]=0\quad(\text{流守恒})\tag{1-216}$$

注意这里的守恒流 J_μ 并不是唯一确定的, 我们总可以加上如下项

$$\partial_\lambda h^{\lambda\mu},\quad h^{\lambda\mu}=-h^{\mu\lambda}\tag{1-217}$$

使得

$$\partial^\mu(J_\mu+\partial_\lambda h^{\lambda\mu})=0\tag{1-218}$$

例 1-5　时空平移.

坐标变换为

$$x^\mu\longrightarrow x'^\mu=x^\mu+a^\mu\Longrightarrow\phi'(x+a)=\phi(x)\tag{1-219}$$

因此

$$\bar{\delta}\phi=-a^\mu\partial_\mu\phi\tag{1-220}$$

守恒律的形式为

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(-a_\nu\partial^\nu\phi)+\mathcal{L}a^\mu\right]=-\partial_\mu(T^{\mu\nu}a_\nu)=0\tag{1-221}$$

其中

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\partial^\nu\phi-g_{\mu\nu}\mathcal{L}\tag{1-222}$$

为能动量张量. 更具体地,

$$T^{0i}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi)}\partial_i\phi\tag{1-223}$$

以及

$$P^i=\int\mathrm{d}x^3T^{0i}\tag{1-224}$$

为场的总动量. 另外

$$T^{00}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}\partial^0\phi-\mathcal{L}\tag{1-225}$$

为哈密顿密度, 而

$$E=\int\mathrm{d}x^3T^{00}\tag{1-226}$$

为总能量. 这些物理量在以后做量子化时需要用到.

例 1-6　内部对称性.

考虑一个包含两个场 ϕ_1 和 ϕ_2 的系统. 拉氏量为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi_1)^2+(\partial_\mu\phi_2)^2\right]-\frac{\mu^2}{2}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right) \tag{1-227}$$

它在 (ϕ_1,ϕ_2) 平面的旋转变换下是不变的. 这称为 $O(2)$ 对称性.

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\phi_1'\\ \phi_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \tag{1-228}$$

其中, θ 不随 x^μ 变化. 因为这种变换是在 (ϕ_1,ϕ_2) 抽象的空间中的操作, 所以被称为内部对称性. 为了计算 Noether 流, 将对称变换写成无穷下的形式, 即 $\theta\ll 1$, 由此得

$$\begin{aligned}\phi_1'&=\phi_1-\theta\phi_2\\ \phi_2'&=\phi_2+\theta\phi_1\end{aligned} \tag{1-229}$$

因此

$$\delta\phi_1=-\theta\phi_2,\quad \delta\phi_2=\theta\phi_1 \tag{1-230}$$

Noether 流的形式为

$$J^\mu=\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i=(\partial^\mu\phi_1)\phi_2-(\partial^\mu\phi_2)\phi_1 \tag{1-231}$$

其中去掉了无关的参数 θ. 容易看出这个流是守恒的. 利用运动方程

$$(\Box+\mu^2)\phi_1=0,\quad (\Box+\mu^2)\phi_2=0 \tag{1-232}$$

因此散度为

$$\partial_\mu J^\mu=(\Box\phi_1)\phi_2-(\Box\phi_2)\phi_1=-\mu^2\phi_1\phi_2+\mu^2\phi_1\phi_2=0 \tag{1-233}$$

即流守恒.

第 2 章　相对论性波动方程

2.1　相对论性方程

量子场论的基本策略是: 取一个符合相对论的波动方程, 将波函数看成广义坐标进行量子化. 我们将研究 3 种不同类型的波动方程, 分别是 Klein-Gordon 方程、Dirac 方程和 Maxwell 方程. 我们会看到, 这些不同的相对论性波动方程对应于拥有不同自旋的粒子: Klein-Gordon 方程描写自旋为 0 的粒子, Dirac 方程描写自旋为 1/2 的粒子, 而 Maxwell 方程则描写自旋为 1 的粒子. 但是在进行量子化之前, 需要先仔细地研究一下这些方程的性质, 以利于我们更好地进行量子化.

2.1.1　Klein-Gordon 方程

我们知道在非相对论情况下, 能量和动量的关系式为

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}) \tag{2-1}$$

为了对这个体系进行量子化, 作替换 $E \to \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{p} \to -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}$, 并将它们作用在一个波函数 ψ 上得到 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(\boldsymbol{r})\right]\psi \tag{2-2}$$

这个方程中空间坐标 x 出现在二次微分, 而时间坐标 t 出现在一次微分, 它们不是处于同等地位的, 所以它不适用于相对论性系统. 换句话说, 它不是 Lorentz 协变的. 对于相对论性的自由粒子, Lorentz 协变的能量和动量的关系是

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2 \tag{2-3}$$

作同样的替换得到波动方程为

$$(-\boldsymbol{\nabla}^2 + m^2)\phi = -\partial_0^2 \phi \tag{2-4}$$

或

$$(\Box + m^2)\psi = 0\ ,\quad 其中\ \Box = \partial_0^2 - \boldsymbol{\nabla}^2 = \partial^\mu \partial_\mu = \partial^2 \tag{2-5}$$

这就是 Klein-Gordon 方程, 显然是 Lorentz 不变的. 这是一个有时间二阶导数的微分方程, 而 Schrödinger 方程只有时间的一阶导数.

概率诠释

因为波函数 ϕ 在量子力学中被理解为概率幅, 所以我们要探究在 Klein-Gordon 方程中这是否可能. 根据方程 (2-4)

$$(\partial_0^2 - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2)\phi = 0 \tag{2-6}$$

和它的共轭

$$(\partial_0^2 - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2)\phi^* = 0 \tag{2-7}$$

可以得到连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{2-8}$$

其中

$$\rho = \mathrm{i}(\phi\partial_0\phi^* - \phi\partial_0\phi^*), \quad \boldsymbol{j} = \mathrm{i}(\phi\boldsymbol{\nabla}\phi^* - \phi^*\boldsymbol{\nabla}\phi) \tag{2-9}$$

这样积分 $P = \int \rho \mathrm{d}^3 x$ 就是守恒的, 即

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}^3 x = -\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} \mathrm{d}^3 x = -\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0, \quad \text{假设在 } S \text{ 上有} \boldsymbol{j} = 0 \tag{2-10}$$

这里 S 是体积 V 的表面.

既然 P 是守恒的, 我们就想要把它理解为概率. 但是容易看出 P 并不是正定的. 例如, 波函数取如下形式

$$\phi \sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}Et}\psi(x), \quad \text{则 } \rho = -2E\left|\psi(x)\right|^2 \leqslant 0 \tag{2-11}$$

就会得到负的概率, 这是不能接受的, 因为概率的定义要求它是正定的. 另外, 如果像在 Schrödinger 方程中的情况一样, 取正定的 $\rho = \phi\phi^*$ 作为概率密度, 可以发现它并不守恒

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \phi\phi^* \mathrm{d}^3 x \neq 0 \tag{2-12}$$

因此 Klein-Gordon 方程不可能有概率诠释. 困难之处在于 Klein-Gordon 方程不是关于时间的一阶导数而是关于时间的二阶导数的.

Klein-Gordon 方程的解

尽管 Klein-Gordon 方程不是一个可行的相对论性波动方程, 但可以作为探讨场论中处理方式的一个出发点. 现在来考察一下它的解. 我们看到 Klein-Gordon 方程

$$(\Box + m^2)\phi(x) = (\partial_0^2 - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2)\phi(x) = 0 \tag{2-13}$$

是一个常系数的微分方程, 有平面波解

$$\phi(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \quad \text{如果 } p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2 = 0 \quad \text{或} \quad p_0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \tag{2-14}$$

(a) 正能解: $P_0 = \omega_p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$, $\boldsymbol{p}$ 为任意值, 则

$$\phi_p^{(+)}(x) = \exp\left(-\mathrm{i}\omega_p t + \mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right) \tag{2-15}$$

(b) 负能解 : $P_0 = -\omega_p = -\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$, 则

$$\phi_p^{(-)}(x) = \exp\left(\mathrm{i}\omega_p t - \mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right) \tag{2-16}$$

这里为了方便起见, 对负能解 $\phi_p^{(-)}(x)$ 的动量部分取负号. 在这里正能解 $\phi^{(+)}(x)$ 和负能解 $\phi^{(-)}(x)$ 组成一个完备的解集. 最一般的解 (通解) 是正能解和负能解的线性组合

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\left[a(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega_k t} + b(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\omega_k t}\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\left[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + b(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right]\end{aligned} \tag{2-17}$$

其中, $k\cdot x = \omega_k t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}; a(k), b(k)$ 是展开系数.

内积

注意到对于任意两个解 ϕ_1, ϕ_2, 得到

$$(\partial_0^2 - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2)\phi_1 = 0 \tag{2-18}$$

和

$$(\partial_0^2 - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2)\phi_2^* = 0 \tag{2-19}$$

由此可以导出

$$\int \mathrm{d}^3x\left\{\left[\phi_2^*\partial_0^2\phi_1 - \phi_1\partial_0^2\phi_2^*\right] - \left[\phi_2^*\boldsymbol{\nabla}^2\phi_1 - \phi_1\boldsymbol{\nabla}^2\phi_2^*\right]\right\} = 0 \tag{2-20}$$

或者

$$\int \mathrm{d}^3x\left\{\partial_0\left[\phi_2^*\partial_0\phi_1 - \phi_1\partial_0\phi_2^*\right] - \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\phi_2^*\boldsymbol{\nabla}\phi_1 - \phi_1\boldsymbol{\nabla}\phi_2^*\right]\right\} = 0 \tag{2-21}$$

使用高斯定理, 消掉在无穷远处的表面项

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3x\left[\phi_2^*\partial_0\phi_1 - \phi_1\partial_0\phi_2^*\right] = 0 \tag{2-22}$$

因此将内积 (标量积) 定义为

$$\langle\phi_2|\phi_1\rangle = \int \mathrm{d}^3x \left[\phi_2^*\partial_0\phi_1 - \phi_1\partial_0\phi_2^*\right] \tag{2-23}$$

其中, ϕ_1, ϕ_2 是 Klein-Gordon 方程的解. 这个内积不随时间变化. 由内积的定义可以容易地导出如下正交关系

$$\left\langle \phi_{p'}^{(+)}|\phi_p^{(+)}\right\rangle = \delta^3\left(p - p'\right) \tag{2-24}$$

$$\left\langle \phi_{p'}^{(-)}|\phi_p^{(-)}\right\rangle = -\delta^3\left(p - p'\right) \tag{2-25}$$

$$\left\langle \phi_{p'}^{(+)}|\phi_p^{(-)}\right\rangle = 0 \tag{2-26}$$

这些正交关系对于计算波函数平面波展开的系数很有用.

2.1.2 Dirac 方程

为了避免 Klein-Gordon 方程概率解释的困难, Dirac(1928) 构造了包含一个时间一阶导数的相对论性波动方程, 和 Schrödinger 方程一样具有守恒的正概率. 为了符合狭义相对论的要求, 这个波动方程也是空间坐标一阶导数的. 他先作了一个假设

$$E = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta m = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m \tag{2-27}$$

其中, α_i, β 设为厄米矩阵. 现在 E 成为了一个厄米的能量算符, 就像动量算符 $\boldsymbol{p}$ 一样. 然后可以得到

$$E^2 = (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta m)^2 = \frac{1}{2}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)p_i p_j + (\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)mp_i + \beta^2 m^2 \tag{2-28}$$

为了得到正确的相对论能量动量关系, 要求

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij} \tag{2-29}$$

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \tag{2-30}$$

$$\beta^2 = 1 \tag{2-31}$$

这里 $i, j = 1, 2, 3$. 从方程 (2-29) 可以得到

$$\alpha_i^2 = 1 \tag{2-32}$$

联立方程 (2-31) 得到 α_i, β 的本征值都是 ±1. 方程 (2-29) 也给出

$$\alpha_1\alpha_2 = -\alpha_2\alpha_1 \implies \alpha_2 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_1 \tag{2-33}$$

对上式取迹, 得到

$$\operatorname{tr}(\alpha_2) = -\operatorname{tr}(\alpha_1\alpha_2\alpha_1) = -\operatorname{tr}\left(\alpha_2\alpha_1^2\right) = -\operatorname{tr}(\alpha_2) \tag{2-34}$$

因此

$$\operatorname{tr}(\alpha_2) = 0 \tag{2-35}$$

同理可得

$$\operatorname{tr}(\alpha_i) = 0, \quad i = 1,2,3\ , \quad \operatorname{tr}(\beta) = 0 \tag{2-36}$$

方程 (2-32) 和 (2-36) 表明 α_i, β 的特征值都是 ± 1, 迹为 0, 所以都是偶数阶的. 我们知道 Pauli 矩阵 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 也都是无迹反对易的, 但是这里需要 4 个这样的矩阵, 所以我们需要超越 2×2 阶的 Pauli 矩阵. 因此 α_i, β 都必须是 4×4 的矩阵. 一个方便的选择是 Bjoken 和 Drell 所选用的矩阵, 取如下形式

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2-37}$$

在方程 (2-27) 中令 $E \to \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\boldsymbol{p} \to -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}$, 可以得到 Dirac 方程

$$(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta m)\psi = \mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{2-38}$$

或

$$(-\mathrm{i}\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} - \mathrm{i}\beta\partial_t + m)\psi = 0 \tag{2-39}$$

这里 ψ 是一个四分量的波函数.

为方便讨论在相对论下的变换, 定义一组新的矩阵

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i \tag{2-40}$$

在 Bjorken-Drell 选择中, 它们取为

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{2-41}$$

这一组新的矩阵就不再是厄米的了. 相应的 Dirac 方程就是

$$(-\mathrm{i}\gamma^i\partial_i - \mathrm{i}\gamma^0\partial_0 + m)\psi = 0 \text{ 或 } (-\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi = 0 \tag{2-42}$$

通常被称为协变形式的 Dirac 方程. 反对易关系现在取更简单的形式

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \tag{2-43}$$

其中, “$\{,\}$”是反对易子,

$$\{A, B\} = AB + BA \tag{2-44}$$

概率诠释

我们现在可以展示 Dirac 方程给出了概率的正确形式. 从 Dirac 方程的厄米共轭形式得到

$$-\mathrm{i}\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}=(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m)\psi^\dagger=\psi^\dagger(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m) \tag{2-45}$$

以及

$$\mathrm{i}\left(\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi+\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=\psi^\dagger(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m)\psi-\psi^\dagger(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m)\psi \tag{2-46}$$

对空间坐标积分, 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\mathrm{d}^3x(\psi^\dagger\psi)&=\int\left\{-\mathrm{i}\psi^\dagger(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla})\psi-\mathrm{i}\left((\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla})\psi^\dagger\right)\psi\right\}\mathrm{d}^3x\\&=-\mathrm{i}\int\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi\right)\mathrm{d}^3x=0\end{aligned}$$

这里使用了 Gauss 定理, 并且假设波函数 ψ 在无穷远处为 0. 这样定义的总概率 $\int\mathrm{d}^3x(\psi^\dagger\psi)$ 守恒且总为正的, 解决了 Klein-Gordon 方程中会出现概率的困难.

Dirac 方程的解

现在讨论 Dirac 方程的物理意义. Dirac 方程的形式是

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0 \tag{2-47}$$

求平面波形式的解

$$\psi(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\omega\left(p\right) \tag{2-48}$$

这里 $\omega(p)$ 是四分量的列矩阵, 则有

$$(\not{p}-m)\omega\left(p\right)=0,\quad 其中\not{p}=\gamma^\mu p_\mu=\gamma^0p_0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} \tag{2-49}$$

以及

$$\left(p_0-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}-\beta m\right)\omega\left(p\right)=0,\quad 其中\boldsymbol{\alpha}=\gamma_0\boldsymbol{\gamma},\quad\beta=\gamma_0 \tag{2-50}$$

为方便起见, 我们回到原来的 $\boldsymbol{\alpha}$ 及 β 的形式. 用哈密顿量重写这个方程

$$H\omega\left(p\right)=p_0\omega\left(p\right),\quad 其中H=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m \tag{2-51}$$

这是本征值方程的形式. 我们知道, 对于厄米算符来说, 不同本征值的本征矢量互相正交

$$\omega^{(i)\dagger}\left(p\right)\omega^{(j)}\left(p\right)=\delta_{ij},\quad 其中H\omega^{(i)}\left(p\right)=p_0^{(i)}\omega^{(i)}\left(p\right) \tag{2-52}$$

为了找出本征值和本征矢量, 写下

$$H=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m=\begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -m \end{pmatrix},\quad \omega(p)=\begin{pmatrix} u \\ l \end{pmatrix} \tag{2-53}$$

其中, u(上分量) 和 l(下分量) 是二分量的列矩阵. 这样得到

$$\begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ l \end{pmatrix}=p_0\begin{pmatrix} u \\ l \end{pmatrix} \tag{2-54}$$

或

$$\begin{cases} (p_0-m)u-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})l=0 \\ -(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})u+(p_0+m)l=0 \end{cases} \tag{2-55}$$

这是 u 和 l 的齐次线性方程组. 非平凡解存在的条件为

$$\begin{vmatrix} p_0-m & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & p_0+m \end{vmatrix}=0 \tag{2-56}$$

容易看出, 这个行列式条件要求

$$p_0^2=\boldsymbol{p}^2+m^2 \quad 或 \quad p_0=\pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} \tag{2-57}$$

(a) 正能解 $p_0=E=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$.

将解代入方程 (2-55) 得到

$$l=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}u \tag{2-58}$$

可以将解写成下列形式

$$\omega^{(s)}(p)=N\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} \end{pmatrix}\chi_s,\quad s=1,2,\quad \chi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \chi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2-59}$$

这里, N 是待定的归一化常数. 坐标空间的解是

$$\psi=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\omega^{(s)}(p)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}N\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} \end{pmatrix}\chi_s \tag{2-60}$$

注意到在非相对论极限下 $|\boldsymbol{p}|\ll E$, 得到下分量远小于上分量.

(b) 负能解 $p_0=-E=-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$.

同样地, 负能解可被写成

$$u=\frac{-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})}{E+m}l \tag{2-61}$$

将解写成下列形式

$$\omega^{(3)}(p) = N\begin{pmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^{(4)}(p) = N\begin{pmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2-62}$$

在坐标空间中得到

$$\psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Et}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}N\begin{pmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix}\chi_s \tag{2-63}$$

正如前面讨论过的, 不同本征矢量的正交性给出

$$\omega^{(3)}(p)^{\dagger}\omega^{(1)}(p) = N^2\chi_1^{\dagger}\begin{pmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} \end{pmatrix}\chi_1 = 0 \tag{2-64}$$

这些四分量的列矩阵称为**旋量 (spinor)**, 其标准表示是

$$u(p,s) = N\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} \end{pmatrix}\chi_s, \quad v(p,s) = N\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix}\chi_s \tag{2-65}$$

其中, $N=\sqrt{E+m}$, $\quad s=1,2$. 注意 v 旋量是用相反的 $\boldsymbol{p}$ 矢量定义的. 平面波因子变成 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$. 这些旋量间的正交关系是

$$u^{\dagger}(p,s')v(-p,s) = 0 \tag{2-66}$$

另一点要说明的是, 在 Dirac 方程通解的展开式中, 写出

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \sum_s\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}\left[b(p,s)\,u(p,s)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + d^{\dagger}(p,s)\,v(p,s)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right] \tag{2-67}$$

为了求解系数 $b(p,s)$, 在等式两边乘以 $u^{\dagger}(p',s')\,\mathrm{e}^{-p'\cdot x}$ 并对 x 积分

$$\begin{aligned}\int u^{\dagger}(p',s')\,\mathrm{e}^{-p'\cdot x}\psi(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}^3x =& \sum_s\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}[b(p,s)\,u^{\dagger}(p',s')\,u(p,s)\,\delta^3(p-p') \\ &+ d^{\dagger}(p,s)\,u^{\dagger}(p',s')\,v(p,s)\,\delta^3(p+p')]\end{aligned} \tag{2-68}$$

最后一项等于零, 因为 $u^{\dagger}(p',s')\,v(p,s) = u^{\dagger}(-p,s)\,v(p,s) = 0$, 得到

$$b(p,s) = \int\frac{\mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}u^{\dagger}(p,s)\,\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{2-69}$$

这表明, 在解的平面波展开中选择 $v(p,s)$ 而不是 $v(-p,s)$ 会很方便的. 利用同样的方法可得到

$$d^{\dagger}(p,s) = \int\frac{\mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}v(p,s)\,\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{2-70}$$

Dirac 共轭

动量空间中的 Dirac 方程为

$$(\not{p}-m)\psi(p)=0\ ,\quad \not{p}\equiv p^{\mu}\gamma_{\mu} \tag{2-71}$$

它有一个不寻常的特点是: 其中的 $\not{p}$ 不是厄米的. 它的厄米共轭取如下形式

$$\psi^{\dagger}(p)(\not{p}^{\dagger}-m)=0 \tag{2-72}$$

因为 $\gamma_{\mu}'s$ 不是厄米的

$$\gamma_0^{\dagger}=\gamma_0,\quad \gamma_i^{\dagger}=-\gamma_i \tag{2-73}$$

所以 $\not{p}^{\dagger}\neq\not{p}$. 但可以写出

$$\gamma_{\mu}^{\dagger}=\gamma_0\gamma_{\mu}\gamma_0 \tag{2-74}$$

得到

$$\psi^{\dagger}(p)(\gamma_0\gamma_{\mu}\gamma_0 p^{\mu}-m)=0\quad 或\quad \psi^{\dagger}(p)\gamma_0(\gamma_{\mu}p^{\mu}-m)=0 \tag{2-75}$$

即

$$\overline{\psi}(\not{p}-m)=0 \tag{2-76}$$

其中, $\overline{\psi}=\psi^{\dagger}\gamma_0$ 称为 **Dirac 共轭**. 利用 Dirac 共轭可以让 Dirac 方程取更简单的形式.

2.1.3 螺旋度和手征性

非相对论量子力学中, 自由粒子的哈密顿量为

$$H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{2-77}$$

显然它是旋转不变的. 其结果是轨道角动量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 是守恒的

$$[\boldsymbol{L},H]=0 \tag{2-78}$$

这很容易验证

$$\left[L_1,\frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2\right]=\frac{1}{2m}\left[x_2p_3-x_3p_2,p_2^2+p_3^2\right]=\frac{\mathrm{i}}{2m}\left(2p_3p_2-2p_2p_3\right)=0 \tag{2-79}$$

如果在哈密顿量中加上一个球对称势 $V(r)$, 轨道角动量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 依然是守恒的.

但是 Dirac 方程的情形就不同了. 它的哈密顿量为

$$H=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m \tag{2-80}$$

由于其中的 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是矢量, 因此 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}$ 不是旋转不变的, 这也可由下式验证

$$\begin{aligned}[L_1,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m]&=[x_2p_3-x_3p_2,\quad \alpha_2p_2+\alpha_3p_3]\\&=-\mathrm{i}\alpha_2p_3-(-\mathrm{i}\alpha_3p_2)=-\mathrm{i}\,(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{p})_1\end{aligned}\tag{2-81}$$

推广到矢量形式为

$$[\boldsymbol{L},\quad \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m]=-\mathrm{i}\,(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{p})\tag{2-82}$$

因此 $\boldsymbol{L}$ 不是守恒的. 这并不奇怪, 因为 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 不是一个相对论下有明确定义的物理量. 我们需要找到一个相对论情形下有明确定义的物理量来替代轨道角动量对球对称的描述. 这个量需要与坐标无关, 并与哈密顿量有正确的对易关系. 我们尝试下面这个组合

$$\boldsymbol{S}=c\,(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\alpha}),\quad c\text{是一个待定的常数}\tag{2-83}$$

与 H 的对易子为

$$[S_1,H]=2c\,[\alpha_2\alpha_3,\ \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m]\tag{2-84}$$

容易验证

$$[\alpha_2\alpha_3,\alpha_1]=\alpha_2\alpha_3\alpha_1-\alpha_1\alpha_2\alpha_3=0\tag{2-85}$$

$$[\alpha_2\alpha_3,\alpha_2]=\alpha_2\alpha_3\alpha_2-\alpha_2\alpha_2\alpha_3=-2\alpha_3\tag{2-86}$$

同样地, 有

$$[\alpha_2\alpha_3,\alpha_3]=2\alpha_2,\quad [\alpha_2\alpha_3,\beta]=0\tag{2-87}$$

因此

$$[S_1,H]=4c\,(-\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{p})_1\tag{2-88}$$

或

$$[\boldsymbol{S},H]=-4c\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{p}\tag{2-89}$$

为了使

$$[\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S},\quad H]=0\tag{2-90}$$

需要取

$$c=-\frac{\mathrm{i}}{4}\tag{2-91}$$

最终得到

$$\boldsymbol{S}=\frac{\mathrm{i}}{4}\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\alpha}\tag{2-92}$$

我们希望将这个量解释为自旋角动量, 因为它要与 $\boldsymbol{L}$ 相加. 为此我们计算对易子

$$[S_1,S_2]=\left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)^2[\alpha_2\alpha_3,\ \alpha_3\alpha_1]=-\frac{1}{4}\,(\alpha_2\alpha_3\alpha_3\alpha_1-\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2=\mathrm{i}S_3\tag{2-93}$$

同样地

$$[S_2, S_3] = \mathrm{i}S_1, \quad [S_3, S_1] = \mathrm{i}S_2 \tag{2-94}$$

这说明它们确实有和角动量一样的对易关系. 因此可以将

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} \tag{2-95}$$

解释为总角动量. 另外, 由

$$S_1^2 = \left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)^2 \alpha_2\alpha_3\alpha_2\alpha_3 = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{S}^2 = \frac{3}{4} \tag{2-96}$$

可以看出它们描述了一个 $S = \dfrac{1}{2}$ 的态. 用标准的符号 $\boldsymbol{S}$ 可以写成

$$S_1 = \frac{-\mathrm{i}}{2}\alpha_2\alpha_3 = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \tag{2-97}$$

或

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \end{pmatrix} \tag{2-98}$$

螺旋度

从上面的讨论可以看到, 轨道角动量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ 和自旋角动量 $\boldsymbol{S}$ 都不是守恒的. 我们需要寻找一个可以替代自旋用以描述粒子的基本属性的量. 我们发现总角动量在动量方向上的投影是一个合适的量, 称为螺旋度 (helicity):

$$\lambda = \boldsymbol{J} \cdot \hat{p} = \boldsymbol{S} \cdot \hat{p}\,, \qquad \hat{p} = \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \tag{2-99}$$

它对一个自由粒子是守恒的, 因为 $\boldsymbol{J}$ 和 $\hat{p}$ 都与自由粒子哈密顿量对易. 螺旋度包含了与自旋一样多的信息量, 可以利用螺旋度来描述粒子的基本性质. 不难看出, 作为螺旋度本征态的 Dirac 旋量具有如下形式

$$u\,(p, \pm) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{E + m} \end{pmatrix}\chi_\pm \tag{2-100}$$

其中, $\chi_\pm$ 满足

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{p})\,\chi_\pm = \pm\chi_\pm \tag{2-101}$$

为了验证它是本征态, 将 λ 作用到 $u\,(p, \pm)$ 上

$$\lambda u\,(p, \pm) = (\boldsymbol{S} \cdot \hat{p})\,u\,(p, \pm) = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{p}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{p}}{2} \end{pmatrix} u\,(p, \pm) = \pm\frac{1}{2}u\,(p, \pm) \tag{2-102}$$

这说明 $u(p,+)$ 的螺旋度为 $\frac{1}{2}$, $u(p,-)$ 螺旋度为 $-\frac{1}{2}$.

现在来讨论 $\chi_{\pm}$ 的具体形式. 如果 $\hat{p}=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$, 则

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot\hat{p}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\\ \sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} & -\cos\theta\end{pmatrix} \tag{2-103}$$

本征值方程为

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\cos\theta-\lambda & \frac{1}{2}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\\ \frac{1}{2}\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} & -\frac{1}{2}\cos\theta-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{2-104}$$

解得

$$\lambda^2-\frac{1}{4}=0,\quad \lambda=\pm\frac{1}{2} \tag{2-105}$$

对 $\lambda=\frac{1}{2}$ 的情况, 本征矢量为

$$\chi_{+}=N\begin{pmatrix}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\\ 1-\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \tag{2-106}$$

对 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 的情况, 本证矢量为

$$\chi_{-}=N\begin{pmatrix}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\\ -(1+\cos\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\end{pmatrix} \tag{2-107}$$

手征性

在弱作用中, 为了方便, 需要定义具有确定手征 (chirality) 的费米子

$$\psi_{\mathrm{R}}\equiv\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi,\quad \psi_{\mathrm{L}}\equiv\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi \tag{2-108}$$

它们是手征算符 γ_5 的本征态

$$\gamma_5\psi_{\mathrm{R}}=\psi_{\mathrm{R}},\quad \gamma_5\psi_{\mathrm{L}}=-\psi_{\mathrm{L}} \tag{2-109}$$

可以看出它们有如下性质

$$\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{L}}=\bar{\psi}_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{R}}=0 \tag{2-110}$$

另一个有用的性质是, 左旋和右旋旋量

$$u_{\mathrm{L}}(p)=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)u(p,-),\quad u_{\mathrm{R}}(p)=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)u(p,+) \tag{2-111}$$

在零质量极限下也是螺旋度算符 $\lambda = \boldsymbol{s} \cdot \hat{p}$ 的本征态, 这可以通过下面的计算看出来.

在标准的表示中

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2-112}$$

因此

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{L}}(p) &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\, u(p,-) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} \end{pmatrix}\chi_- \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-p}{E} \end{pmatrix}\chi_- = \frac{1}{2}\left(\frac{E+p}{E}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\chi_- \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\chi_- \end{aligned}$$

这里利用了零质量粒子 $E = p$ 的性质. 同样地,

$$u_{\mathrm{R}}(p) = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\, u(p,+) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\chi_+ \tag{2-113}$$

因此

$$\begin{aligned} \lambda u_{\mathrm{L}}(p) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\chi_- \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p})\,\chi_- = -\frac{1}{2}u_L(p) \end{aligned}$$

同样地,

$$\lambda u_{\mathrm{R}}(p) = \frac{1}{2}u_{\mathrm{R}}(p) \tag{2-114}$$

手征表示在标准表示中,

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{2-115}$$

有时取 γ_5 是对角矩阵的表示会更加方便. 因为这样 γ_5 的本征态就是左旋或右旋的场. 利用矩阵

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{2-116}$$

对基进行变换, 则

$$\gamma_5' = U^\dagger \gamma_5 U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2-117}$$

另外还有

$$\boldsymbol{\alpha}' = U^\dagger \boldsymbol{\alpha} U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{2-118}$$

$$\gamma_0' = U^\dagger \gamma_0 U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2-119}$$

$$\boldsymbol{\gamma}' = \gamma_0' \boldsymbol{\alpha}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{2-120}$$

Dirac 方程的 Lorentz 变换

Klein-Gordon 方程在 Lorentz 变换下是协变的, 而 Dirac 方程则不是. 现在研究 Dirac 方程

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{2-121}$$

在 Lorentz 变换

$$x^\mu \to x^{'\mu} = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{2-122}$$

下如何改变. 在新的坐标系中, Dirac 方程的形式是

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu^{'} - m)\psi^{'}(x^{'}) = 0 \tag{2-123}$$

这里我们使用的是相同的 γ 矩阵 (总的来说, 不同的 γ 矩阵的集合可以通过相似变换相联系 ——Pauli 定理). 假设 $\psi^{'}(x^{'})$ 和 $\psi(x)$ 通过一个线性变换相联系

$$\psi^{'}(x^{'}) = S\psi(x) \tag{2-124}$$

对应于任意的 Lorentz 变换需要找出这个 4×4 的矩阵 S. 首先将 Lorentz 变换反转

$$x^\gamma = \Lambda^\gamma_\mu x^{'\mu} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} = \Lambda^\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \tag{2-125}$$

则方程 (2-123) 变成

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu \Lambda^\alpha_\mu \partial_\alpha - m)S\psi(x) = 0 \text{ 或 } (\mathrm{i}(S^{-1}\gamma^\mu S)\Lambda^\alpha_\mu \partial_\alpha - m)\psi(x) = 0 \tag{2-126}$$

为了让这个方程和原来的 Dirac 方程等价, 要求

$$(S^{-1}\gamma^\mu S)\Lambda_\mu^\alpha = \gamma^\alpha \quad \text{或} \quad (S^{-1}\gamma^\mu S) = \Lambda_\alpha^\mu \gamma^\alpha \tag{2-127}$$

为了找出 S, 先考虑无穷小 Lorentz 变换

$$\Lambda_\nu^\mu = g_\nu^\mu + \epsilon_\nu^\mu + O(\epsilon^2), \quad |\epsilon_\nu^\mu| \ll 1 \tag{2-128}$$

赝正交关系给出

$$g_{\mu\nu}(g_\alpha^\mu + \epsilon_\alpha^\mu)(g_\beta^\nu + \epsilon_\beta^\nu) = g_{\alpha\beta} \tag{2-129}$$

或

$$\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{\beta\alpha} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \epsilon_{\alpha\beta} \text{ 反对称} \tag{2-130}$$

将 S 写成

$$S = 1 - \frac{\mathrm{i}}{4}\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu} + O(\epsilon^2) \tag{2-131}$$

得到

$$S^{-1} = 1 + \frac{\mathrm{i}}{4}\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu} \tag{2-132}$$

其中, $\sigma_{\mu\nu}$ 是待定的 4×4 的矩阵. 代入方程 (2-127) 可得

$$(1 + \frac{\mathrm{i}}{4}\sigma_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta})\gamma^\mu(1 - \frac{\mathrm{i}}{4}\sigma_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta}) = (g_\alpha^\mu + \epsilon_\alpha^\mu)\gamma^\alpha \tag{2-133}$$

或

$$\epsilon^{\alpha\beta}\frac{\mathrm{i}}{4}[\sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\mu] = \epsilon_\alpha^\mu\gamma^\alpha = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}(g_\alpha^\mu\gamma_\beta - g_\beta^\mu\gamma_\alpha) \tag{2-134}$$

确定等式两边的 $\varepsilon^{\alpha\beta}$ 的系数, 可得到

$$[\sigma_{\alpha\beta}, \gamma_\mu] = 2\mathrm{i}(g_{\beta\mu}\gamma_\alpha - g_{\alpha\mu}\gamma_\beta) \tag{2-135}$$

我们可以证明下式

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \tag{2-136}$$

给出的 $\sigma_{\alpha\beta}$ 满足方程 (2-135)(这里需要有虚数 i, 是因为生成转动的 σ_{ij} 应当是厄米的, 而 $[\gamma_i, \gamma_j]$ 则是反厄米的). 为了证明这一点, 要用恒等式

$$[AB,\ C] = A\{B,\ C\} - \{A,\ C\}B \tag{2-137}$$

来计算

$$\begin{aligned}
[\sigma_{\alpha\beta}, \gamma_\mu] &= \frac{\mathrm{i}}{2}[(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha), \gamma_\mu] = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\gamma_\alpha\{\gamma_\beta,\ \gamma_\mu\} - \{\gamma_\alpha, \gamma_\mu\}\gamma_\beta - (\alpha \leftrightarrow \beta)\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(2\gamma_\alpha g_{\beta\mu} - 2g_{\alpha\mu}\gamma_\beta\right) \times 2 = 2\mathrm{i}(g_{\beta\mu}\gamma_\alpha - g_{\alpha\mu}\gamma_\beta)
\end{aligned}$$

不难看出, 对于有限的 Lorentz 变换, 可以把无穷小 Lorentz 变换作用无穷多次得到

$$\psi^{'}(x^{'}) = S\psi(x), \quad S = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{4}\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}\right] \tag{2-138}$$

注意到

$$\sigma_{\mu\nu}^{\dagger} = \gamma_0\sigma_{\mu\nu}\gamma_0 \quad \text{且} \quad S^{\dagger} = \gamma^0 S^{-1}\gamma^0 \tag{2-139}$$

因此 S 不是幺正的. 从 $\psi^{'}(x^{'}) = S\psi$ 得到

$$\psi^{\dagger'}(x^{'}) = \psi^{\dagger}S^{\dagger} = \psi^{\dagger}\gamma^0 S^{-1}\gamma^0 \quad \text{或} \quad \overline{\psi}'(x^{'}) = \overline{\psi}(x)S^{-1} \tag{2-140}$$

这表明 $\bar{\psi}$ 有简单的变换性质并且

$$S^{-1}\gamma^{\mu}S = \Lambda_{\nu}^{\mu}\gamma^{\nu} \tag{2-141}$$

现在详细地考察在不同洛伦兹变换下 S 的形式.

(a) 旋转.

从式 (2-128) 可以看出, 无穷小旋转由洛伦兹变换参数 $\varepsilon_{23},\varepsilon_{31},\varepsilon_{12}$ 描述. 定义

$$\varepsilon_{ij} \equiv \varepsilon_{ijk}\theta_k \tag{2-142}$$

不难看出 θ_k 就是绕 k 轴的转角. S 中相应的矩阵为

$$\sigma^{ij} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\gamma^i, \gamma^j\right] \tag{2-143}$$

由

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{2-144}$$

可得

$$\gamma^i\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_i\sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_i\sigma_j \end{pmatrix} \tag{2-145}$$

和

$$\sigma^{ij} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\gamma^{\mathrm{i}}, \gamma^j\right] = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -\left[\sigma_i, \sigma_j\right] & 0 \\ 0 & -\left[\sigma_i, \sigma_j\right] \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \tag{2-146}$$

因此

$$\varepsilon_{ij}\sigma^{ij} = \varepsilon_{ijn}\theta_n\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}}{2} \end{pmatrix} \tag{2-147}$$

所以旋转变换下的 Dirac 旋量的变换为

$$\psi^{'}(x^{'}) = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{4}\sigma^{ij}\epsilon_{ij}\right]\psi(x) = \exp\left[(-\mathrm{i})\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}}{2} \end{pmatrix}\right]\psi(x) \tag{2-148}$$

或

$$\psi^{'}(x^{'}) = \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\theta})\psi(x) \tag{2-149}$$

其中

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{2-150}$$

也就是说, 上面两个分量与下面两个分量像自旋 1/2 的量一样变换. 这和我们前面找到的式 (2-98) 中的 S 完全一样.

(b) 伪转动 (boost).

对无穷小伪转动可以将参数写为

$$\varepsilon_{0i} = \beta_i \tag{2-151}$$

相应的矩阵为

$$\sigma^{0i} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\gamma^0, \gamma^{\mathrm{i}}\right] = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^i = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{2-152}$$

以及

$$\varepsilon_{0i}\sigma^{0i} + \varepsilon_{i0}\sigma^{i0} = 4\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\beta}}{2} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\beta}}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2-153}$$

因此在伪转动下, Dirac 旋量作如下变换

$$\psi^{'}(x^{'}) = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{4}\left(\sigma^{0i}\epsilon_{0i} + \sigma^{i0}\epsilon_{i0}\right)\right]\psi(x) = \exp\left[(-\mathrm{i})\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\beta}}{2} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\beta}}{2} & 0 \end{pmatrix}\right] \tag{2-154}$$

或

$$\psi^{'}(x^{'}) = \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\beta})\psi(x) \tag{2-155}$$

其中

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{2-156}$$

费米双线性项 尽管 Dirac 波函数 ψ 在 Lorentz 变换下有着由式 (2-138) 所表示的相当复杂的变换, 但费米双线性项 $\overline{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x)$ 却有很简单的变换. 例如,

$$\overline{\psi}'(x')\psi'(x') = \overline{\psi}(x)S^{-1}S\psi(x) = \overline{\psi}(x)\psi(x) \tag{2-157}$$

这表示 $\overline{\psi}(x)\psi(x)$ 组合是 Lorentz 不变的. 同理, 可以计算其他组合得到下列结果:

$$\begin{array}{ll} \overline{\psi}\gamma_\mu\psi & \text{四矢量} \\ \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi & \text{轴矢量} \\ \overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi & \text{二阶反对称张量} \\ \overline{\psi}\gamma_5\psi & \text{赝标量} \end{array} \tag{2-158}$$

其中, $\gamma_5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. 注意这里已经列出了所有的 Dirac 矩阵的乘积, 因为这些乘积不能超过 4 个矩阵.

空穴理论 (Hole theory)[2]

为了解决负能量状态的问题, Dirac 提出真空是所有 $E < 0$ 的态都被填满以及所有 $E > 0$ 的态都为空的解释. Pauli 不相容原理会阻止一个电子跃迁到 $E < 0$ 的态. 在这个图景中, 负能海里的空穴, 也就是缺掉一个带有 $-|e|$ 的电荷和负能量 $-|E|$ 的电子, 等价于多出一个带有能量 $|E|$ 和电荷 $+|e|$ 的粒子. 这个新粒子被称为“正电子”, 有时也被称为“反粒子”. 这是“反粒子”概念第一次被引入粒子物理. 其实早在 1929 年, 赵忠尧院士 —— 那时还是加州理工学院的一名研究生 —— 就曾注意到过一些反常效应, 表明有很像电子但带正电的粒子存在. 粒子与反粒子的这种对应被称为“电荷共轭”(charge conjugation). 电子的反粒子通常被称为“正电子”. 1932 年, Carl Anderson 在一次宇宙射线的试验中发现了反电子. 这次试验中他让宇宙射线穿过了一个带铅板的 Wilson 云室.

尽管这个提议优美地解决了负能问题,但它把对单个相对论性粒子的描述变成多粒子系统, 其中真空态包含无穷多数量的负电粒子. 只有在场论的框架中, 才有一个对 Dirac 方程的合理的处理方法, 并且负电子是被当成一个粒子而不是电子的空缺.

2.2 Lorentz 群

很难直接看出从 Dirac 方程导出的 Dirac γ 矩阵的物理意义, 其实它与 Lorentz 群的表示密切相关. Lorentz 群是作用在时空坐标上的线性变换的集合

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{2-159}$$

使得固有时

$$\tau^2 = (x^0)^2 - (\boldsymbol{x})^2 = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} = x^2 \tag{2-160}$$

是一个不变量. 这就要求变换矩阵 $\Lambda^\mu\nu$ 满足赝正交条件

$$\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \tag{2-161}$$

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{2-162}$$

例如, 对于 x 方向的 Lorentz 变换, 有

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2-163}$$

2.2.1 生成元

我们要讨论 Lorentz 群的结构, 可以从无穷小变换着手. 对于无穷小的转动, Lorentz 变换可以写成

$$\Lambda^\mu_\alpha = g^\mu_\alpha + \epsilon^\mu_\alpha\ , \quad |\varepsilon^\mu_\alpha| \ll 1 \tag{2-164}$$

如前所述, 赝正交条件意味着 $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$. 例如, x 方向的 Lorentz 伪转动, 对于 $\beta \ll 1$ 有

$$\Lambda^\mu_\nu \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2-165}$$

因此 $\varepsilon^1_0 = -\beta$, 与 x 方向的无穷小 Lorentz 伪转动相关联. 同样地, $\varepsilon^2_0, \varepsilon^3_0$ 是 y 和 z 方向的伪转动.

为了寻找 Lorentz 群的生成元, 考虑一个关于 x^μ 的任意函数 $f(x^\mu)$. 在无穷小的 Lorentz 变换下, f 的改变为

$$\begin{aligned} f(x^\mu) \to f(x'^\mu) &= f(x^\mu + \varepsilon^\mu_\alpha x^\alpha) \approx f(x^\mu) + \varepsilon_{\alpha\beta} x^\beta \partial^\alpha f + \cdots \\ &= f(x^\mu) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}[x^\beta \partial^\alpha - x^\alpha \partial^\beta] f(x) + \cdots \end{aligned}$$

这里利用了 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 的反对称性质.

引入一个算符 $M_{\mu\nu}$ 来表示这种变换

$$f(x') = f(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}f(x) + \cdots \tag{2-166}$$

可得

$$M^{\alpha\beta} = -\mathrm{i}(x^\alpha\partial^\beta - x^\beta\partial^\alpha) \tag{2-167}$$

$M_{\mu\nu}$ 称为 Lorentz 群作用到坐标函数的生成元. 对于 $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, 可得

$$M^{12} = -\mathrm{i}\left(x^1\partial^2 - x^2\partial^1\right), \quad M^{23} = -\mathrm{i}\left(x^2\partial^3 - x^3\partial^2\right), \quad M^{31} = -\mathrm{i}\left(x^3\partial^1 - x^1\partial^3\right) \tag{2-168}$$

这很显然就是角动量算符.

利用方程 (2-167) 给出的生成元, 可以直接计算彼此的对易子

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] = -\mathrm{i}\{g_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}M_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\delta}M_{\beta\gamma}\} \tag{2-169}$$

这就是 Lorentz Lie 代数.

定义

$$M_{ij} = \epsilon_{ijk}J_k, \quad M_{oi} = K_i \tag{2-170}$$

其中, J_k 表示通常的转动算符, 而 K_i 则表示 Lorentz 伪转动算符. 可以求解 J_i 得到

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk} \tag{2-171}$$

就可以计算 J_i' 之间的对易关系

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}[M_{kl}, M_{mn}] \\
&= (-\mathrm{i})\left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}(g_{lm}M_{kn} - g_{km}M_{ln} - g_{ln}M_{km} + g_{kn}M_{lm}) \qquad (2\text{-}172) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 (-\mathrm{i})\left[-\epsilon_{ikl}\varepsilon_{jln}M_{kn} + \epsilon_{ikl}\varepsilon_{jkn}M_{ln} + \epsilon_{ikl}\varepsilon_{jml}M_{km} - \epsilon_{ikl}\varepsilon_{jmk}M_{lm}\right]
\end{aligned} \tag{2-173}$$

利用恒等式

$$\epsilon_{abc}\varepsilon_{alm} = \delta_{bl}\delta_{cm} - \delta_{bm}\delta_{cl} \tag{2-174}$$

得到

$$[J_i, J_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k \tag{2-175}$$

因此可以认为 J_i 和角动量算符是等价的.

同样地, 可以推导出

$$[K_i, K_j] = -\mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}K_k \tag{2-176}$$

式 (2-175) 和式 (2-176) 为 Lorentz Lie 代数的另一种形式.

为了化简 Lorentz 代数, 可以定义下列组合

$$A_i = \frac{1}{2}(J_i + \mathrm{i}K_i), \quad B_i = \frac{1}{2}(J_i - \mathrm{i}K_i) \tag{2-177}$$

由此可以直接得到下面的对易关系

$$[A_i, A_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}A_k, \quad [B_i, B_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}B_k, \quad [A_i, B_j] = 0 \tag{2-178}$$

例如,

$$\begin{aligned}[A_1, A_2] &= \frac{1}{4}[J_1 + \mathrm{i}K_1, J_2 + \mathrm{i}K_2] = \frac{1}{4}\left([J_1, J_2] + \mathrm{i}[J_1, K_2] + \mathrm{i}[K_1, J_2] + \mathrm{i}^2[K_1, K_2]\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{i}J_3 + \mathrm{i}^2K_3 + \mathrm{i}^2K_3 - \mathrm{i}^3J_3\right) = \frac{1}{2}\mathrm{i}\left(J_3 + \mathrm{i}K_3\right) = \mathrm{i}A_3\end{aligned}$$

这表示 Lorentz 代数可以分解为互不相关的两个 $SU(2)$ 代数. 它的表示就是两个 $SU(2)$ 代数的张量积. 因此, 可以用指标 (j_1, j_2) 来标记, 犹如在 $(2j_1+1)$ 维表示 A_i 代数独立变换以及在 $(2j_2+1)$ 维 B_i 代数下独立变换的不可约表示.

2.2.2 简单表示

(a) $(1/2, 0)$ 表示 χ_a.

从表示的指标, 该 2 分量具有如下性质

$$A_i\chi_a = \left(\frac{\sigma_i}{2}\right)_{ab}\chi_b \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}(J_i + \mathrm{i}K_i)\chi_a = \left(\frac{\sigma_i}{2}\right)_{ab}\chi_b \tag{2-179}$$

$$B_i\chi_a = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}(J_i - \mathrm{i}K_i)\chi_a = 0 \tag{2-180}$$

结合这些关系得到

$$\boldsymbol{J}\chi = \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\chi, \quad \boldsymbol{K}\chi = -\mathrm{i}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\chi \tag{2-181}$$

(b) $(0, 1/2)$ 表示 η_a.

同样地, 可以得到

$$A_i\eta_a = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(J_i + \mathrm{i}K_i)\eta_a = 0 \tag{2-182}$$

$$B_i\eta_a = (\frac{\sigma_i}{2})_{ab} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}(J_i - \mathrm{i}K_i)\eta_a = (\frac{\sigma_i}{2})_{ab}\eta_b \tag{2-183}$$

$$\boldsymbol{J}\eta = \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\eta, \quad \boldsymbol{K}\eta = \mathrm{i}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\eta \tag{2-184}$$

如果把这两个表示放在一起来定义一个四分量的 ψ,

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{2-185}$$

可得当 Lorentz 群的生成元作用到其上时就是

$$\boldsymbol{J}\psi = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \end{pmatrix}\psi, \quad \boldsymbol{K}\psi = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \end{pmatrix}\psi \tag{2-186}$$

ψ 就是我们之前学过的四分量的 Dirac 波函数, 只是 γ 换用不同的表示罢了. 这在下面将会看到. 我们将证明这些变换就是讨论 Dirac 方程在洛伦兹变换下的变换性质时得到的式 (2-138). 在手征表示 (式 (2-117), 式 (2-119), 式 (2-120)) 中 Dirac 矩阵为

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{2-187}$$

在这种情况下可以直接得到

$$\gamma_5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2-188}$$

这意味着对于这个四分量的场 $\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix}$, χ 是右旋的而 η 是左旋的. 在这个表象中, 非常容易检验如下关系

$$\sigma_{0i} = \mathrm{i}\gamma_0\gamma_1 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^i & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\sigma^i \end{pmatrix} \tag{2-189}$$

$$\sigma_{ij} = \mathrm{i}\gamma_i\gamma_j = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} = \epsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \tag{2-190}$$

Dirac 场在 Lorentz 变换下

$$\psi'(x') = S\psi = exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{4}\sigma_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu}\right\} = exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{4}(2\sigma_{0i}\varepsilon^{0i} + \sigma_{ij}\varepsilon^{ij})\right\} \tag{2-191}$$

令$\varepsilon^{0i} = \beta^i$, $\varepsilon^{ij} = \varepsilon^{ijk}\theta^k$

$$\sigma_{ij}\epsilon^{ij} = \varepsilon^{ijk}\theta^k\epsilon_{ijl}\begin{pmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_l \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta} \end{pmatrix} \tag{2-192}$$

$$\sigma_{0i}\varepsilon^{0i} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\beta} & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \tag{2-193}$$

$$\Rightarrow -\frac{\mathrm{i}}{4}(2\sigma_{0i}\varepsilon^{0i} + \sigma_{ij}\varepsilon^{ij}) = \frac{-\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta} - \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\beta} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta} + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \tag{2-194}$$

更确切地说, 是

$$\psi'(x') = S\psi = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{4}\sigma_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu}\right\}\psi = \exp\left[\frac{-\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta} - \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\beta} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta} + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}\right]\psi \tag{2-195}$$

如果用生成元来表示 Lorentz 变换

$$L = \exp(-\mathrm{i}M_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu}) \tag{2-196}$$

可得到对于生成元 $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$, 则

$$L = \exp\left[(-\mathrm{i})\left(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)\right] \tag{2-197}$$

从方程 (2-195) 可以看出, 这里的 $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$ 为如下形式

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{2-198}$$

这和方程 (2-186) 是一样的. 这证明了满足 Dirac 方程的波函数就是 Lorentz 群下 $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 的一个表示而已. 此外, 当把右旋分量视为 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 表示时, 也就是把左旋分量视为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 表示. 从群论的角度来看, 右旋分量 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 和左旋分量 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 有各自独立的表示, 但左旋与右旋可以用宇称变换连接起来, 因此如果要求宇称对称不变, 左旋和右旋就必须一同出现. 当不要求宇称对称时, 可以只用左旋或右旋的分量, 如中微子的情况, 可以用两个分量的旋量来描述.

另一种选择是用 ψ_{R} 与其复共轭 ψ_{R}^* (有时打点表示它的基) 来替代 ψ_{R} 与 ψ_{L}. 因为

$$\boldsymbol{J}\psi_{\mathrm{R}} = \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\psi_{\mathrm{R}}, \quad \boldsymbol{K}\psi_{\mathrm{R}} = -\mathrm{i}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\psi_{\mathrm{R}} \tag{2-199}$$

得到它的复共轭为

$$\boldsymbol{J}\psi_{\mathrm{R}}^* = \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2}\right)\psi_{\mathrm{R}}^*, \quad \boldsymbol{K}\psi_{\mathrm{R}}^* = \mathrm{i}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2}\right)\psi_{\mathrm{R}}^* \tag{2-200}$$

也许用其他符号来标记 ψ_R^* 更为清晰

$$\boldsymbol{J}\chi=\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2}\right)\chi, \quad \boldsymbol{K}\chi=\mathrm{i}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2}\right)\chi \tag{2-201}$$

可得

$$\boldsymbol{A}\chi=\frac{1}{2}(\boldsymbol{J}+\mathrm{i}\boldsymbol{K})\chi=0, \quad \boldsymbol{B}\chi=\frac{1}{2}(\boldsymbol{J}-\mathrm{i}\boldsymbol{K})\chi=\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2}\right)\chi \tag{2-202}$$

所以 χ 实际上属于不可约表示 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

(c) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 表示 $V_{\alpha\beta}(2\times 2$ 厄米矩阵).

对 $V_{\alpha\beta}$ 有

$$A_i V_{\alpha\beta}=\left(\frac{\sigma_i}{2}\right)_{\alpha\gamma} V_{\gamma\beta} \implies \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}+\mathrm{i}\boldsymbol{K})V_{\alpha\beta}=\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)_{\alpha\gamma} V_{\gamma\beta} \tag{2-203}$$

$$B_i V_{\alpha\beta}=-V_{\alpha\gamma}\left(\frac{\sigma_i}{2}\right)_{\gamma\beta} \implies \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}-\mathrm{i}\boldsymbol{K})V_{\alpha\beta}=-V_{\alpha\gamma}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \tag{2-204}$$

以及

$$(\boldsymbol{J})V=\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)V-V\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right), \quad (\boldsymbol{K})V=\frac{1}{\mathrm{i}}\left[\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)V+V\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\right] \tag{2-205}$$

将 V 写成 Pauli 矩阵的组合

$$V=x^0+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{2-206}$$

可以得到

$$(\boldsymbol{J})x^0=0, \quad J_i x_k=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}x_j, \quad K_i x_0=-\mathrm{i}x_i, \quad K_i x_j=-\mathrm{i}\delta_{ij}x_0 \tag{2-207}$$

这正是我们期望的时空坐标变换. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 表示 $V_{\alpha\beta}$ 是 2×2 的厄米矩阵.

2.3 附录: $\boldsymbol{SU}(2)$ 对称性

研究对称性最有用的工具是群论, 其中最简单也最实用的例子是三维旋转群 ——$O(3)$, 或二维的特殊幺正群 ——$SU(2)$ 群. 我们首先简要地介绍一下在高能物理中经常会用到的群论知识, 顺便也给出群论中的有关术语. 然后我们就来研究 $SU(2)$ 群的表示以及它们和旋转群 $O(3)$ 表示之间的联系. 对群论的基本概念不太熟悉的同学可以参考书后关于群论的附录.

2.3.1 $\boldsymbol{SU}(\mathbf{2})$群

行列式为 1 的 2×2 的幺正矩阵构成 $SU(2)$ 群. 一般而言, $n\times n$ 幺正矩阵 $\boldsymbol{U}$ 可以被写成如下形式

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{H}}, \quad \boldsymbol{H}: n\times n \text{ 的厄米矩阵} \tag{2-208}$$

由等式

$$\det \boldsymbol{U} = \mathrm{e}^{\mathrm{itr}\boldsymbol{H}} \tag{2-209}$$

可得

$$\det \boldsymbol{U} = 1 \Rightarrow \mathrm{tr}\boldsymbol{H} = 0 \tag{2-210}$$

因此 $n\times n$ 的幺正矩阵 $\boldsymbol{U}$ 可以用 $n\times n$ 的无迹厄米矩阵写成指数形式.

我们注意到 Pauli 矩阵

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2-211}$$

是一组完备的 2×2 的无迹厄米矩阵. 我们可以用它们来描述 $SU(2)$ 矩阵. 定义 $J_i = \dfrac{\tau_i}{2}$, 可以得到如下对易关系

$$[J_1, J_2] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}J_k \tag{2-212}$$

其中, ε_{ijk} 是全反对称的 Levi-Civita 符合, $\varepsilon_{123} = 1$. 这就是 $SU(2)$ 对称性的 **Lie 代数**. 这和量子力学中的角动量对易关系完全相同.

$SU(2)$ 代数的不可约表示

我们现在来研究一下 $SU(2)$ 代数的表示, 即找到一组矩阵, 满足式 (2-212) 给出的对易关系. 定义总角动量算符为

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_2^3 \tag{2-213}$$

可以证明

$$[J^2, J_i] = 0, \quad i = 1,2,3 \tag{2-214}$$

因此 J^2 算符与这个代数中的所有生成元都对易, 它被称为 **Casimir 算符**. 另外, 再定义

$$J_\pm \equiv J_1 \pm \mathrm{i}J_2 \tag{2-215}$$

于是有

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_3^2 \quad \text{和} \quad [J_+, J_-] = 2J_3 \tag{2-216}$$

为方便起见, 将不可约表示的基选为 J^2 和 J_3 的共同本征态

$$J^2|\lambda,m\rangle=\lambda|\lambda,m\rangle,\quad \lambda_3|\lambda,m\rangle=m|\lambda,m\rangle \tag{2-217}$$

由对易关系

$$[J_+,J_3]=-J_+ \tag{2-218}$$

可以得到

$$(J_+J_3-J_3J_+)|\lambda,m\rangle=-J_+|\lambda,m\rangle \tag{2-219}$$

即

$$J_3(J_+|\lambda,m\rangle)=(m+1)(J_+|\lambda,m\rangle) \tag{2-220}$$

因此, J_+ 可以将本征值从 m 增加到 $m+1$, 被称为上升算符. 同理, J_- 是下降算符, 将 J_3 的本征值从 m 减为 $m-1$:

$$J_3(J_-|\lambda,m\rangle)=(m-1)(J_-|\lambda,m\rangle) \tag{2-221}$$

因为

$$J^2\geqslant J_3^2,\quad \lambda-m^2\geqslant 0 \tag{2-222}$$

所以 m 是有上界和下界的. 设 m 的最大值为 j, 那么

$$J_+|\lambda,j\rangle=0 \tag{2-223}$$

上式两边同乘以 J_- 后得到

$$0=J_-J_+|\lambda,j\rangle=(J^2-J_3^2-J_3)|\lambda,j\rangle=(\lambda-j^2-j)|\lambda,j\rangle \tag{2-224}$$

这意味着

$$\lambda=j(j+1) \tag{2-225}$$

同理, 设 m 的最小值为 j', 可以得到

$$J_-|\lambda,j'\rangle=0,\quad \lambda=j'(j'-1) \tag{2-226}$$

结合这两个结果得到

$$j(j+1)=j'(j'-1) \tag{2-227}$$

上式的解为

$$j'=-j,\quad j'=j+1 \tag{2-228}$$

由于第二个解不符合 j 是 m 的最大值的假设, 所以选择第一个解, 得到

$$j-j'=2j=\text{整数} \tag{2-229}$$

因此 j 必须是整数或半整数. 下面, 我们开始用 j, m 来表示本征态.

定义归一化系数 $C_{\pm}(j,m)$ 为

$$J_{\pm}|j,m\rangle = C_{\pm}(j,m)|j,m\pm 1\rangle \tag{2-230}$$

由归一化条件

$$\langle j,m|j,m'\rangle = \delta_{mm'} \tag{2-231}$$

可得

$$\langle j,m|J_-J_+|j,m\rangle = |C_+(j,m)|^2 \tag{2-232}$$

注意到, 上式左边

$$\langle j,m|J_-J_+|j,m\rangle = \langle j,m|(J^2 - J_3^2 - J_3)|j,m\rangle = j(j+1) - m^2 - m \tag{2-233}$$

所以

$$C_+(j,m) = \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \tag{2-234}$$

同样地,

$$C_-(j,m) = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \tag{2-235}$$

总结: 不可约表示中的本征态 $|j,m\rangle$ 的性质如下:

$$\begin{gathered} J_3|j,m\rangle = m|j,m\rangle, \quad J_{\pm}|j,m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|j,m\pm 1\rangle, \\ J^2|j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle \end{gathered} \tag{2-236}$$

其中, $|j,m\rangle(m=-j,-j+1,\cdots,j)$ 是 $SU(2)$ 群不可约表示的基. 根据上面这些关系式, 就可以构造出表示矩阵. 我们将通过下面这些例子来加以说明.

例 2-1 $j=1/2, \quad m=\pm 1/2.$

根据式 (2-236) 给出的本征态的性质可得

$$J_3\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle = \pm\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle \tag{2-237}$$

$$J_+\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = 0, \quad J_+\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \quad J_-\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \quad J_-\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = 0 \tag{2-238}$$

如果将本征态写成列矩阵的形式

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2-239}$$

那么 J_s' 也可以写成矩阵的形式

$$J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2-240}$$

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(J_+ - J_-) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \tag{2-241}$$

可以看到, 它们其实就是 Pauli 矩阵, 只是多了一个系数 $\frac{1}{2}$.

例 2-2 $j = 1, \quad m = -1, 0, 1.$

同样地, 将本征态表示为

$$|1,1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1,0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1,-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2-242}$$

根据

$$J_3 |1,\pm 1\rangle = \pm |1,\pm 1\rangle, \quad J_3 |1,0\rangle = 0 \tag{2-243}$$

得到

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2-244}$$

根据

$$J_+ |1,1\rangle = 0, \quad J_+ |1,0\rangle = \sqrt{2}\,|1,1\rangle, \quad J_+ |1,-1\rangle = \sqrt{2}\,|1,0\rangle \tag{2-245}$$

可得

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2-246}$$

以及

$$J_- = (J_+)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2-247}$$

那么

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(J_+ - J_-) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \tag{2-248}$$

如果将生成元写成作用在坐标的函数上的形式

$$J_1=-\mathrm{i}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right),\quad J_2=-\mathrm{i}\left(x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right),\quad J_3=-\mathrm{i}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \tag{2-249}$$

直接作用在坐标 x_1, x_2, x_3 上, 可以得到

$$J_3x_3=0,\quad J_3x_1=\mathrm{i}x_2,\quad J_3x_2=-\mathrm{i}x_1 \tag{2-250}$$

于是有

$$J_3\left(x_1+\mathrm{i}x_2\right)=\left(x_1+\mathrm{i}x_2\right),\quad J_3\left(x_1-\mathrm{i}x_2\right)=-\left(x_1-\mathrm{i}x_2\right) \tag{2-251}$$

同样地, 还有

$$J_1\left(x_1+\mathrm{i}x_2\right)=-x_3,\quad J_1\left(x_1-\mathrm{i}x_2\right)=x_3 \tag{2-252}$$

对比 J_1, J_2, J_3 的矩阵表示, 可以看到标准表示的基是

$$x_+=-\frac{x_1+\mathrm{i}x_2}{\sqrt{2}},\quad x_0=x_3,\quad x_-=\frac{x_1-\mathrm{i}x_2}{\sqrt{2}} \tag{2-253}$$

总结:

(a) 生成元中只有 J_3 是对角化的 ——$SU(2)$ 是秩为 1 的群;

(b) 不可约表示用参数 j 来标记, 表示的维数是 $2j+1$;

(c) 不可约表示的基是 $|j,m\rangle(m=j,j-1,\cdots,-j)$, 表示矩阵可由下面的公式得到

$$J_3|j,m\rangle=m|j,m\rangle,\quad J_\pm|j,m\rangle=\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|j,m\pm 1\rangle \tag{2-254}$$

直乘表示

在 $SU\,(2)$ 群的物理应用中, 需要处理它的直乘表示 (product representation). 例如, 当有两个自旋 1/2 的粒子时, 我们就会想要知道它们波函数乘积的总自旋 J. 在这种简单的情况下, 我们知道答案是 $J=0$ 或 1. 现在我们要用群论的方法来研究这个问题. 用 r_1 和 r_2 表示第一个粒子自旋向上和向下的态, 用 s_1 和 s_2 表示第二个粒子自旋向上和向下的态. 在 $SU\,(2)$ 矩阵的作用下, 它们作如下变换

$$r_i'=U\left(\boldsymbol{\epsilon}\right)_{ij}r_j,\quad s_k'=U\left(\boldsymbol{\epsilon}\right)_{kl}s_l \tag{2-255}$$

其中

$$U\left(\boldsymbol{\epsilon}\right)=\exp\left(\mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{J}\right),\quad \boldsymbol{J}=\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \tag{2-256}$$

于是乘积的变换规则是

$$(r_i' s_k') = U(\boldsymbol{\epsilon})_{ij} U(\boldsymbol{\epsilon})_{kl} (r_j s_l) = D(\boldsymbol{\epsilon})_{ik,jl} (r_j s_l) \tag{2-257}$$

其中

$$D(\boldsymbol{\epsilon})_{ik,jl} = U(\boldsymbol{\epsilon})_{ij} U(\boldsymbol{\epsilon})_{kl} \tag{2-258}$$

通常, $D(\boldsymbol{\epsilon})$ 都是可约的. 为了得到它会分解成何种不可约表示, 直接考虑生成元的作用会更简单. 取 $\varepsilon_i \ll 1$,

$$r_i' \simeq (1 + \mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{J})_{ij} r_j = \left(1 + \mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{J}^{(1)}\right)_{ij} r_j \tag{2-259}$$

$$s_k' \simeq (1 + \mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{J})_{kl} s_l = \left(1 + \mathrm{i}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{J}^{(2)}\right)_{kl} s_l \tag{2-260}$$

其中, $\boldsymbol{J}^{(1)}$ 只作用在 r_i 上而不影响 s_k; $\boldsymbol{J}^{(2)}$ 只作用在 s_k 上而不影响 r_i. 定义总角动量算符为

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^{(1)} + \boldsymbol{J}^{(2)} \tag{2-261}$$

现在我们换到更熟悉的符号上.

例 2-3　两个自旋 1/2 的粒子.

令 α_i 表示第 i 个粒子自旋向上的态, β_i 表示第 i 个粒子自旋向下的态. 那么二粒子态就有这样的四种组合: $\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\beta_2, \beta_1\alpha_2, \beta_1\beta_2$. 先来看 J_3 值最大的态

$$J_3 |\alpha_1\alpha_2\rangle = J_3^{(1)} |\alpha_1\alpha_2\rangle + J_3^{(2)} |\alpha_1\alpha_2\rangle = |\alpha_1\alpha_2\rangle \tag{2-262}$$

为了得到总的角动量, 有

$$(\boldsymbol{J})^2 = \left(\boldsymbol{J}^{(1)}\right)^2 + \left(\boldsymbol{J}^{(2)}\right)^2 + \left[\left(J_+^{(1)} J_-^{(2)} + J_-^{(1)} J_+^{(2)}\right) + 2 J_3^{(1)} J_3^{(2)}\right] \tag{2-263}$$

将它作用在态上得到

$$(\boldsymbol{J})^2 |\alpha_1\alpha_2\rangle = 2 |\alpha_1\alpha_2\rangle \tag{2-264}$$

这说明 $|\alpha_1\alpha_2\rangle$ 是 $J = 1$, $J_3 = 1$ 的态, 即

$$|\alpha_1\alpha_2\rangle = |1, 1\rangle \tag{2-265}$$

接着可以用下降算符 $J_- = J_-^{(1)} + J_-^{(2)}$ 得到不可约表示 $J = 1$ 中的其他态.

$$J_- |1, 1\rangle = J_- |\alpha_1\alpha_2\rangle = \left(J_-^{(1)} + J_-^{(2)}\right) |\alpha_1\alpha_2\rangle = |\alpha_1\beta_2\rangle + |\beta_1\alpha_2\rangle \tag{2-266}$$

另外, 根据公式 (2-236) 可以得到

$$J_- |1, 1\rangle = \sqrt{2} |1, 0\rangle \tag{2-267}$$

因此

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha_1\beta_2\rangle + |\beta_1\alpha_2\rangle\right) \tag{2-268}$$

显然

$$|1,-1\rangle = |\beta_1\beta_2\rangle \tag{2-269}$$

剩下的一个 $J=0$ 的态可以由它与式 (2-268) 给出的态 $|1,0\rangle$ 的正交关系得到

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha_1\beta_2\rangle - |\beta_1\alpha_2\rangle\right) \tag{2-270}$$

注意, 在这个例子中, 总角动量 $J=1$ 的态关于"$1\leftrightarrow 2$"交换是对称的, 而 $J=0$ 的态是反对称的.

一般来说, 直乘表示 $|j_1,m_1\rangle \times |j_2,m_2\rangle$ 可以组合成总角动量 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}^{(1)}+\boldsymbol{J}^{(2)}$ 的本征态 $|J,M\rangle$:

$$|J,M\rangle = \sum_{m_1,m_2} |j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2\rangle\,\langle j_1,m_1,j_2,m_2|JM\rangle \tag{2-271}$$

系数 $\langle j_1,m_1,j_2,m_2|J,M\rangle$ 就称为 **Clebsch-Gordon 系数**. 对于上面这个例子 (式 (2-265) 和式 (2-268)), 则有

$$\left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1,1\right\rangle = 1, \quad \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|1,0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},\cdots \tag{2-272}$$

注意, J_3 量子数是可加的

$$M = m_1 + m_2 \tag{2-273}$$

例 2-4 自旋 1/2 和自旋为 1 的粒子.

将自旋 1/2 和自旋为 1 的态表示为

$$S=\frac{1}{2}: \quad \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \quad \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \tag{2-274}$$

$$S=1: \quad |1,1\rangle, \quad |1,0\rangle, \quad |1,-1\rangle \tag{2-275}$$

显然总自旋可以是 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$. S_z 的最大取值为 $\frac{3}{2}$, 这个态是

$$\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = |1,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \tag{2-276}$$

将下降算符 $J_- = J_-^{(1)} + J_-^{(2)}$ 作用在上式两边可得

$$\sqrt{3}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{2}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + |1,1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \tag{2-277}$$

因此

$$\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \tag{2-278}$$

再作用一次下降算符 J_- 得到

$$2\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2}\,|1,-1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{2}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \tag{2-279}$$

即

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,-1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \tag{2-280}$$

而最后一个态显然就是

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle=|1,-1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \tag{2-281}$$

至于总自旋为 $S=1/2$ 的态, 可以根据正交关系, 求得与态 $\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ 垂直的组合

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \tag{2-282}$$

使用下降算符, 得到

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{2}\,|1,-1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \tag{2-283}$$

即

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,-1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \tag{2-284}$$

这样我们就完成了对这些自旋乘积的约化.

将直乘表示分解为不可约表示的过程可总结如下:

(a) 首先考虑 J_3 取值最大的态, 显然它也是 J 最大的本征态之一;

(b) 使用下降算符 $J_-=J_-^{(1)}+J_-^{(2)}$ 得到同一个不可约表示中的其他态;

(c) 找到与 $|J_m,J_m-1\rangle$ 正交的乘积组合. 这里的 J_m 是 J 在乘积中的最大值. 得到的这个正交的态应当是 $|J_m-1,J_m-1\rangle$, 然后再用下降算符得到其他 $J=J_m-1$ 的态;

(d) 重复上面的步骤, 直到 $J=|j_1-j_2|$.

$\boldsymbol{SU}(2)$ 的复共轭表示

对于群 G 的任意表示 $D(A)$:

$$D(A)D(B) = D(AB), \quad \forall A, B \in G \tag{2-285}$$

它们的复共轭矩阵也都构成一个表示

$$D^*(A)D^*(B) = D^*(AB) \tag{2-286}$$

将 $SU(2)$ 写成指数函数的形式, $U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}}$. 这里 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ 是 Pauli 矩阵, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是实参数. 我们将会看到, 可以找到一个幺正矩阵 S, 使得

$$SU^*S^\dagger = U \tag{2-287}$$

也就是说, U 和它的复共轭 U^* 之间差一个相似变换, 即它们是等价的表示. 为了证明这一点, 我们首先用 τ 矩阵写出式 (2-287)

$$S\exp[-\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}^*\cdot\boldsymbol{\alpha}]S^\dagger = \exp[\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}] \tag{2-288}$$

它等于

$$\exp\left[-\mathrm{i}\left(S\boldsymbol{\tau}^*S^\dagger\right)\cdot\boldsymbol{\alpha}\right] = \exp[\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}] \tag{2-289}$$

这里用到了等式

$$S\mathrm{e}^{A}S^\dagger = \mathrm{e}^{SAS^\dagger} \tag{2-290}$$

因此得到

$$\left(S\boldsymbol{\tau}^*S^\dagger\right) = -\boldsymbol{\tau} \tag{2-291}$$

写出分量式

$$\left(S\tau_1S^\dagger\right) = -\tau_1, \quad \left(S\tau_2S^\dagger\right) = \tau_2, \quad \left(S\tau_3S^\dagger\right) = -\tau_3 \tag{2-292}$$

$S = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\tau_2$ 满足上面的关系, 这里 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ 是一个任意相位. 为方便起见, 就选

$$S = \mathrm{i}\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2-293}$$

这样, 我们就证明了 $SU(2)$ 的 2 维表示等价于它的复共轭表示.

作为这个性质的一个简单应用, 我们考虑 $SU(2)$ 的一个二重态

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \tag{2-294}$$

在 $SU(2)$ 变换下有

$$q \to q' = \exp\left[\mathrm{i}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right] q \tag{2-295}$$

对上式取复共轭后得到

$$q^* \to q^{*\prime} = \exp\left[-\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}^* \cdot \boldsymbol{\alpha}\right] q^* = S^\dagger \exp\left[\mathrm{i}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right] (Sq^*) \tag{2-296}$$

即

$$(Sq^{*\prime}) = \exp\left[\mathrm{i}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right] (Sq^*) \tag{2-297}$$

这说明

$$Sq^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* \\ d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^* \\ -u^* \end{pmatrix} \tag{2-298}$$

和 q 按相同的方式变换. 为了清楚起见, 我们把这两个二重态表示为

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad q' = \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^* \\ -u^* \end{pmatrix} \tag{2-299}$$

假设我们要结合这两个二重态以构成 $SU(2)$ 的不可约表示. 根据例 2-3 的讨论, 有

$$|1,1\rangle = q_1 q_1' = ud^* \tag{2-300}$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q_1 q_2' + q_2 q_1'\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-u\ u^* + dd^*) \tag{2-301}$$

$$|1,-1\rangle = q_2 q_2' = d\left(-u^*\right) \tag{2-302}$$

注意, 根据

$$\left(S\tau_3 S^\dagger\right) = -\tau_3 \tag{2-303}$$

可以看到在任何表示中, T_3 量子数在进入复共轭表示时会变号. 而由上文中所见, $SU(2)$ 的所有表示都有这样一个性质: T_3 量子数的取值成对出现, 且符号相反. 这就是为什么在 $SU(2)$ 中复共轭表示等价于原始的表示. 这对于 $SU(3)$ 群则不再成立, 而且一般而言, 共轭表示并不等价于原始表示.

2.3.2 三维空间旋转群 $O(3)$

在经典力学和量子力学中, 我们都用线性算符来描述旋转. 算符作用在空间坐标 (x, y, z) 上, 由一个 3×3 的矩阵来表示

$$x_i \longrightarrow x_i' = R_{ij} x_j, \quad 其中\ RR^{\mathrm{T}} = R^{\mathrm{T}} R = 1 \tag{2-304}$$

例如, 绕 z 轴旋转 θ 角的表示矩阵为

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2-305}$$

所有的这些旋转的集合构成 3 维空间的旋转群 ——$O(3)$ 群. 为了研究 $O(3)$ 群的结构, 考虑无穷小旋转变换, 并将表示矩阵写成如下形式

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad |\varepsilon_{ij}| \ll 1 \tag{2-306}$$

则

$$x_i' = x_i + \varepsilon_{ij} x_j \tag{2-307}$$

R 的正交性要求 ε_{ij} 是反对称的, 即

$$\delta_{jk} = R_{ij}R_{ik} = (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij})(\delta_{ik} + \varepsilon_{ik}) \implies \varepsilon_{jk} = -\varepsilon_{kj} \tag{2-308}$$

例如, 绕 z 轴的无穷小旋转为

$$R_z(\theta) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \theta \tag{2-309}$$

即

$$x_1' = x_1 + \theta x_2, \quad x_2' = x_2 - \theta x_1, \quad x_3' = x_3 \tag{2-310}$$

对于 x_i 的任意函数 $f(x_i)$, 在无穷小变换 $R_z(\theta)$ 的作用下, f 的变换为

$$f(x) \to f(x_1', x_2', x_3') \approx f(x_1, x_2, x_3) - \theta\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)f + \cdots \tag{2-311}$$

引入算符 L_3 来表示这个变换

$$f(x') = f(x) - \mathrm{i}\theta L_3 f(x) + \cdots \tag{2-312}$$

则有

$$L_3 = -\mathrm{i}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \tag{2-313}$$

同样地, 对于另外的两个变换, 有

$$L_1 = -\mathrm{i}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad L_2 = -\mathrm{i}\left(x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \tag{2-314}$$

显然, 这些算符会使二次型 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 保持不变. 很容易证明这些算符满足

$$[L_i, L_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}L_k \tag{2-315}$$

可以看到, 这些对易关系和式 (2-212) 给出的 $SU(2)$ 代数的对易关系完全相同.

$SU(2)$ 和 $O(3)$ 群的关系

尽管旋转群 $O(3)$ 和幺正群 $SU(2)$ 是两个不同的群, 但是它们的代数结构却完全一样. 现在我们就具体来说明它们之间的关系.

前面曾说过, $SU(2)$ 群的生成元是 Pauli 矩阵

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2-316}$$

假设 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ 是 R_3 (3 维坐标空间) 中的任意矢量. 定义一个 2×2 的矩阵 h 为

$$h = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} z & x - \mathrm{i}y \\ x + \mathrm{i}y & -z \end{pmatrix} \tag{2-317}$$

这个矩阵有如下的性质:

(1) $\boldsymbol{h}^{\dagger} = \boldsymbol{h}$;

(2) $\mathrm{tr}\ \boldsymbol{h} = 0$;

(3) $\det \boldsymbol{h} = -(x^2 + y^2 + z^2)$.

设 $\boldsymbol{U}$ 是一个 2×2 的幺正矩阵, 且 $\det \boldsymbol{U} = 1$. 考查如下变换

$$\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{h}' = \boldsymbol{U}\boldsymbol{h}\boldsymbol{U}^{\dagger} \tag{2-318}$$

变换后的新矩阵 $\boldsymbol{h}'$ 将和 $\boldsymbol{h}$ 有相同的性质:

(1) $\boldsymbol{h}'^{\dagger} = \boldsymbol{h}'$;

(2) $\mathrm{tr}\ \boldsymbol{h}' = 0$;

(3) $\det \boldsymbol{h}' = \det \boldsymbol{h}$.

$\boldsymbol{h}'$ 的前两个性质意味着它也可以用 Pauli 矩阵来展开

$$h' = \boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{\tau}', \quad \boldsymbol{r}' = (x', y', z') \tag{2-319}$$

那么再结合第 3 个性质则有

$$\det \boldsymbol{h}' = \det \boldsymbol{h} \quad \Rightarrow \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{2-320}$$

因此 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 之间的关系应该是旋转变换. 这说明任意的 2×2 幺正矩阵 $\boldsymbol{U}$ 都能产生一个 R_3 中的旋转. 这就给出了 $SU(2)$ 群与 $O(3)$ 群的一个对应关系. 注意, U 和 $(-U)$ 对应的是相同的旋转变换, 所以这是二对一的对应.

例 2-5　$\boldsymbol{U}$ 是对角矩阵.

那么 $\boldsymbol{U}$ 的形式为

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2} \end{pmatrix} \tag{2-321}$$

2×2 的厄米矩阵 $\boldsymbol{h}'$ 则是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}'=\boldsymbol{UhU}^\dagger &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & x-\mathrm{i}y \\ x+\mathrm{i}y & -z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z & (x-\mathrm{i}y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \\ (x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} & -z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z' & x'-\mathrm{i}y' \\ x'+\mathrm{i}y' & -z'\end{pmatrix}\end{aligned}$$

新的坐标 x',y',z' 和旧的坐标 x,y,z 的关系是

$$\begin{aligned} x' &= \cos\alpha x+\sin\alpha y \\ y' &= -\sin\alpha x+\cos\alpha y \\ z' &= z \end{aligned}$$

显然, 这相当于绕 z 轴顺时针旋转 α 角.

例 2-6　$\boldsymbol{U}$ 是实矩阵.

可以将它写成

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2)\end{pmatrix} \tag{2-322}$$

变换后的 $\boldsymbol{h}'$ 是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}'=\boldsymbol{UhU}^\dagger &= \begin{pmatrix}\cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & x-\mathrm{i}y \\ x+\mathrm{i}y & -z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\beta/2) & \sin(\beta/2) \\ -\sin(\beta/2) & \cos(\beta/2)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z\cos\beta-x\sin\beta & x\cos\beta-\mathrm{i}y+z\sin\beta \\ \mathrm{i}y+x\cos\beta+z\sin\beta & x\sin\beta-z\cos\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z' & x'-\mathrm{i}y' \\ x'+\mathrm{i}y' & -z'\end{pmatrix}\end{aligned}$$

坐标之间的关系是

$$\begin{cases} x'=x\cos\beta+z\sin\beta \\ y'=y \\ z'=-x\sin\beta+z\cos\beta \end{cases}$$

这是绕 y 轴旋转 β 角.

注意, 在上面的例子中, 产生 3 维空间旋转的 2×2 幺正矩阵中所包含的角度都是以 $\alpha/2$, $\beta/2$ 这样的半角形式出现的. 这意味着, 如果将角度增加 2π, 2×2 的幺正矩阵会变号, 而它所产生的三维空间的旋转则是相同的. 这明显地显示了 $SU(2)$ 到 $O(3)$ 之间的 $2\to 1$ 的同态映射.

2.3.3 旋转群与量子力学

现在我们来讨论一下群论对于量子力学研究中具有旋转对称性的问题的用处.

三维空间中的旋转可以被表示成对坐标的线性变换, 即

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z)=(r_1,r_2,r_3),\quad r_i\to r_i'=R_{ij}r_j,\quad RR^{\mathrm{T}}=1=R^{\mathrm{T}}R \tag{2-323}$$

考虑坐标的一个任意函数, $f(\boldsymbol{r})=f(x,y,z)$. 在旋转变换下, f 变成

$$f(r_i)\to f'(r_i)=f(R_{ij}r_j) \tag{2-324}$$

如果 $f=f'$, 就说 f 是旋转不变的. 比如, $f(r_i)=f(r)(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 就是旋转不变的.

在量子力学中, 通过一个作用在态 $|\psi\rangle$ 上的幺正算符 U 来实现对坐标的旋转变换, 即

$$|\psi\rangle\to|\psi'\rangle=U|\psi\rangle,\quad O\to O'=UOU^\dagger \tag{2-325}$$

这使得

$$\langle\psi'|O'|\psi'\rangle=\langle\psi|O|\psi\rangle \tag{2-326}$$

也就是说, 物理量 $\langle\psi|O|\psi\rangle$ 与坐标轴的方向无关.

对于算符来说, 如果 $O'=O$, 就说 O 在旋转变换下保持不变

$$O=UOU^\dagger\quad \text{或}\ UO=OU\implies[O,U]=0 \tag{2-327}$$

因此算符 O 的旋转不变性意味着它与变换算符 U 对易. 将 U 用旋转变换的无穷小生成元 $\boldsymbol{L}$ 来表示, 则有

$$U=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L}} \tag{2-328}$$

这意味着

$$[L_i,O]=0,\quad i=1,2,3 \tag{2-329}$$

如果 O 是哈密顿量 H, 那么

$$[L_i,H]=0 \tag{2-330}$$

设 $|\psi\rangle$ 是 H 本征值为 E 的本征态

$$H|\psi\rangle=E|\psi\rangle \tag{2-331}$$

那么 H 的旋转不变性意味着

$$(L_iH-HL_i)|\psi\rangle=0\quad\Rightarrow\quad H(L_i|\psi\rangle)=E(L_i|\psi\rangle) \tag{2-332}$$

即 $|\psi\rangle$ 和 $L_i|\psi\rangle$ 是简并的. 例如, 设 $|\psi\rangle = |j,m\rangle$ 是角动量本征态, 如果 $|\psi\rangle$ 是 H 的本征态, 则 $L_\pm|\psi\rangle$ 也是它的本征态. 这意味着对于给定的 l, 由哈密顿量的旋转不变性带来的简并度是 $(2l+1)$. 以氢原子的哈密顿量为例,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2-333}$$

它在旋转变换下保持不变, 即

$$[L_i, H] = 0 \tag{2-334}$$

那么 $l=0$ (s 态) 就是非简并的, $l=1$ (p 态) 的简并度是 $2l+1=3$, $l=2$ (d 态) 的简并度则是 $2l+1=5$ 等. 因此不可约表示的维数与哈密顿量本征态的简并度之间有密切的联系. 简单说来就是, 由于对称性, 哈密顿量无法区分不可约表示内的不同态.

第 3 章　正则量子化

本章讨论前面提到的三种最常见场的量子化, 它们分别满足 Klein-Gordon 方程、Dirac 方程和 Maxwell 方程. 因为它们的解是平面波 e^{ipx}, 所以常把它们称为自由场. 场量子化的基本构想是把场视为无穷多粒子数的极限情况. 为此, 我们先来回顾一下非相对论性量子力学中的正则量子化方法.

非相对论量子力学中的量子化条件为对易关系

$$[q_i, p_j] = \mathrm{i}\delta_{ij} \tag{3-1}$$

其中, q_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为广义坐标, p_j 为相应的正则动量

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{3-2}$$

其中, L 为 拉氏量. 哈密顿量为

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \tag{3-3}$$

系统的动力学由 Schrödinger 方程来描述

$$H\Psi = \mathrm{i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{3-4}$$

波函数 $\Psi(t)$ 给出了物理态的时间演化, 而算符 p_i, q_i 是不依赖于时间的. 这就是 Schrödinger 绘景. 此外, 我们还可以采用 Heisenberg 绘景, 其中算符 $p_i(t), q_j(t)$ 而非态矢 Ψ 随时间变化. Heisenberg 绘景和 Schrödinger 绘景是等价的, 它们之间可以通过一个幺正变换联系起来. 两种绘景中的波函数之间的关系为

$$\Psi_{\mathrm{H}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\Psi_{\mathrm{S}}(t) \tag{3-5}$$

算符之间的关系为

$$O_{\mathrm{H}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O_{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \tag{3-6}$$

其中, $\Psi_{\mathrm{S}}, O_{\mathrm{S}}$ 和 $\Psi_{\mathrm{H}}, O_{\mathrm{H}}$ 分别是 Schrödinger 绘景和 Heisenberg 绘景中的波函数与算符. 在 Heisenberg 绘景下对易关系变为

$$[q_i(t), p_j(t)] = \mathrm{i}\delta_{ij} \tag{3-7}$$

可以看到, 式 (3-1) 中的对易关系在幺正变换下保持不变.

场量子化是对上述理论的推广. 在相对论性量子场论中, 由于狭义相对论的要求, 空间坐标 $\boldsymbol{x}$ 和时间坐标 t 地位平等, 都是场算符 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ 的参数, 所以采用 Heisenberg 绘景更加方便. 在场论中我们将 $q_i(t)$ 推广为 $\phi(\boldsymbol{x},t)$. 广义坐标 $q_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$ 描述的系统的自由度是有限的. 当取 $n\to\infty$ 时, 可以得到无穷多个自由度, 但依然是离散和可数的. 而在场论中, 场 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ 是由连续变量 $\boldsymbol{x},t$ 来描述的. 为了过渡到场, 可以将三维空间划分成许多体积元 ΔV_i, 定义第 i 个坐标 $\phi_i(t)$ 为

$$\phi_i(t)=\frac{1}{\Delta V_i}\int_{\Delta V_i}\mathrm{d}^3x\ \phi(\boldsymbol{x},t) \tag{3-8}$$

这样就得到了一系列离散可数的坐标 $\phi_i(t)$. 这显然是对 q_i 的推广. 同样地, $\partial_0\phi_i(t)$ 是 $\partial\phi(\boldsymbol{x},t)/\partial t$ 在第 i 个体积元上的平均. 把拉氏量 L 写成拉氏量密度 $\mathcal{L}$ 的积分

$$L=\int\mathrm{d}^3x\ \mathcal{L}=\sum_i\Delta V_i\mathcal{L}_i(\phi_i,\partial_0\phi_i) \tag{3-9}$$

并且用 $\mathcal{L}_i$ 表示第 i 个体积元上 $\mathcal{L}$ 的平均值. 则共轭动量可以定义为

$$p_i(t)=\frac{\partial L}{\partial(\partial_0\phi_i(t))}=\Delta V_i\frac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial(\partial_0\phi_i(t))}\equiv\Delta V_i\pi_i(t) \tag{3-10}$$

哈密顿量定义为

$$H=\sum_i p_i(t)\partial_0\phi_i(t)-L=\sum_i\Delta V_i(\pi_i\partial_0\phi_i(t)-\mathcal{L}_i)\longrightarrow\int\mathrm{d}^3x\mathcal{H} \tag{3-11}$$

其中, 哈密顿密度为

$$\mathcal{H}=\pi_i\partial_0\phi_i(t)-\mathcal{L} \tag{3-12}$$

在进行量子化时, 要求正则对易关系

$$[\phi_i(t),p_j(t)]=\mathrm{i}\delta_{ij},\quad[\phi_i(t),\phi_j(t)]=0,\quad[p_i(t),p_j(t)]=0 \tag{3-13}$$

用 π_i 表达为

$$[\phi_i(t),\ \pi_j(t)]=\mathrm{i}\frac{\delta_{ij}}{\Delta V_i} \tag{3-14}$$

过渡到连续情况下的正则对易关系则是

$$[\phi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x}',t)]=\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\quad[\phi(\boldsymbol{x},t),\phi(\boldsymbol{x}',t)]=0,\quad[\pi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x}',t)]=0 \tag{3-15}$$

其中, Dirac δ 函数为 $\Delta V_i\to 0$ 时 $\dfrac{\delta_{ij}}{\Delta V_i}$ 的极限, 它的性质为

$$\int\mathrm{d}^3x'\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')f(\boldsymbol{x}')=f(\boldsymbol{x}) \tag{3-16}$$

同样地, 有

$$\pi(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \tag{3-17}$$

3.1 标 量 场

现在讨论标量场的量子化. 考虑一个标量场 ϕ, 拉氏量密度取如下形式

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi)-\frac{\mu^2}{2}\phi^2 \tag{3-18}$$

由 Euler-Lagrange 方程

$$\partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0 \tag{3-19}$$

可以得到它满足 Klein-Gordon 方程

$$(\partial^\mu\partial_\mu+\mu^2)\phi=0 \tag{3-20}$$

下面对它进行量子化.

3.1.1 正则量子化

在进入本节前, 请读者参阅本章附录, 复习量子力学中的一维谐振子, 务必理解产生和湮没算符的意义及其运算, 这是场论里最常用到的工具.

首先计算共轭动量

$$\pi(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}=\partial_0\phi \tag{3-21}$$

哈密顿量密度为

$$\mathcal{H}=\pi\partial_0\phi-\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[\left(\partial^0\phi\right)^2+(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2\right]+\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 \tag{3-22}$$

由对易关系

$$[\phi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x},t)]=\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\quad [\phi(\boldsymbol{x},t),\phi(\boldsymbol{y},t)]=0,\quad [\pi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{y},t)]=0 \tag{3-23}$$

可得对易子

$$[H,\phi(\boldsymbol{x},t)]=\int\mathrm{d}^3y\,[\mathcal{H},\phi(\boldsymbol{x},t)]=-\mathrm{i}\partial_0\phi \tag{3-24}$$

正如预料的一样, 哈密顿量生成时间平移变换.

模态展开 (mode expansion)

现在讨论此哈密顿量的物理意义. 我们注意到式 (3-22) 中的哈密顿量和简谐振子的哈密顿量非常相似. Klein-Gordon 方程的通解为如下形式

$$\exp\left(\mathrm{i}k_0 t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\right),\quad k_0^2=\boldsymbol{k}^2+\mu^2 \tag{3-25}$$

可以用它来展开场算符

$$\phi\left(\boldsymbol{x},t\right)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{\left(2\pi\right)^3 2w_k}}\left[a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+a^\dagger(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right],\quad k_0=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2} \tag{3-26}$$

这里假设 ϕ 是厄米算符. 展开系数 $a(\boldsymbol{k})$ 和 $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ 是不依赖于时间的算符. 注意到第二项 $a^\dagger(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}$ 对应着 Klein-Gordon 方程的负能解, 我们将看到它就是产生算符, 而第一项 $a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ 为湮没算符. 为了利用式 (3-23) 中的对易关系, 把 $a(k)$ 和 $a^\dagger(k)$ 用 ϕ 和 $\partial_0\phi$ 表示. ϕ 对时间的微分为

$$\partial_0\phi\left(\boldsymbol{x},t\right)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{\left(2\pi\right)^3 2w_k}}\left(-\mathrm{i}k_0\right)\left[a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}-a^\dagger(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right],\quad k_0=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}=w_k \tag{3-27}$$

乘上 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\cdot x}$, 然后对 x 积分 (实质上类似反傅里叶变换), 得到

$$\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}\mathrm{d}^3x\left(\partial_0\phi-\mathrm{i}k_0\phi\right)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{\left(2\pi\right)^3 2w_k}}\left(-2\mathrm{i}k_0\right)\left(2\pi\right)^3\delta^3\left(k-k'\right)a\left(k\right) \tag{3-28}$$

由此得到

$$a(k)=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x\frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\right)^3 2w_k}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\partial_0\phi-\left(\partial_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right)\right] \tag{3-29}$$

如果引入如下符号

$$f\overleftrightarrow{\partial_0}g\equiv f\partial_0 g-\left(\partial_0 f\right)g \tag{3-30}$$

则上式可以简化为

$$a(k)=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}}{\sqrt{\left(2\pi\right)^3 2w_k}}\overleftrightarrow{\partial_0}\phi\left(x\right) \tag{3-31}$$

取厄米共轭可得

$$a^\dagger(k)=-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}}{\sqrt{\left(2\pi\right)^3 2w_k}}\overleftrightarrow{\partial_0}\phi\left(x\right) \tag{3-32}$$

$a(k)$ 和 $a^\dagger(k)$ 实质上是动量空间的场算符. 可以直接计算它们的对易关系得到

$$\left[a(\boldsymbol{k}),\ a^\dagger(\boldsymbol{k}')\right]=\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),\quad\left[a(\boldsymbol{k}),\ a(\boldsymbol{k}')\right]=0,\quad\left[a^\dagger(\boldsymbol{k}),\ a^\dagger(\boldsymbol{k}')\right]=0 \tag{3-33}$$

第一个对易关系的推导如下

$$
\begin{aligned}
\left[a(\boldsymbol{k}),\ a^{\dagger}(\boldsymbol{k}')\right] &= \int \frac{\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x'}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2w_k\,(2\pi)^3\,2w_{k'}}}\left[\partial_0\phi\,(x)-\mathrm{i}k_0\phi\,(x)\,,\ \partial_0\phi\,(x')-\mathrm{i}k_0'\phi\,(x')\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x'}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2w_k\,(2\pi)^3\,2w_{k'}}}\left(\mathrm{i}k_0'\,(-\mathrm{i})-\mathrm{i}k_0\mathrm{i}\right)\delta^3\,(x-x') \\
&= \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')
\end{aligned}
$$

其他的关系都可以通过类似的过程证明. 可以看到, 这些对易关系和简谐振子的情况非常类似.

有了上面这些关系, 可以将哈密顿量写成

$$
\begin{aligned}
H &= \int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left[\dot{\phi}^2+|\boldsymbol{\nabla}\phi|^2+\mu^2\phi^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3k\ w_k\left[a^{\dagger}(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})+a(\boldsymbol{k})a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\right] = \int \mathrm{d}^3k\ \mathcal{H}_k
\end{aligned}
$$

其中

$$
\mathcal{H}_k = \frac{w_k}{2}\left[a^{\dagger}\,(k)\,a\,(k)+a\,(k)\,a^{\dagger}\,(k)\right] \tag{3-34}
$$

因此 H 是频率为 w_k 的谐振子的线性组合. 可以计算对易子

$$
\left[H,\ a^{\dagger}(k)\right] = \int \mathrm{d}^3k'\ w_{k'}\left[a^{\dagger}(k')a(k'),\ a^{\dagger}(k)\right] = w_k a^{\dagger}(k) \tag{3-35}
$$

对 H 的本征值为 E 的本征态

$$
H|E\rangle = E|E\rangle \tag{3-36}
$$

将对易关系作用到该本征态可以得到

$$
\left(Ha^{\dagger}(k)-a^{\dagger}(k)H\right)|E\rangle = w_k\ a^{\dagger}(k)|E\rangle \tag{3-37}
$$

所以

$$
Ha^{\dagger}(k)|E\rangle = (E+w_k)\,a^{\dagger}(k)|E\rangle \tag{3-38}
$$

因此算符 $a^{\dagger}(k)$ 的作用是将能量本征值增加 w_k, 通常称为**产生算符**(creation operation). 同样地

$$
[H,\ a(k)] = \int \mathrm{d}^3k'\ w_{k'}\ \left[a^{\dagger}(k')a(k'),\ a(k)\right] = -w_k\ a(k) \tag{3-39}
$$

因此 $a(k)$ 的作用是使得能量本征值减少 w_k, 通常称为**湮没算符**(annihilation operator). 根据 Noether 定理, 从空间平移对称性可得动量算符的形式为

$$P_i = \int \mathrm{d}^3x\, T_{0i} = \int \mathrm{d}^3x\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\phi\right)}\partial_i\phi = \int \mathrm{d}^3x\, \pi\partial_i\phi \tag{3-40}$$

对易子为

$$\begin{aligned}[P_i, \phi(\boldsymbol{x}, t)] &= \int \mathrm{d}^3y\, [\pi(\boldsymbol{y}, t)\partial_i\phi(\boldsymbol{y}, t),\ \phi(\boldsymbol{x}, t)] \\ &= \int \mathrm{d}^3y\ \partial_i\phi(\boldsymbol{y}, t)\,(-\mathrm{i})\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = -\mathrm{i}\partial_i\phi(\boldsymbol{x}, t)\end{aligned}$$

也就是说动量算符生成空间平移变换. 用产生算符和湮没算符来表示, 动量算符可以写为

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3k\boldsymbol{k}\left[a^\dagger(k)\,a(k) + a(k)\,a^\dagger(k)\right] = \int \mathrm{d}^3k\boldsymbol{p}_k \tag{3-41}$$

其中

$$\boldsymbol{p}_k = \frac{\boldsymbol{k}}{2}\left[a^\dagger(k)\,a(k) + a(k)\,a^\dagger(k)\right] \tag{3-42}$$

在通常的谐振子中有如下关系

$$aa^\dagger = a^\dagger a + 1 \tag{3-43}$$

而场论中与之对应的关系则是

$$a(k)\,a^\dagger(k) = a^\dagger(k)\,a(k) + \delta^3(0) \tag{3-44}$$

我们需要对 $\delta^3(0)$ 作合理的解释: 从动量空间的表象

$$\delta^3(\boldsymbol{k}) = \int \frac{\mathrm{d}^3x}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{3-45}$$

看到当 $\boldsymbol{k} \longrightarrow 0$ 时有

$$\delta^3(0) = (2\pi)^{-3}\int \mathrm{d}^3x = \frac{V}{(2\pi)^3} \tag{3-46}$$

其中, V 是系统的总体积. 因此

$$H = \int \mathrm{d}^3k\ w_k\left[a^\dagger(k)\,a(k) + \frac{V(2\pi)^{-3}}{2}\right] = \int \mathrm{d}^3k\ w_k a^\dagger(k)\,a(k) + V\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{w_k}{2} \tag{3-47}$$

最后一项只是一个常数 (尽管是无限的), 是真空的零点能量. 因为实验只能测量能量差值, 所以这个常数可以扔掉. 为了系统地达到这个目的, 引入**正规乘积**(normal ordering).

正规乘积

正规乘积是把所有的产生算符 $a^\dagger(k)$ 移到湮没算符 $a(k)$ 的左边, 用符号 $:f\left(a,a^\dagger\right):$ 来表示, 其中 $f\left(a,a^\dagger\right)$ 表示 $a,a^\dagger$ 的某个函数. 例如,

$$
\begin{aligned}
:a(k)a^\dagger(k):&=a^\dagger(k)a(k)\\
:a^\dagger(k)a(k):&=a^\dagger(k)a(k)
\end{aligned}
$$

定义真空 (能量最低态) 为

$$
a(k)|0\rangle=0,\quad \forall\,\boldsymbol{k}\implies\langle 0|a^\dagger(k)=0 \tag{3-48}
$$

这样可以得到一个一般性的结果

$$
\langle 0|:f\left(a,a^\dagger\right):|0\rangle=0 \tag{3-49}
$$

因此, 如果用正规乘积来定义哈密顿量, 就可以去掉常数项

$$
H=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3k\ w_k:\left[a^\dagger(k)a(k)+a(k)a^\dagger(k)\right]:=\int \mathrm{d}^3k\ w_k\ a^\dagger(k)a(k) \tag{3-50}
$$

同样地

$$
\boldsymbol{P}=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3k\ \boldsymbol{p}_k:\left[a^\dagger(k)a(k)+a(k)a^\dagger(k)\right]:=\int \mathrm{d}^3k\ \boldsymbol{p}_k\ a^\dagger(k)a(k) \tag{3-51}
$$

可以很容易地得到 H 和 $\boldsymbol{P}$ 的本征态和本征值. 例如, 如下定义的态

$$
|\boldsymbol{k}\rangle=\sqrt{(2\pi)^3\,2w_k}a^\dagger(k)|0\rangle \tag{3-52}
$$

有下列性质

$$
\begin{aligned}
&H|\boldsymbol{k}\rangle=w_k|\boldsymbol{k}\rangle\\
&\boldsymbol{P}|\boldsymbol{k}\rangle=\boldsymbol{k}|\boldsymbol{k}\rangle,\quad w_k=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}
\end{aligned}
$$

可以把这个态解释为单粒子态, 因为它有确定的能量 w_k 和动量 $\boldsymbol{k}$, 并且在壳 (on shell), 即满足如下关系

$$
w_k^2-\boldsymbol{k}^2=\mu^2 \tag{3-53}
$$

同样地, 可以定义双粒子态如下

$$
|\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2\rangle=\sqrt{(2\pi)^3\,2w_{k_1}}\sqrt{(2\pi)^3\,2w_{k_2}}a^\dagger(\boldsymbol{k}_1)a^\dagger(\boldsymbol{k}_2)|0\rangle \tag{3-54}
$$

可以推广到多粒子态

$$|\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n\rangle=\sqrt{(2\pi)^3\,2w_{k_1}}\cdots\sqrt{(2\pi)^3\,2w_{k_n}}a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_1)\cdots a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_2)|0\rangle \tag{3-55}$$

从式 (3-26) 可以看到场算符 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ 是产生算符和湮没算符的线性组合, 组合的系数为平面波. 因此态 $\phi(x)\,|0\rangle$ 是不同动量单粒子态的组合

$$\phi(x)\,|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{(2\pi)^3\,2w_k}}a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\,2w_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}|k\rangle \tag{3-56}$$

而且如果将它投影到四动量为 k 的态上, 可以得到

$$\langle k|\,\phi(x)\,|0\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} \tag{3-57}$$

与非相对论性量子力学比较, 可以说场算符 $\phi(x)$ 能从真空中产生一个位于 x 的单粒子态 $|x\rangle$, 它在动量表象的波函数就是平面波, 也是 Klein-Gordon 波动方程的解.

Bose 统计 (Bose statistics)

任意一个物理态都可以用有固定粒子数的态来展开

$$|\varPhi\rangle=\left[C_0|0\rangle+\sum_{n=1}^{\infty}\int\mathrm{d}^3k_1\mathrm{d}^3k_2\cdots\mathrm{d}^3k_nC_n\left(k_1,k_2,\cdots,k_n\right)a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_1)a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_2)\cdots a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_n)|0\rangle\right] \tag{3-58}$$

其中, $C_n\left(k_1,k_2,\cdots,k_n\right)$ 可以解释为动量空间的波函数. 因为两个产生算符彼此对易

$$[a^{\dagger}\left(k_i\right),a^{\dagger}\left(k_j\right)]=0 \tag{3-59}$$

可以看到

$$C_n\left(k_1,\cdots,k_i,\cdots,k_j,\cdots,k_n\right)=C_n\left(k_1,\cdots,k_j,\cdots,k_i,\cdots,k_n\right) \tag{3-60}$$

这说明波函数 $C_n\left(k_1,k_2,\cdots,k_n\right)$ 满足 **Bose 统计**, 也就是说交换任意两个粒子 $k_i\leftrightarrow k_j$, 波函数 $C_n\left(k_1,k_2,\cdots,k_n\right)$ 保持不变.

3.1.2 场的对易子及因果性

我们在非相对论量子力学中学过, 由对易关系

$$[q,p]=\mathrm{i} \tag{3-61}$$

会得到 Heisenberg 不确定关系

$$\Delta q\cdot\Delta p\geqslant 1 \tag{3-62}$$

这说明位置和动量的测量会相互影响. 现在我们来研究相对论性量子场论里相应的情况, 这里狭义相对论起着关键的作用.

利用模态展开, 先计算标量场乘积的真空期望值, 它是一个粒子从 y 传播到 x 的概率幅

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}}\left\langle 0\left|(a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})a^+(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'y}\right|0\right\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2\omega_k}\,\delta^3(k-k')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx+\mathrm{i}k'y} = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}\end{aligned}$$

则对易子的真空期望值为

$$\mathrm{i}\Delta(x-y) \equiv [\phi(x),\phi(y)] = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)}\right] \tag{3-63}$$

首先考虑类空间隔 $(x-y)^2<0$. 可以选择一个参考系, 使得 $x-y$ 仅有空间分量, 即 $x-y=(0,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$. 因此

$$\langle 0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\right] = 0 \tag{3-64}$$

其中, 在第二项把 $\boldsymbol{k}$ 改成了 $-\boldsymbol{k}$ 就得二项抵消. 这意味着, 如果两个标量场 $\phi(x),\phi(y)$ 之间是类空间隔 $(x-y)^2<0$, 那么对它们的测量不会彼此干扰. 这个结果是合理的, 因为狭义相对论说任何信号的传递速度都不可能超过光速. 因而如果 $(x-y)^2<0$, 测量 $\phi(x)$ 不会影响 $\phi(y)$ 的测量结果.

3.1.3　含对称性的标量场

假设有两个标量场, 其拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_1)(\partial_\mu\phi_1) - \frac{\mu_1^2}{2}\phi_1^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_2)(\partial_\mu\phi_2) - \frac{\mu_2^2}{2}\phi_2^2 \tag{3-65}$$

这里的 ϕ_1,ϕ_2 都是厄米的场算符. Euler-Lagrange 方程为

$$\partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} = 0,\quad i=1,2 \tag{3-66}$$

分别给出了两个 Klein-Gordon 方程

$$\partial^\mu\partial_\mu\phi_1 + \mu_1^2\phi_1 = 0,\quad \partial^\mu\partial_\mu\phi_2 + \mu_2^2\phi_2 = 0 \tag{3-67}$$

很显然在这个理论的量子化中, ϕ_1,ϕ_2 有各自的产生和湮没算符, 即 $a_1^\dagger(\boldsymbol{k}_1),a_2^\dagger(\boldsymbol{k}_2)$ 和 $a_1(\boldsymbol{k}_1),a_2(\boldsymbol{k}_2)$. 但是当质量相等时, $\mu_1^2=\mu_2^2$, 拉氏密度有如下形式

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial^\mu\phi_1)(\partial_\mu\phi_1) + (\partial^\mu\phi_2)(\partial_\mu\phi_2)] - \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2) \tag{3-68}$$

它在 ϕ_1,ϕ_2 空间的转动下不变

$$\begin{cases} \phi_1 \longrightarrow \phi_1' = \cos\theta\ \phi_1 + \sin\theta\ \phi_2 \\ \phi_2 \longrightarrow \phi_2' = -\sin\theta\ \phi_1 + \cos\theta\ \phi_2 \end{cases} \tag{3-69}$$

这里 θ 和时空坐标 x^μ 无关, 这样的对称性通常称为整体的 $O(2)$ 对称性. 为了从 Noether 定理得到该对称性的守恒流, 考虑无穷小转动

$$\delta\phi_1 = \phi_1' - \phi_1 = \theta\phi_2, \quad \delta\phi_2 = \phi_2' - \phi_2 = -\theta\phi_1 \tag{3-70}$$

则守恒流为

$$j_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu\phi_i\right)}\delta\phi_i = [\left(\partial_\mu\phi_1\right)\phi_2 - \left(\partial_\mu\phi_2\right)\phi_1]\theta \tag{3-71}$$

可以把两个场结合为一个复标量场

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) \tag{3-72}$$

则拉氏密度变成

$$\mathcal{L} = \left(\partial^\mu\phi^\dagger\right)\left(\partial_\mu\phi\right) - \mu^2\phi^\dagger\phi \tag{3-73}$$

对称变换就成了相位的变换

$$\phi \longrightarrow \phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\phi \tag{3-74}$$

这通常称为整体的 $U(1)$ 变换. Noether 流为

$$j_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu\phi\right)}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu\phi^\dagger\right)}\delta\phi^\dagger = \mathrm{i}[(\partial^\mu\phi^\dagger)\phi - \left(\partial^\mu\phi\right)\phi^\dagger]\theta \tag{3-75}$$

在这个简单的例子中我们证明了 $O(2)$ 对称性和 $U(1)$ 对称性是等价的.

将这个复标量场作模态展开得到

$$\phi\left(\boldsymbol{x},t\right) = \int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{\left(2\pi\right)^3 2w_k}}\left[a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + b^\dagger(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right], \quad k_0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \mu^2} \tag{3-76}$$

注意到因为 ϕ 是复场, 第一项和第二项不再互为复共轭. 不难看出

$$a(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(\boldsymbol{k}) + \mathrm{i}a_2(\boldsymbol{k})], \quad b(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(\boldsymbol{k}) - \mathrm{i}a_2(\boldsymbol{k})] \tag{3-77}$$

以及

$$\left[a(\boldsymbol{k}),\ a^\dagger(\boldsymbol{k}')\right] = \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \left[b(\boldsymbol{k}),\ b^\dagger(\boldsymbol{k}')\right] = \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \left[a(\boldsymbol{k}),\ b(\boldsymbol{k}')\right] = 0, \cdots \tag{3-78}$$

因此 $a(\boldsymbol{k}), b(\boldsymbol{k})$ 对应两种不同粒子的湮没算符. 可以证明

$$H=\int \mathrm{d}^3k\,\omega_k[a^\dagger(k)a(k)+b^\dagger(k)b(k)] \tag{3-79}$$

$$\boldsymbol{P}_k=\int \mathrm{d}^3k\,\boldsymbol{p}_k[a^\dagger(k)a(k)+b^\dagger(k)b(k)] \tag{3-80}$$

还可以得到守恒荷为

$$Q=\int \mathrm{d}^3x\,j_0=\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left[(\partial_0\phi^\dagger)\phi-(\partial_0\phi)\,\phi^\dagger\right]=\int \mathrm{d}^3k\,\left[a^\dagger(k)a(k)-b^\dagger(k)b(k)\right] \tag{3-81}$$

因而 a 粒子和 b 粒子带的是相反的“荷”.

3.2　费　米　场

可以用类似于对标量场量子化的方法对费米场进行量子化. 从自由粒子的 Dirac 方程出发

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\,\psi=0 \quad 或 \quad \overline{\psi}\left(-\mathrm{i}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial_\mu}-m\right)=0 \tag{3-82}$$

拉氏密度的形式为

$$\mathcal{L}=\overline{\psi}_\alpha\,(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)_{\alpha\beta}\,\psi_\beta \tag{3-83}$$

从而

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\gamma^\dagger}=\left(\gamma^0\right)_{\gamma\alpha}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)_{\alpha\beta}\,\psi_\beta,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi_\gamma^\dagger\right)}=0 \tag{3-84}$$

对应的 Euler-Lagrange 方程给出

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)_{\alpha\beta}\,\psi_\beta=0 \tag{3-85}$$

共轭动量密度为

$$\pi_\alpha=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\psi_\alpha\right)}=\mathrm{i}\psi_\alpha^\dagger \tag{3-86}$$

如果采用标量场的对易关系, 将得出费米子满足 Bose 统计这个错误的结果, 因为费米场应该满足反对称的关系.

3.2.1　反对易关系

为了得到反对称特性, 需假设费米场中作量子化时要用下面的反对易关系来替代对易关系

$$\{\pi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\psi_\beta(\boldsymbol{y},t)\}=\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{\alpha\beta},\quad \{\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\psi_\beta(\boldsymbol{y},t)\}=0,\quad \{\pi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\pi_\beta(\boldsymbol{y},t)\}=0 \tag{3-87}$$

哈密顿密度为

$$\mathcal{H}=\sum_{\alpha}\pi_{\alpha}\partial_{0}\psi_{\alpha}-\mathcal{L}=\mathrm{i}\psi^{\dagger}\partial_{0}\psi-\overline{\psi}\left(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi=\overline{\psi}(\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}+m)\psi \tag{3-88}$$

模态展开

用 Dirac 方程的经典解展开费米场

$$\psi\left(\boldsymbol{x},t\right)=\sum_{s}\int\frac{\mathrm{d}^{3}p}{\sqrt{\left(2\pi\right)^{3}2E_{p}}}\left[b\left(p,s\right)u\left(p,s\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+d^{\dagger}\left(p,s\right)v\left(p,s\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right]$$

$$\psi^{\dagger}\left(\boldsymbol{x},t\right)=\sum_{s}\int\frac{\mathrm{d}^{3}p}{\sqrt{\left(2\pi\right)^{3}2E_{p}}}\left[b^{\dagger}\left(p,s\right)u^{\dagger}\left(p,s\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+d\left(p,s\right)v^{\dagger}\left(p,s\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right]$$

这里的 $u(p,s),v(p,s)$ 是满足 Dirac 方程的旋量. 现在我们要反过来求解动量空间的场算符. 等式两边同时乘上 $u^{\dagger}\left(p',s'\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x}$, 然后对 x 积分

$$\int\mathrm{d}^{3}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x}u^{\dagger}\left(p',s'\right)\psi\left(\boldsymbol{x},t\right)=\sum_{s}\int\frac{\mathrm{d}^{3}p}{\sqrt{\left(2\pi\right)^{3}2E_{p}}}b\left(p,s\right)u^{\dagger}\left(p',s'\right)u\left(p,s\right)\left(2\pi\right)^{3}\delta^{3}\left(p-p'\right) \tag{3-89}$$

其中, 用到了

$$u^{\dagger}\left(-p,s'\right)v\left(p,s\right)=0 \tag{3-90}$$

由 Dirac 方程和它的共轭形式可得

$$\bar{u}\left(p,s'\right)\gamma^{\mu}\left(\not{p}-m\right)u\left(p,s\right)=0 \tag{3-91}$$

$$\bar{u}\left(p,s'\right)\left(\not{p}-m\right)\gamma^{\mu}u\left(p,s\right)=0 \tag{3-92}$$

两式相加得到

$$p^{\mu}\bar{u}\left(p,s'\right)u\left(p,s\right)=m\bar{u}\left(p,s'\right)\gamma^{\mu}u\left(p,s\right) \tag{3-93}$$

它的时间分量就是

$$u^{\dagger}\left(p,s'\right)u\left(p,s\right)=2p^{0}\delta_{ss'} \tag{3-94}$$

这里利用了 $\bar{u}(p,s)u(p,s')=2m\delta_{ss'}$. 利用上面得到的这个关系, 可以求出

$$b\left(p,s\right)=\int\frac{\mathrm{d}^{3}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}}{\sqrt{\left(2\pi\right)^{3}2E_{p}}}u^{\dagger}\left(p,s\right)\psi\left(\boldsymbol{x},t\right) \tag{3-95}$$

它的厄米共轭为

$$b^{\dagger}\left(p,s\right)=\int\frac{\mathrm{d}^{3}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}}{\sqrt{\left(2\pi\right)^{3}2E_{p}}}\psi^{\dagger}\left(\boldsymbol{x},t\right)u\left(p,s\right) \tag{3-96}$$

同样的计算可以得到

$$d^{\dagger}(p,s)=\int\frac{\mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2E_p}}\upsilon^{\dagger}(p,s)\,\psi(\boldsymbol{x},t)\,,\quad d(p,s)=\int\frac{\mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2E_p}}\psi^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)\,\upsilon(p,s)\tag{3-97}$$

这样就可以计算 b 和 $b^{\dagger}$ 的反对易关系为

$$\begin{aligned}\left\{b(p,s)\,,b^{\dagger}(p',s')\right\}=&\int\frac{\mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2E_p}}\int\frac{\mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot x'}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2E_{p'}}}\left\{u^{\dagger}(p,s)\,\psi(\boldsymbol{x},t)\,,\psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}',t)\,u(p',s')\right\}\\=&\int\frac{\mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2E_p}}\int\frac{\mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot x'}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2E_{p'}}}(2\pi)^3\,\delta^3(x-x')\,u^{\dagger}(p,s)\,u(p',s')\\=&\delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\end{aligned}$$

同样地,

$$\left\{d(p,s)\,,d^{\dagger}(p',s')\right\}=\delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\tag{3-98}$$

其他的反对易子都为零.

将场算符的展开式代入哈密顿量, 得到

$$\begin{aligned}H=&\int\mathrm{d}^3x\,\mathcal{H}=\int\overline{\psi}\,(\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}+m)\,\psi\,\mathrm{d}^3x=\mathrm{i}\int\psi^{\dagger}\partial_0\psi\,\mathrm{d}^3x\\=&\sum_s\int\mathrm{d}^3p\,E_p\left[b^{\dagger}(p,s)\,b(p,s)-d(p,s)\,d^{\dagger}(p,s)\right]=\sum_s\int\mathrm{d}^3p\,\mathcal{H}_{ps}\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{H}_{ps}=E_p\left[b^{\dagger}(p,s)\,b(p,s)-d(p,s)\,d^{\dagger}(p,s)\right]\tag{3-99}$$

同样地

$$\boldsymbol{P}=\sum_s\int\mathrm{d}^3p\boldsymbol{P}_{ps}\tag{3-100}$$

其中

$$\boldsymbol{P}_{ps}=\boldsymbol{p}\left[b^{\dagger}(p,s)\,b(p,s)-d(p,s)\,d^{\dagger}(p,s)\right]\tag{3-101}$$

为了确定哪一个是产生算符, 哪一个是湮没算符, 可以计算它们和 H 的对易子

$$\begin{aligned}\left[H, b^{\dagger}(p,s)\right] =& \sum_{s'}\int \mathrm{d}^3p' \left[b^{\dagger}(p',s')\, b(p',s'), b^{\dagger}(p,s)\right] E_{p'} \\ =& \int \mathrm{d}^3p' E_{p'} \sum_{s'} \Big[b^{\dagger}(p',s') \{b(p',s'), b^{\dagger}(p,s)\} \\ & - \{b^{\dagger}(p',s'), b^{\dagger}(p,s)\} b(p',s') \Big] \\ =& \, b^{\dagger}(p,s)\, E_p\end{aligned}$$

其中, 利用了恒等式

$$[AB,\ C] = A\{B,C\} - \{A,C\}B \tag{3-102}$$

这说明 $b^{\dagger}(p,s)$ 是把能量本征值增加 E_p 的算符, 因此是产生算符. 同样地

$$\left[\boldsymbol{P}, b^{\dagger}(p,s)\right] = \boldsymbol{P} b^{\dagger}(p,s) \tag{3-103}$$

$b^{\dagger}(p,s)$ 也使得动量本征值增加 $\boldsymbol{p}$. 结合这两点, 可以说 $b^{\dagger}(p,s)$ 产生了一个能量为 E_p, 动量为 $\boldsymbol{p}$ 的粒子, 并且满足关系 $E_p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$.

用同样的方法, 可以证明 $d^{\dagger}(p,s)$ 和 $b^{\dagger}(p,s)$ 一样, 也能产生一个同样质量的粒子. 在后面我们可以看到, 它们带着相反的“电荷”.

3.2.2 对称性

拉氏量

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi \tag{3-104}$$

在如下的相位变换下不变

$$\psi(x) \longrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\psi(x) \Longrightarrow \psi^{\dagger}(x) \to \psi^{\dagger}(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}, \quad \alpha\text{为实常数} \tag{3-105}$$

考虑一个无穷小变换

$$\delta\psi = \mathrm{i}\alpha\psi, \quad \delta\psi^{\dagger} = -\mathrm{i}\alpha\psi^{\dagger} \tag{3-106}$$

由 Noether 定理, 守恒流为

$$j_{\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu}\psi_{\alpha}\right)}\delta\psi_{\alpha} = -\alpha\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi \tag{3-107}$$

可以计算得守恒荷为

$$
\begin{aligned}
Q &= \int j_0(x)\,\mathrm{d}^3x = \int \mathrm{d}^3x : \psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\,\psi(\boldsymbol{x},t) \\
&:= \int \mathrm{d}^3x \sum_{ss'} \int \frac{\mathrm{d}^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3\,2E_{p'}}} : \left[b^\dagger(p',s')\,u^\dagger(p',s')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x} + d(p',s')\,v^\dagger(p',s')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot x}\right] \\
&\quad \times \int \frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{(2\pi)^3\,2E_p}} \left[b(p,s)\,u(p,s)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + \mathrm{d}^\dagger(p,s)\,v(p,s)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right] \\
&:= \sum_s \int \mathrm{d}^3p : [b^\dagger(p,s)\,b(p,s) + d(p,s)\,d^\dagger(p,s)] := \sum_s \int \mathrm{d}^3p \left[N^+(p,s) - N^-(p,s)\right]
\end{aligned}
$$

其中

$$
N^+(p,s) = b^\dagger(p,s)\,b(p,s), \quad N^-(p,s) = d^\dagger(p,s)\,d(p,s) \tag{3-108}
$$

为粒子数算符. 因此粒子和反粒子带相反的“荷”, 因为它们在 Q 的表达式中反号. 这和 $U(1)$ 对称性的复标量场的情况类似.

3.3 电 磁 场

尽管电磁场是我们最熟悉的场论, 但它的量子化却非常复杂. 从无源的 Maxwell 方程出发

$$
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{3-109}
$$

$$
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 0, \quad \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{3-110}
$$

可以引入矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ

$$
\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{3-111}
$$

来求解式 (3-109) 中的两个方程. 定义 $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$, 可以将方程 (3-111) 写成

$$
F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad 以及 \quad F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = -E^i, \quad F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\epsilon_{ijk}B_k \tag{3-112}
$$

Maxwell 方程组的另外两个方程, 也就是方程 (3-110) 可以写成

$$
\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad \mu = 0,1,2,3 \tag{3-113}
$$

例如,

$$
\mu = 0, \quad \partial_i F^{0i} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 0 \tag{3-114}
$$

$$\mu = i, \quad \partial_\nu F^{i\nu} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{3-115}$$

在自然单位制里 $c^2 = \dfrac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = 1$.

3.3.1 规范不变性

不难看出 $F^{\mu\nu}$ 在下列变换下保持不变

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \alpha, \quad \alpha = \alpha(x) \tag{3-116}$$

其中, $\alpha(x)$ 是 x 的任意函数. 这个变换通常称为**规范变换**. 这表明给定 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$, 对应的 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 的形式并不是唯一的, 改变规范函数 $\alpha(x)$ 仍然能够得到相同的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$. 这样的性质通常称为**规范不变性**.

下面将说明如果取拉氏量为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2) \tag{3-117}$$

就可以从 Euler-Lagrange 方程得到 Maxwell 方程. 为此先计算

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \tag{3-118}$$

由此可得

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \Longrightarrow \partial_\mu \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{3-119}$$

这就是 Maxwell 方程组.

共轭动量为

$$\pi_0 = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0, \quad \pi^i(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_i)} = -F^{0i} = E^i \tag{3-120}$$

可以看到矢势的时间分量 A_0 并没有与之共轭的动量, 因此它并不是一个真正的自由度. 哈密顿密度为

$$\mathcal{H} = \pi^k \dot{A}_k - \mathcal{L} = (\partial^k A^0 - \partial^0 A^k)\partial_0 A_k + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) + (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}) A_0 \tag{3-121}$$

利用 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$, 可以写出如下哈密顿密度

$$H = \int \mathrm{d}^3 x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 x (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) \tag{3-122}$$

这正是我们熟悉的经典电磁场的能量组合.

3.3.2　量子化

为了进行量子化, 先假设对易关系为

$$[\pi^i(\boldsymbol{x},t),A^j(\boldsymbol{y},t)]=-\mathrm{i}\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\cdots \tag{3-123}$$

但是这与运动方程 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=0$ 相矛盾, 因为从上式将得到

$$[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(x,t),A_j(x,t)]=-\mathrm{i}\partial_j\delta^3(x-y)\neq 0 \tag{3-124}$$

为了解决这个问题, 先把 δ 函数在动量空间写成如下形式

$$\partial_j\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}k_j \tag{3-125}$$

为了使 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}$ 的对易子等于零, 可以作如下替换

$$\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\to\delta^{\mathrm{tr}}_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right) \tag{3-126}$$

则

$$\partial_i\delta^{\mathrm{tr}}_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}(\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}k_i\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)=0 \tag{3-127}$$

因此之前非零的对易子变成了

$$[E^i(x,t),A_j(y,t)]=-\mathrm{i}\delta^{\mathrm{tr}}_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{3-128}$$

还得到

$$[E^i(x,t),\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(y,t)]=0 \tag{3-129}$$

因为 $\delta^{\mathrm{tr}}_{ij}$ 是对称的. 由于 A_0 和 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$ 与所有的算符对易, 因此它们一定是 c 数. 换句话说, A_0 以及 $\boldsymbol{A}$ 的纵向部分 ——$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$ 并不是真正的量子自由度. 可以选择下面的规范 —— 辐射规范 (radiation gauge)

$$A_0=0\ \text{且}\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{3-130}$$

在该规范下

$$\pi^i=\partial^iA^0-\partial^0A^i=-\partial^0A^i \tag{3-131}$$

$$[\partial_0A^i(\boldsymbol{x},t),A^j(\boldsymbol{y},t)]=\mathrm{i}\delta^{\mathrm{tr}}_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{3-132}$$

电磁理论量子化的困难是在于, 如何将四矢量的 4 个自由度减少为两个真正的物理自由度. 这里的辐射规范只是一种选择, 而且无法推广到非 Abel 的局域对称性.

模态展开

运动方程 $\partial_\nu F^{\mu\nu}=0$ 可以写成

$$\partial_\nu\left(\partial^\nu A^\mu-\partial^\mu A^\nu\right)=\Box A^\mu-\partial^\mu\left(\partial_v A^v\right)=0 \tag{3-133}$$

在辐射规范中, 有 $\partial_v A^v=0$, 则波动方程变为

$$\Box\,\boldsymbol{A}=0 \tag{3-134}$$

这就是零质量的 Klein-Gordon 方程, 其通解为

$$A_i(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}\sum_\lambda\epsilon_i(k,\lambda)[a(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+a^\dagger(k,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]\ ,\quad w=k_0=|\boldsymbol{k}| \tag{3-135}$$

其中, $\epsilon_i(k,\lambda)$ 对应光子的极化. 在辐射规范 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0$ 中, 电磁场只有两个独立的自由度, 并且满足

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda)=0\ ,\quad \lambda=1,2 \tag{3-136}$$

标准的选择是令

$$\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda')=\delta_{\lambda\lambda'},\quad \boldsymbol{\epsilon}(-k,1)=-\boldsymbol{\epsilon}(k,1),\quad \boldsymbol{\epsilon}(-k,2)=\boldsymbol{\epsilon}(-k,2) \tag{3-137}$$

从通解中可以解出 $a(k,\lambda)$ 和 $a^\dagger(k,\lambda)$ 为

$$a(k,\lambda)=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3x}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{A}(x)\right] \tag{3-138}$$

$$a^\dagger(k,\lambda)=-\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3x}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\,\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{A}(x)\right] \tag{3-139}$$

它们的对易关系为

$$[a(k,\lambda),a^\dagger(k',\lambda')]=\delta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),\quad [a(k,\lambda),a(k',\lambda')]=0,\quad [a^\dagger(k,\lambda),a^\dagger(k',\lambda')]=0 \tag{3-140}$$

正规乘积后的哈密顿量和动量为

$$H=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3x:(E^2+B^2):=\int\mathrm{d}^3k\ \omega\sum_\lambda a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda) \tag{3-141}$$

$$\boldsymbol{P}=\int\mathrm{d}^3x:E\times B:=\int\mathrm{d}^3k\ \boldsymbol{k}\sum_\lambda a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda) \tag{3-142}$$

再次得到了许多独立的谐振子的集合. 同样地, 真空被定义为

$$a(k,\lambda)|0\rangle=0,\quad \forall\ k,\lambda \tag{3-143}$$

而 $a^\dagger(k,\lambda)|0\rangle$ 则是四动量为 k、极化为 λ 的单光子态.

3.4　附　　录

3.4.1　简谐振子

我们回顾一下量子力学中一维简谐振子的产生、湮没算符. 这是非常重要的模型, 在场论中经常用到. 其哈密顿量为

$$H=\frac{p^2}{2}+\frac{1}{2}\omega^2x^2 \tag{3-144}$$

其中为方便起见取 $m=1$. p,x 满足对易关系

$$[x,p]=\mathrm{i} \tag{3-145}$$

定义

$$a=\sqrt{\frac{1}{2\omega}}\left(\omega x+\mathrm{i}p\right),\quad a^\dagger=\sqrt{\frac{1}{2\omega}}\left(\omega x-\mathrm{i}p\right) \tag{3-146}$$

它们的对易关系为

$$\left[a,a^\dagger\right]=\frac{1}{2\omega}\left[\omega x+\mathrm{i}p,\omega x-\mathrm{i}p\right]=1 \tag{3-147}$$

从

$$x=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a+a^\dagger\right),\quad p=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(a-a^\dagger\right) \tag{3-148}$$

得到哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2}\left[-\frac{\omega}{2}(a-a^\dagger)^2+\frac{\omega^2}{2\omega}(a+a^\dagger)^2\right]=\frac{\omega}{2}(a^\dagger a+aa^\dagger) \tag{3-149}$$

利用对易关系可以把 H 写成

$$H=\omega\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right) \tag{3-150}$$

第二项通常称为零点能. 我们可以计算 H 与 $a,a^\dagger$ 的对易子

$$[H,\ a]=-\omega a,\quad [H,\ a^\dagger]=\omega a^\dagger \tag{3-151}$$

假设有本征值为 E 的哈密顿量本征态 $|E\rangle$, 则

$$H\,|E\rangle=E\,|E\rangle \tag{3-152}$$

就可以从第二个对易关系得到

$$\left(Ha^\dagger-a^\dagger H\right)|E\rangle=\omega a^\dagger\,|E\rangle\implies H\left(a^\dagger\,|E\rangle\right)=(E+\omega)\left(a^\dagger\,|E\rangle\right) \tag{3-153}$$

因此 $a^\dagger$ 使得能量本征值上升 ω, 称为**升算符**(**产生算符**). 同样地

$$(Ha - aH)\,|E\rangle = -\omega a\,|E\rangle \implies H\,(a\,|E\rangle) = (E-\omega)\,(a\,|E\rangle) \tag{3-154}$$

即算符 a 使得能量本征值降低 ω, 称为**降算符**(**湮没算符**). 因为 H 有下限, 所以一定存在一个能量本征值最低的物理态, 即基态 $|0\rangle$, 它有如下性质

$$a\,|0\rangle = 0 \tag{3-155}$$

能量本征值为

$$H\,|0\rangle = \frac{1}{2}\omega\,|0\rangle \tag{3-156}$$

激发态通过产生算符 $a^\dagger$ 的作用与真空态 $|0\rangle$ 相关联. 例如,

$$H\,|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega\,|n\rangle\,, \quad |n\rangle = \frac{\left(a^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle \tag{3-157}$$

态 $|n\rangle$ 可以解释为包含 n 个能量为 ω 的量子的态, 所以 $N = a^\dagger a$ 就是粒子数算符.

3.4.2 $\boldsymbol{U}(1)$ 局域对称性

在基本相互作用的理论里, 局域对称性有着非常重要的作用. 这里我们将在非相对论量子力学的框架中介绍一下局域对称性的由来.

现在探讨带电粒子如何与电磁场发生相互作用. 一个在电磁场中运动的带电粒子受到洛伦兹力, 运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = e\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{3-158}$$

对应该运动方程的拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} - eA_0 \tag{3-159}$$

证明如下: 拉氏量关于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 求微分, 得到

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i + eA_i, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = e\frac{\partial A_j}{\partial x_i}v_j - e\frac{\partial A_0}{\partial x_i} \tag{3-160}$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) = m\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} + e\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} + e\frac{\partial A_i}{\partial t} \tag{3-161}$$

Euler-Lagrange 方程给出

$$m\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} + e\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} + e\frac{\partial A_i}{\partial t} = e\frac{\partial A_j}{\partial x_i}v_j - e\frac{\partial A_0}{\partial x_i} \tag{3-162}$$

另外,

$$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_i=\varepsilon_{ijk}v_jB_k=\varepsilon_{ijk}v_j\varepsilon_{klm}\partial_lA_m=v_j\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)\partial_lA_m=v_j\left(\partial_iA_j-\partial_jA_i\right) \tag{3-163}$$

因而得到

$$m\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}=-e\frac{\partial A_i}{\partial x_j}v_j-e\frac{\partial A_i}{\partial t}+e\frac{\partial A_j}{\partial x_i}v_j-e\frac{\partial A_0}{\partial x_i} \tag{3-164}$$

即

$$m\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}=e\left(\partial_iA_j-\partial_jA_i\right)v_j+e\left(-\partial_iA_0-\partial_0A_i\right)=e\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)_i \tag{3-165}$$

这是我们想要的运动方程.

由拉氏量可以定义共轭动量为

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial v_i}=mv_i+eA_i\implies v_i=\frac{1}{m}\left(p_i-eA_i\right) \tag{3-166}$$

这是一个共轭动量不等于 $m\boldsymbol{v}$ 的例子. 哈密顿量为

$$\begin{aligned}H&=p_iv_i-L=p_iv_i-\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2-e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}+eA_0\\&=\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}\right)^2+eA_0\end{aligned}$$

注意, 也可以通过对自由粒子的哈密顿量 $H=\boldsymbol{p}^2/2m$ 作如下代换

$$\boldsymbol{p}\longrightarrow\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A},\quad H\longrightarrow H-eA_0 \tag{3-167}$$

或

$$p^\mu\longrightarrow p^\mu-eA^\mu \tag{3-168}$$

直接得到电磁场中带电粒子的哈密顿量. 这通常称为**最小替换原则**(minimal substitution).

由上面得到的哈密顿量, 可以写出带电粒子在电磁场中运动的 Schrödinger 方程为

$$\left[-\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla}-\mathrm{i}e\boldsymbol{A}\right)^2+eA_0\right]\psi=\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{3-169}$$

可以看出在 Schrödinger 方程中出现的是 $\boldsymbol{A},A_0$, 而不是 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$. 因此, Schrödinger 方程对于如下的规范变换

$$A^\mu\longrightarrow A^\mu+\partial^\mu\alpha,\quad\text{或}\quad\boldsymbol{A}\longrightarrow\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\nabla}\alpha,\quad A_0\longrightarrow A_0+\partial_0\alpha \tag{3-170}$$

并不是不变的. 但是, 如果在规范变换的同时对波函数 ψ 也作一个相位变换

$$\psi\longrightarrow\psi'=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\alpha}\psi \tag{3-171}$$

就又能回到原来的 Schrödinger 方程. 下面我们来说明这一点. 定义协变微分 (covariant derivative) 为

$$\boldsymbol{D}\psi = (\boldsymbol{\partial} - \mathrm{i}e\boldsymbol{A})\,\psi \tag{3-172}$$

新场的协变微分为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}\psi' &= \left(\boldsymbol{\partial} - \mathrm{i}e\boldsymbol{A}'\right)\psi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\alpha}\left[\boldsymbol{\partial} - \mathrm{i}e\boldsymbol{\nabla}\alpha - \mathrm{i}e\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\alpha\right)\right]\psi \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\alpha}\left(\boldsymbol{D}\psi\right)\end{aligned}$$

因此协变微分 $\boldsymbol{D}\psi$ 与场 ψ 一样都变换了相同的相位. 换句话说, 协变导数 $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{\partial} - \mathrm{i}e\boldsymbol{A})$ 并没有改变它作用的波函数的变换性质. 不难看出

$$\boldsymbol{D}^2\psi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\alpha}\left(\boldsymbol{D}^2\psi\right) \tag{3-173}$$

对时间的微分有

$$D_0\psi = (\partial_0 + \mathrm{i}eA_0)\,\psi \tag{3-174}$$

以及

$$D_0\psi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\alpha}\left(\partial_0 + \mathrm{i}e\partial_0\alpha - \mathrm{i}eA_0 - \mathrm{i}e\partial_0\alpha\right)\psi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\alpha}D_0\psi \tag{3-175}$$

因此 Schrödinger 方程

$$\left[-\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla} - \mathrm{i}e\boldsymbol{A}'\right)^2 + eA_0'\right]\psi' = \mathrm{i}\frac{\partial\psi'}{\partial t} \tag{3-176}$$

变为

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\alpha}\left[-\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla} - \mathrm{i}e\boldsymbol{A}\right)^2 + eA_0\right]\psi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\alpha}\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{3-177}$$

消掉相位 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\alpha}$ 后, 就回到了原来的 Schrödinger 方程的形式. 波函数的相位变换是一个对称变换, 并且是一个局域的对称变换, 因为相位 $\alpha = \alpha(\boldsymbol{x}, t)$ 是时空坐标的函数. 相位的变换通常称为 $U(1)$ 变换, 因此我们说电磁场具有局域的 $U(1)$ 对称性. 注意, 电子与电磁场的作用仅出现在协变微分中.

3.4.3 非相对论性场论

本附录讨论非相对论系统的量子场论. 它在概念上和相对论情形类似, 但我们将看到在物理诠释上有区别.

首先考虑一维 Schrödinger 方程

$$\left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\left(x\right)\right]\psi\left(x, t\right) = \mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{3-178}$$

其拉氏量为

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2m}\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi^\dagger V(x)\psi+\mathrm{i}\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{3-179}$$

可以验证如下

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\dagger}=\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}-V(x)\psi,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi^\dagger)}=0 \tag{3-180}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\psi^\dagger)}=-\frac{1}{2m}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{3-181}$$

运动方程

$$\partial_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\psi^\dagger)}+\partial_0\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi^\dagger)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\dagger} \tag{3-182}$$

给出

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}-V(x)\psi=-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{3-183}$$

这就是 Schrödinger 方程.

从拉氏密度可以得到共轭动量

$$\pi(x,t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)}=\mathrm{i}\psi^\dagger \tag{3-184}$$

以及哈密顿密度

$$\begin{aligned}H&=\pi\partial_0\psi-\mathcal{L}=\mathrm{i}\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t}-\left[\mathrm{i}\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{1}{2m}\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi^\dagger V(x)\psi\right]\\&=\frac{1}{2m}\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi^\dagger V(x)\psi\end{aligned}$$

利用对易关系进行正则量子化

$$[\psi(x,t),\ \pi(x',t)]=\mathrm{i}\delta(x-x')\implies\left[\psi(x,t),\ \psi^\dagger(x',t)\right]=\delta(x-x') \tag{3-185}$$

假设 ϕ_n 为 H 的归一化本征态

$$\left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\phi_n=E_n\phi_n \tag{3-186}$$

以及

$$\int\mathrm{d}x\ \phi_n^*(x)\phi_m(x)=\delta_{nm} \tag{3-187}$$

其中, $E_n(n=0,1,2,\cdots)$ 为对应态 $\phi_0,\phi_1,\phi_2,\cdots$ 的能量本征值.

模态展开

现在将场算符用这些本征态展开, 从而得到产生和湮没算符

$$\psi(x,t)=\sum_n a_n\phi_n(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_nt} \implies \psi^\dagger(x,t)=\sum_n a_n^\dagger\phi_n^*(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_nt} \tag{3-188}$$

其中, a_n 和 $a_n^\dagger$ 为算符. 这里的展开只有一种项, 因为只有正能量解. 反过来可以得到

$$a_n=\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_nt}\phi_n^*(x)\,\psi(x,t)\,,\quad a_n^\dagger=\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_nt}\phi_n(x)\,\psi^\dagger(x,t) \tag{3-189}$$

注意 a_n 和 $a_n^\dagger$ 是不依赖时间的. 它们的对易子为

$$\begin{aligned}\left[a_n,\ a_m^\dagger\right]&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_nt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_mt}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}x'\left[\psi(x,t),\ \psi^\dagger(x',t)\right]\phi_n(x)\,\phi_m^*(x')\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_nt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_mt}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}x'\delta(x-x')\,\phi_n^*(x)\,\phi_m(x')=\delta_{nm}\end{aligned}$$

同样地,

$$[a_n,\ a_m]=0 \tag{3-190}$$

可以将哈密顿量写成

$$\begin{aligned}H&=\int\left[\frac{1}{2m}\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi^\dagger V(x)\,\psi\right]\mathrm{d}x=\sum_{n,m}\int\mathrm{d}x\left[\frac{1}{2m}\partial_x\phi_n^*\partial_x\phi_m a_n^\dagger a_m+V(x)\,\phi_n^*\phi_m a_n^\dagger a_m\right]\\&=\sum_{n,m}\int\mathrm{d}x\left[\phi_n^*\left(-\frac{1}{2m}\partial_x^2+V(x)\right)\phi_m a_n^\dagger a_m\right]=\sum_{n,m}\int\mathrm{d}x[\phi_n^*E_m\phi_m a_n^\dagger a_m]\end{aligned}$$

即

$$H=\sum_n E_n a_n^\dagger a_n \tag{3-191}$$

可以看出哈密顿量由许多能量为 E_n 的量子组成. H 的本征态为

$$|0\rangle\,,a_n^\dagger\,|0\rangle\,,a_n^\dagger a_m^\dagger\,|0\rangle\,,\cdots \tag{3-192}$$

其中, $|0\rangle$ 被定义为

$$a_n\,|0\rangle=0,\quad \forall n \tag{3-193}$$

本征值为

$$E(n_1,n_2,\cdots)=\sum_k E_kn_k,\quad n_k\text{为能级}k\text{上的粒子数量} \tag{3-194}$$

我们看到哈密顿量由许多能量为 E_n 的量子组成. 尽管这描述了一个包含许多粒子的系统, 但粒子间没有相互作用, 因为拉氏量密度是场算符 ψ 的二次项, 和

相对论性场论中的自由场相同. 唯一的相互作用为各粒子与势场 $V(x)$ 的相互作用. 比如, $V(x)=\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ 描述简谐振子, 这个哈密顿密度描述的是许多粒子与二次势相互作用, 但这些粒子没有相互作用. 可以很容易推广到三维的情况. 一个重要的例子为库仑势 $V(r)=-\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$. 许多电子在核子的库仑势中运动, 但这些电子没有相互作用.

如果要使粒子间存在相互作用, 需要引入二次以上的项, 比如,

$$\int \mathrm{d}x\mathcal{L}_{\mathrm{int}}=\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\ \psi^\dagger(x)\psi^\dagger(y)V(x-y)\psi(x)\psi(y) \tag{3-195}$$

它描述了两个粒子通过一个平移不变的势 $V(x-y)$ 发生相互作用. 注意这个形式保持粒子数不变, 这是非相对论系统的特点.

第 4 章　微扰论与费曼规则

4.1　相互作用理论

第 3 章我们讨论的都是自由场的量子化, 并未考虑粒子间的相互作用, 因此无法描述自然界很多与相互作用相关的现象. 为了描述相互作用, 需要考虑相互作用的场, 得到一个新的含有非线性项的作用量, 使得粒子有相互作用.

不难看出二阶或更低阶的理论只能描述自由场. 要描述相互作用的场, 需要比自由场理论更高阶的作用项, 如在场中引入三阶或更高阶的项. 换言之, 三阶或更高阶项描述的是粒子的相互作用. 在场论中引入相互作用项的选择很多. 对于电磁作用而言, 我们有经典的 Maxwell 方程组作为指引并过渡到量子场论. 但对于其他作用 (如弱作用和强作用), 则没有经典对应. 对于这些作用中的相互作用项, 似乎有许多选择. 但最近半个世纪高能物理理论的发展使得用局域对称性 (local symmetry) 来描述这些作用成为可能, 我们将在后面几章介绍这些理论.

相互作用的场论几乎都得不到解析解. 我们知道的唯一一个系统地近似求解方法是微扰论. 本章将讨论如何建立微扰理论并进行计算. 最终的主要结果是一系列 Feynman 规则, 它们为计算我们感兴趣的物理量提供了一个方便的方法.

4.1.1　$\lambda\phi^4$ 的例子

现在讨论标量场的 $\lambda\phi^4$ 理论, 拉氏量密度为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2-\frac{\mu^2}{2}\phi^2-\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{4-1}$$

由此可以得到运动方程

$$\left(\Box+\mu_0^2\right)\phi=j\left(x\right)=-\frac{\lambda}{3!}\phi^3 \tag{4-2}$$

以及共轭动量

$$\pi\left(x\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\phi\right)}=\partial_0\phi \tag{4-3}$$

量子化

将拉氏量密度分解为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}$$
$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2$$
$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

其中, $\mathcal{L}_0$ 只包含二次项, 也就是我们讨论过的自由标量场; 而 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ 是描述相互作用的部分 (对此例为自相互作用). 共轭动量为

$$\pi\left(x,t\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \phi\right)} = \partial_0 \phi \tag{4-4}$$

以及对易关系为

$$\left[\pi\left(x,t\right), \phi\left(y,t\right)\right] = -\mathrm{i}\delta^3\left(x-y\right), \quad \left[\pi\left(x,t\right), \pi\left(y,t\right)\right] = \left[\phi\left(x,t\right), \phi\left(y,t\right)\right] = 0 \tag{4-5}$$

哈密顿密度由下式给出

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \phi\right)}\partial_0 \phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_0 \phi\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right)^2 + \frac{1}{2}\mu_0^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{4-6}$$

尽管我们可以找到量子化所需的对易关系或反对易关系, 但找到哈密顿密度的本征值和本征态是非常困难甚至是不可能的. 这是因为我们并不知道如何求解这个高度非线性的经典运动方程. 没有经典解, 我们就不能像在自由场中那样进行模态展开, 从而引入产生和湮没算符. 我们在相互作用场中唯一能采用的是近似方法, 即微扰论. 现在来讨论微扰论的框架.

4.1.2 物理态的性质

正如“微扰论”这个名字, 它假设相互作用项是对非相互作用理论的很“小”的扰动. 一开始我们并不能确定某些相互作用项是不是小的, 但我们可以试着找到理论中的一些小参数作为微扰的基础.

为了建立微扰论的框架, 我们需要一些与相互作用的具体结构无关的一般性要求. 在高能物理中, 我们通过散射过程来研究相互作用. 假定需要考虑的相互作用实际上都是短程的, 在粒子彼此靠近时才产生明显影响, 因此在远离相互作用的区域, 粒子以自由粒子的方式传播, 可用自由场描述. 选择能动量算符的本征态作为物理状态,

$$P_\mu|\varPsi\rangle = p_\mu|\varPsi\rangle \tag{4-7}$$

这是因为在散射过程中粒子都有确定的能量和动量. 我们要求这些物理态满足以下具有一般性的条件.

(a) 本征值 p_μ 都在前向光锥中 (forward light-cone), 即

$$p^2 = p_\mu p^\mu \geqslant 0, \quad p_0 \geqslant 0 \tag{4-8}$$

这一要求意味着能量本征值都是正的.

(b) 存在一个非简并的 Lorentz 不变的基态 $|0\rangle$, 最低能量为零, 即

$$P^0|0\rangle = 0 \tag{4-9}$$

亦即有

$$\boldsymbol{P}|0\rangle = 0 \tag{4-10}$$

(c) 存在稳定的单粒子态 $|\boldsymbol{p}_i\rangle$, 每个稳定的粒子满足 $p_i^2 = m_i^2$.

(d) 真空和单粒子态组成了 p^μ 的离散谱.

我们将场算符 $\phi(x)$ 与每个出现在 p^μ 中的离散态联系起来, 并假定相互作用对离散谱的改变并不太大. 这种假定意味着, 在这套理论体系中将无法描述束缚态.

4.1.3 Källén-Lehmann 谱表示

尽管从相互作用理论中得到精确的结果是非常困难的, 但依然有可能得到一些不依赖于相互作用的细节的有用的关系. 这里我们讨论一个例子, 它是相互作用标量场的对易子或传播子的谱表示.

将标量场对易子的真空期望值写成

$$\mathrm{i}\Delta'(x,y) = \langle 0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle = \langle 0|(\phi(x)\phi(y) - \phi(y)\phi(x))|0\rangle \tag{4-11}$$

在两个场算符中插入有确定能量和动量的本征态的完全集, 第一项可以写成

$$\sum_n \langle 0|\phi(x)|n\rangle\langle n|\phi(y)|0\rangle = \sum_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_n\cdot x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n\cdot y}\langle 0|\phi(0)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle \tag{4-12}$$

上式中利用了空间平移的性质

$$\langle 0|\phi(x)|n\rangle = \left\langle 0\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}P\cdot x}\phi(0)\,\mathrm{e}^{-iP\cdot x}\right|n\right\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_n\cdot x}\langle 0|\phi(0)|n\rangle \tag{4-13}$$

对易子的期望值因此变成了

$$\mathrm{i}\Delta'(x,y) = \sum_n \langle 0|\phi(0)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_n\cdot(x-y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n\cdot(x-y)}\right] = \mathrm{i}\Delta'(x-y) \tag{4-14}$$

我们看到, 该期望值是 $x-y$ 的函数, 而非 x, y 各自单独的函数. 为了方便起见, 可以利用恒等式

$$1 = \int \mathrm{d}^4q\,\delta^4(q-p_n) \tag{4-15}$$

把相同 p_n 的态放在一起. 这样就有

$$\begin{aligned}\Delta'(x-y) &= \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^4q\sum_n (2\pi)^3\,\delta^4(q-p_n)\,|\langle 0|\phi(0)|n\rangle|^2\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_n\cdot(x-y)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n\cdot(x-y)}\right]\\ &= \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^4q\rho(q)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_n\cdot(x-y)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_n\cdot(x-y)}\right]\end{aligned}$$

其中

$$\rho(q)=\sum_n (2\pi)^3\,\delta^4(q-p_n)\,|\langle 0|\phi(0)|n\rangle|^2 \tag{4-16}$$

通常称为谱函数 (spectral function), 它把所有四动量为 q 的贡献放在一起. 可以看到 $\rho(q)$ 是一个洛伦兹不变量, 并且可以写成

$$\rho(q)=\rho\left(q^2\right)\theta(q_0) \tag{4-17}$$

这是因为所有的动量只有在向前光锥中是非零的. 因此, 当 $q^2<0$ 时, $\rho\left(q^2\right)$ 为 0, 因为所有态都满足式 (4-8). 对易子真空期望值可以进一步写成

$$\begin{aligned}\Delta'(x-y) &= \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^4q\rho\left(q^2\right)\theta(q_0)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot(x-y)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot(x-y)}\right]\\ &= \int \mathrm{d}\sigma^2\rho\left(\sigma^2\right)\int \mathrm{d}^4q\delta\left(q^2-\sigma^2\right)\varepsilon(q_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot(x-y)}\\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}\sigma^2\rho\left(\sigma^2\right)\Delta\left(x-y,\sigma^2\right)\end{aligned} \tag{4-18}$$

其中

$$\Delta\left(x-y,\sigma^2\right)=\int \mathrm{d}^4q\delta\left(q^2-\sigma^2\right)\varepsilon(q_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot(x-y)} \tag{4-19}$$

是质量为 σ^2 的自由标量场的对易子函数. 在式 (4-18) 中, 作用场的对易子函数写成了不同质量自由场的对易子函数的积分, 称为**谱表示**(spectral representation).

用相同的方法可以将传播子写成

$$\Delta'_F(x-y)=-\mathrm{i}\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle=\int_0^\infty \mathrm{d}\sigma^2\rho\left(\sigma^2\right)\Delta_F\left(x-y,\sigma^2\right) \tag{4-20}$$

或者在动量空间中

$$\Delta'_F\left(p^2\right)=\int_0^\infty \mathrm{d}\sigma^2\rho\left(\sigma^2\right)\frac{1}{p^2-\sigma^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{4-21}$$

其中

$$\Delta'_F\left(p^2\right)=\int \mathrm{d}^4x\Delta'_F(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},\quad \Delta_F\left(p^2\right)=\int \mathrm{d}^4x\Delta_F(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \tag{4-22}$$

4.1.4 初态与初态的场——渐近条件

为了简单起见, 考虑相互作用的标量场

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2-\frac{\mu_0^2}{2}\phi^2+\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{4-23}$$

运动方程为如下形式

$$\left(\Box+\mu_0^2\right)\phi=j\left(x\right)=\frac{\lambda}{3!}\phi^3 \tag{4-24}$$

共轭动量为

$$\pi\left(x\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\phi\right)}=\partial_0\phi \tag{4-25}$$

对易关系为

$$\left[\phi\left(y,t\right),\pi\left(x,t\right)\right]=\mathrm{i}\delta^3\left(x-y\right),\quad \left[\pi\left(x,t\right),\pi\left(y,t\right)\right]=\left[\phi\left(x,t\right),\phi\left(y,t\right)\right]=0 \tag{4-26}$$

在散射问题中, $t=-\infty$ 时粒子自由传播. 令 $\phi_{\text{in}}\left(x\right)$ 为产生物理质量 μ 的自由粒子的算符

$$\left(\Box+\mu^2\right)\phi_{\text{in}}\left(x\right)=0 \tag{4-27}$$

这里允许粒子的物理质量 μ 不同于拉氏量中出现的 μ_0. 稍后在重整化过程中我们将说明这么做的原因. 假定 $\phi_{\text{in}}\left(x\right)$ 在坐标变换和 Lorentz 变换中的变换方式与 $\phi\left(x\right)$ 相同. 注意

$$\left[p_\mu,\phi_{\text{in}}\left(x\right)\right]=-\mathrm{i}\partial_\mu\phi_{\text{in}}\left(x\right) \tag{4-28}$$

这表示 $\phi_{\text{in}}\left(x\right)$ 的作用是从真空中产生一个粒子. 为说明这一点, 考虑具有确定动量的态

$$P^\mu|n\rangle=p_n^\mu|n\rangle \tag{4-29}$$

可得

$$-\mathrm{i}\partial_\mu\langle n|\phi_{\text{in}}\left(x\right)|0\rangle=\langle n|\left[p_\mu,\phi_{\text{in}}\left(x\right)\right]|0\rangle=p_n^\mu\langle n|\phi_{\text{in}}\left(x\right)|0\rangle \tag{4-30}$$

因此有

$$\left(\Box+\mu^2\right)\langle n|\phi_{\text{in}}\left(x\right)|0\rangle=\left(\mu^2-p_n^2\right)\langle n|\phi_{\text{in}}\left(x\right)|0\rangle=0\implies p_n^2=\mu^2 \tag{4-31}$$

$\langle n|\phi_{\text{in}}\left(x\right)|0\rangle$ 只有在 $\langle n|$ 的本征值满足 $p_n^2=\mu^2$, 即在单粒子态时, 才非零. 因此可知 $\phi_{\text{in}}\left(x\right)|0\rangle$ 是质量为 μ^2 的单粒子态.

$\phi_{\text{in}}\left(x\right)$ 满足自由场方程, 可以按照 Klein-Gordon 方程的自由解展开

$$\phi_{\text{in}}\left(x\right)=\int\mathrm{d}^3k\left[a_{\text{in}}\left(k\right)f_k\left(x\right)+a_{\text{in}}^\dagger\left(k\right)f_k^*\left(x\right)\right],\quad f_k\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\right)^3 2w_k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \tag{4-32}$$

反解上式可得

$$a_{\mathrm{in}}(k) = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, f_k^*(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_{\mathrm{in}}(x) \tag{4-33}$$

此外, 有对易关系

$$[P^\mu, a_{\mathrm{in}}(k)] = -k^\mu a_{\mathrm{in}}(k), \quad \left[P^\mu, a_{\mathrm{in}}^\dagger(k)\right] = k^\mu a_{\mathrm{in}}^\dagger(k) \tag{4-34}$$

物理态的定义如下

$$|k_1, \mathrm{in}\rangle = \sqrt{(2\pi)^3\, 2w_k}\, a_{\mathrm{in}}^\dagger(k)\,|0\rangle \tag{4-35}$$

$$|k_1, k_2, \cdots, k_n, \mathrm{in}\rangle = \left[\prod_i \sqrt{(2\pi)^3\, 2w_{k_i}}\, a_{\mathrm{in}}^\dagger(k_i)\right]|0\rangle \tag{4-36}$$

归一化要求, 除非 $m = n$ 且 $(p_1, p_2, \cdots, p_m)$ 与 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 全同, 否则即有

$$\langle k_2, \mathrm{in}|k_1, \mathrm{in}\rangle = (2\pi)^3\, 2w_1\delta^3(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2) \tag{4-37}$$

$$\langle p_1, p_2, \cdots, p_m, \mathrm{in}|k_1, k_2, \cdots, k_n, \mathrm{in}\rangle = 0 \tag{4-38}$$

$\phi_{\mathrm{in}}(x)$ 与 $\phi(x)$ 之间的关系

现在需要找出自由场 $\phi(x)$ 与相互作用场 $\phi_{\mathrm{in}}(x)$ 之间的关系, 以建立微扰展开. 这些场的场方程可以写为

$$\left(\Box + \mu_0^2\right)\phi(x) = j(x) \text{ 或 } \left(\Box + \mu^2\right)\phi(x) = j(x) + \delta\mu^2\phi(x) \equiv \widetilde{j}(x), \quad \delta\mu^2 = \mu^2 - \mu_0^2 \tag{4-39}$$

$$\left(\Box + \mu^2\right)\phi_{\mathrm{in}}(x) = 0 \tag{4-40}$$

形式上可以将非本征方程的解 $\phi(x)$ 与本征方程的解 $\phi_{\mathrm{in}}(x)$ 联系起来

$$\sqrt{Z}\phi_{\mathrm{in}}(x) = \phi(x) - \int \mathrm{d}^4y\,\Delta_{\mathrm{ret}}\left(x - y, \mu^2\right)\widetilde{j}(y) \tag{4-41}$$

其中

$$\left(\Box_x + \mu^2\right)\Delta_{\mathrm{ret}}\left(x - y, \mu^2\right) = \delta^4(x - y) \tag{4-42}$$

是常用的推迟 Green 函数 (retarded Green's function). 当 $x_0 < y_0$ 时, 有

$$\Delta_{\mathrm{ret}}\left(x - y, \mu^2\right) = 0 \tag{4-43}$$

因子 $\sqrt{Z}$ 是用来将 ϕ_{in} 归一化的. 简单看来, 令 $x_0 \to -\infty$, 应该可以得到

$$\phi(x) \longrightarrow \sqrt{Z}\phi_{\mathrm{in}}(x), \quad x_0 \longrightarrow -\infty \tag{4-44}$$

因为推迟 Green 函数在 $x_0 \to -\infty$ 时为 0. 两个场算符间的这个关系可以视为强收敛关系. 我们现在说明这将会导致一些矛盾. 取式 (4-41) 中真空和单粒子态间的矩阵元

$$\sqrt{Z}\left\langle 0\left|\phi_{\text{in}}(x)\right|p\right\rangle=\left\langle 0\left|\phi(x)\right|p\right\rangle-\int \mathrm{d}^4 y \Delta_{\text{ret}}\left(x-y,\mu^2\right)\left\langle 0\left|\widetilde{j}(y)\right|p\right\rangle \tag{4-45}$$

上式右边的第二项为 0, 因为

$$\begin{aligned}\left\langle 0\left|\widetilde{j}(y)\right|p\right\rangle= & \left(\Box+\mu^2\right)\left\langle 0\left|\phi(x)\right|p\right\rangle=\left(\Box+\mu^2\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left\langle 0\left|\phi(0)\right|p\right\rangle \\ & =\left(-p^2+\mu^2\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left\langle 0\left|\phi(0)\right|p\right\rangle=0\end{aligned} \tag{4-46}$$

因此得到

$$\sqrt{Z}\left\langle 0\left|\phi_{\text{in}}(x)\right|p\right\rangle=\left\langle 0\left|\phi(x)\right|p\right\rangle \tag{4-47}$$

可以将 $\sqrt{Z}$ 解释为相互作用场从真空中得到单粒子态的概率. 利用自由场 $\phi_{\text{in}}(x)$ 的模态展开, 可以得到

$$\begin{aligned}\left\langle 0\left|\phi_{\text{in}}(x)\right|p\right\rangle & =\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2w_k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\left\langle 0\left|a_{\text{in}}(k)\right|p\right\rangle \\ & =\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2w_k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\sqrt{(2\pi)^3 2w_p}\delta^3(p-k)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\end{aligned} \tag{4-48}$$

以及

$$\left\langle 0\left|\phi(0)\right|p\right\rangle=\sqrt{Z}\left\langle 0\left|\phi_{\text{in}}(0)\right|p\right\rangle \tag{4-49}$$

它对谱函数的贡献为

$$\begin{aligned}\rho\left(q^2\right)_{\text{单粒子}} & =\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 2w_{\mathrm{p}}}(2\pi)^3\delta^4(p-q)\left|\left\langle 0\left|\phi(0)\right|p\right\rangle\right|^2 \\ & =Z\delta\left(p_0-q_0\right)\frac{1}{2\omega_{\mathrm{p}}}=Z\delta\left(q^2-\mu^2\right)\theta\left(q_0\right)\end{aligned} \tag{4-50}$$

将它代入式 (4-18) 的谱表示中

$$\Delta'(x-y)=Z\Delta\left(x-y,\mu^2\right)+\int_{4\mu^2}^{\infty}\mathrm{d}\sigma^2\rho\left(\sigma^2\right)\Delta\left(x-y,\sigma^2\right) \tag{4-51}$$

注意积分下限对应单粒子以外的物理态的界限. 可以把它对 x_0 求微分并取

$x_0 = y_0$ 得到等时对易关系

$$\lim_{x_0 \to y_0} \frac{\partial}{\partial x_0} \mathrm{i}\Delta'(x-y) = \langle 0 | [\partial_0 \phi(x, x_0), \phi(y, x_0)] | 0 \rangle = -\mathrm{i}\delta^3(x-y)$$

$$= \lim_{x_0 \to y_0} \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\mathrm{i}Z\Delta\left(x-y, \mu^2\right) + \int_{4\mu^2}^{\infty} \mathrm{d}\sigma^2 \rho\left(\sigma^2\right) \Delta\left(x-y, \sigma^2\right) \right]$$

$$= -\mathrm{i}\delta^3(x-y) \left[Z + \int_{4\mu^2}^{\infty} \mathrm{d}\sigma^2 \rho\left(\sigma^2\right) \right]$$

这里利用了

$$\lim_{x_0 \to y_0} \frac{\partial}{\partial x_0} \Delta\left(x-y, \mu^2\right) = -\mathrm{i}\delta^3(x-y) \tag{4-52}$$

这来源于 $\Delta\left(x-y, \sigma^2\right)$ 对应着自由标量场的对易子. 因此, 有下列关系

$$1 = Z + \int_{4\mu^2}^{\infty} \mathrm{d}\sigma^2 \rho\left(\sigma^2\right) \tag{4-53}$$

从而有不等式

$$0 \leqslant Z < 1 \tag{4-54}$$

注意 $Z < 1$ 是因为谱函数 $\rho\left(q^2\right)$ 为正. 现在我们利用这个不等式来说明式 (4-44) 给出的渐进条件将导致矛盾. 相互作用场 $\phi(x)$ 和自由场 $\phi_{\mathrm{in}}(x)$ 满足相同的等时对易关系

$$[\partial_0 \phi(x, x_0), \phi(y, x_0)] = -\mathrm{i}\delta^3(x-y), \quad [\partial_0 \phi_{\mathrm{in}}(x, x_0), \phi_{\mathrm{in}}(y, x_0)] = -\mathrm{i}\delta^3(x-y) \tag{4-55}$$

这些关系只有当 $Z = 1$ 时才与渐进条件 $\phi(x) \to \sqrt{z}\phi_{\mathrm{in}}(x), x_0 \to -\infty$ 一致, 这与不等式 (4-54) 矛盾.

渐近条件 [3]

现在讨论正确的渐进条件. 令 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ 为任意两个可归一化的态, $\phi^f(t)$ 定义为 $\phi(x)$ 在时空关系为类空区域内的展宽

$$\phi^f(t) \equiv \mathrm{i} \int \mathrm{d}^3 x f_k^*(\boldsymbol{x}, t) \overleftrightarrow{\partial_0} \phi(\boldsymbol{x}, t) \ \text{且}\ \left(\Box + \mu^2\right) f = 0 \tag{4-56}$$

其中, $f_k(\boldsymbol{x}, t)$ 是 Klein-Gordon 方程的任意一个可归一化的解. 简单地讲, f_k 是一个平面波的波包. 由此, 取渐近条件为

$$\lim_{x_0 \to -\infty} \langle \alpha | \phi^f(t) | \beta \rangle = \sqrt{Z} \langle \alpha | \phi_{\mathrm{in}}^f(t) | \beta \rangle \tag{4-57}$$

且有

$$\phi_{\mathrm{in}}^f(t) = \mathrm{i} \int \mathrm{d}^3 x f^*(\boldsymbol{x}, t) \overleftrightarrow{\partial_0} \phi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, t) \quad (\text{时间无关}) \tag{4-58}$$

上式被称为弱收敛关系.

末态与末态的场

与初态和初态的场推导相同, 同样可以在 $t \longrightarrow \infty$ 的极限定义自由粒子

$$\left(\Box + \mu_0^2\right) \phi_{\text{out}}(x) = 0 \tag{4-59}$$

$$\phi_{\text{out}}(x) = \int \mathrm{d}^3 k \left[a_{\text{out}}(k) f_k(x) + a_{\text{out}}^{\dagger}(k) f_k^*(x)\right], \quad \left[P^{\mu}, a_{\text{out}}^{\dagger}(k)\right] = -k^{\mu} a_{\text{out}}^{\dagger}(k) \tag{4-60}$$

则渐进条件取为

$$\lim_{t\to\infty} \langle\alpha|\phi^f(t)|\beta\rangle = \sqrt{Z}\langle\alpha|\phi_{\text{out}}^f(t)|\beta\rangle \tag{4-61}$$

4.2 **S** 矩 阵

散射过程的描述: 从有 n 个无相互作用的粒子的初态开始, 这些粒子在彼此很接近时发生相互作用. 在作用发生之后, 变成 m 个粒子. 假设有效作用距离很短, 则分开后 m 个粒子再次开始自由传播.

初态写为

$$|p_1, p_2, \cdots, p_n, \text{in}\rangle = |\alpha, \text{in}\rangle \tag{4-62}$$

末态为

$$|p_1', p_2', \cdots, p_m', \text{out}\rangle = |\beta, \text{out}\rangle \tag{4-63}$$

从初态 $|\alpha, \text{in}\rangle$ 到末态 $|\beta, \text{out}\rangle$ 这一转换中的 S 矩阵定义为

$$S_{\beta\alpha} \equiv \langle\beta, \text{out}|\alpha, \text{in}\rangle \tag{4-64}$$

引入 S 算符, 其作用效果是将初态转化为末态

$$\langle\beta, \text{out}| = \langle\beta, \text{in}|S, \quad \langle\beta, \text{out}|S^{-1} = \langle\beta, \text{in}| \tag{4-65}$$

由此, 矩阵的矩阵元可以写成 S 算符在两个初态之间的矩阵元, 即

$$S_{\beta\alpha} = \langle\beta, \text{out}|\alpha, \text{in}\rangle = \langle\beta, \text{in}|S|\alpha, \text{in}\rangle \tag{4-66}$$

***S* 矩阵的性质**

(a) 由真空的稳定性可知 $|S_{00}| = 1$,

$$\langle 0, \text{in}|S = \langle 0, \text{out}| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\langle 0, \text{in}| \tag{4-67}$$

(b) 单粒子态的稳定性要求

$$\langle p, \text{in}|S|p, \text{in}\rangle = \langle p, \text{out}|p, \text{in}\rangle = 1, \quad |p, \text{in}\rangle = |p, \text{out}\rangle \tag{4-68}$$

(c)

$$\phi_{\text{in}}(x) = S\phi_{\text{out}}(x) S^{-1} \tag{4-69}$$

为了证明这个性质, 考虑

$$\langle\beta, \text{out}|\phi_{\text{out}}(x)|\alpha, \text{in}\rangle = \langle\beta, \text{in}|S\phi_{\text{out}}(x)|\alpha, \text{in}\rangle \tag{4-70}$$

由于 $\langle\beta, \text{out}|\phi_{\text{out}}(x)$ 是一个末态

$$\langle\beta, \text{out}|\phi_{\text{out}}(x) = \langle\beta, \text{in}|\phi_{\text{in}}(x) S \tag{4-71}$$

有

$$\langle\beta, \text{in}|S\phi_{\text{out}}(x)|\alpha, \text{in}\rangle = \langle\beta, \text{in}|\phi_{\text{in}}(x) S|\alpha, \text{in}\rangle \tag{4-72}$$

即

$$S\phi_{\text{out}} = \phi_{\text{in}}(x) S \quad \text{或} \quad \phi_{\text{in}}(x) = S\phi_{\text{out}}(x) S^{-1} \tag{4-73}$$

(d) 幺正性.

由于

$$\langle\alpha, \text{in}|S = \langle\alpha, \text{out}| \implies S^{\dagger}|\alpha, \text{in}\rangle = |\alpha, \text{out}\rangle \tag{4-74}$$

结合以上两个关系式得到

$$\langle\beta, \text{in}|SS^{\dagger}|\alpha, \text{in}\rangle = \langle\beta, \text{out}|\alpha, \text{out}\rangle = \delta_{\beta\alpha} \tag{4-75}$$

可以看出, 作为算符的 S 矩阵满足 $SS^{\dagger} = 1$, 同理可得 $S^{\dagger}S = 1$. 这个性质反映了, 如果将所有末态的概率求和, 则总的概率值是归一的.

(e) S 矩阵是 Lorentz 不变的.

在 Lorentz 变换下

$$x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + b^{\mu} \tag{4-76}$$

有

$$U(\Lambda, b) S U^{-1}(\Lambda, b) = S \tag{4-77}$$

其中

$$U(\Lambda, b) \phi(x) U^{-1}(\Lambda, b) = \phi(\Lambda x + b) \tag{4-78}$$

证明如下:

$$\begin{aligned}\phi_{\text{in}}(\Lambda x + b) &= U(\Lambda, b) \phi_{\text{in}}(x) U^{-1}(\Lambda, b) = US\phi_{\text{out}}(x) S^{-1}U^{-1} \\ &= \left(USU^{-1}\right) \phi_{\text{out}}(\Lambda x + b) \left(US^{-1}U^{-1}\right)\end{aligned}$$

然而

$$\phi_{\text{in}}\left(\Lambda x+b\right)=S\phi_{\text{out}}\left(\Lambda x+b\right)S^{-1} \tag{4-79}$$

这表示

$$U\left(\Lambda,b\right)SU^{-1}\left(\Lambda,b\right)=S \tag{4-80}$$

证明完毕. 这条性质的物理意义是, 跃迁概率的计算与内部参考系的选择无关.

4.3 LSZ 约化公式

现在需要建立计算跃迁矩阵元 $S_{\beta\alpha}$ 的框架, 矩阵元定义为

$$S_{\beta,\alpha p}=\langle\beta,\text{out}|\alpha,p,\text{in}\rangle \tag{4-81}$$

利用初态的产生算符, 可以得到

$$\begin{aligned}S_{\beta,\alpha p}=&\langle\beta,\text{out}|\alpha,p,\text{in}\rangle=\sqrt{(2\pi)^3\,2w_p}\langle\beta,\text{out}|a^\dagger_{\text{in}}\left(p\right)|\alpha,\text{in}\rangle\\ =&\sqrt{(2\pi)^3\,2w_p}\left\{\langle\beta,\text{out}|a^\dagger_{\text{out}}\left(p\right)|\alpha,\text{in}\rangle+\langle\beta,\text{out}|\left[a^\dagger_{\text{in}}\left(p\right)-a^\dagger_{\text{out}}\left(p\right)\right]|\alpha,\text{in}\rangle\right\}\\ =&\sqrt{(2\pi)^3\,2w_p}\Bigg[\langle\beta-p,\text{out}|\alpha,\text{in}\rangle-\text{i}\langle\beta,\text{out}|\int\text{d}^3x\;f_p\left(x\right)\overleftrightarrow{\partial_0}\\ &\left[\phi_{\text{in}}\left(x\right)-\phi_{\text{out}}\left(x\right)\right]|\alpha,\text{in}\rangle\Bigg]\end{aligned}$$

这里 $\langle\beta-p,\text{out}|$ 是从 $\langle\beta,\text{out}|$ 态中移除了一个动量为 $\boldsymbol{p}$ 的粒子而得到的态. 如果 $\langle\beta,\text{out}|$ 中没有动量为 $\boldsymbol{p}$ 的粒子, 那么这一项就是 0. 利用渐近条件

$$\langle\alpha|\phi_{\text{in}}\left(x\right)|\beta\rangle=\frac{1}{\sqrt{z}}\lim_{t\to-\infty}\langle\alpha|\phi\left(x\right)|\beta\rangle,\quad\langle\alpha|\phi_{\text{out}}\left(x\right)|\beta\rangle=\frac{1}{\sqrt{z}}\lim_{t\to\infty}\langle\alpha|\phi\left(x\right)|\beta\rangle \tag{4-82}$$

和等式

$$\begin{aligned}\left(\lim_{x_0\to\infty}-\lim_{x_0\to-\infty}\right)\int\text{d}^3xg_1\left(x\right)\overleftrightarrow{\partial_0}g_2\left(x\right)&=\int_{-\infty}^{\infty}\text{d}^4x\partial_0\left(g_1\left(x\right)\overleftrightarrow{\partial_0}g_2\left(x\right)\right)\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\text{d}^4x\left[g_1\left(x\right)\partial_0^2g_2\left(x\right)-\partial_0^2g_1\left(x\right)g_2\left(x\right)\right]\end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{aligned}\int\text{d}^3xf_p\left(x\right)\overleftrightarrow{\partial_0}\left[\phi_{\text{in}}\left(x\right)-\phi_{\text{out}}\left(x\right)\right]=&\int\text{d}^4x\left[\partial_0^2f_p\left(x\right)\phi\left(x\right)-f_p\left(x\right)\partial_0^2\phi\left(x\right)\right]\\ =&-\int\text{d}^4xf_p\left(x\right)\;\left(\Box+\mu^2\right)\phi\left(x\right)\end{aligned} \tag{4-83}$$

这里用到了 $\partial_0^2 f_p(x) = \left(\partial_i^2 - \mu^2\right) f_p(x)$, 并进行了分部积分. 由以上推导可以得到**约化公式**

$$
\begin{aligned}
\langle\beta,\mathrm{out}|\alpha,p,\mathrm{in}\rangle =&\sqrt{(2\pi)^3 2w_p}\langle\beta-p,\mathrm{out}|\alpha,\mathrm{in}\rangle \\
&+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\left(\Box+\mu^2\right)\langle\beta,\mathrm{out}|\phi(x)|\alpha,\mathrm{in}\rangle
\end{aligned} \tag{4-84}
$$

这里将一个初态的粒子转化为了一个场算符. 这就是约化公式的内涵. 我们将重复这个步骤直到所有的粒子都变成算符.

为了在矩阵元 $\langle\beta,\mathrm{out}|\phi(x)|\alpha,\mathrm{in}\rangle$ 中移除一个能动量为 p' 的粒子, 利用湮没算符, 并将 $\langle\beta,\mathrm{out}|$ 写成 $\langle\gamma,p',\mathrm{out}|$,

$$
\begin{aligned}
\langle\beta,\mathrm{out}|\phi(x)|\alpha,\mathrm{in}\rangle =&\langle\gamma,p',\mathrm{out}|\phi(x)|\alpha,\mathrm{in}\rangle \\
=&\sqrt{(2\pi)^3 2w_{p'}}\langle\gamma,\mathrm{out}|a_{\mathrm{out}}(p')\,\phi(x)|\alpha,\mathrm{in}\rangle \\
=&\sqrt{(2\pi)^3 2w_{p'}}\Big[\langle\gamma,\mathrm{out}|\phi(x)\,a_{\mathrm{in}}(p')|\alpha,\mathrm{in}\rangle \\
&-\langle\gamma,\mathrm{out}|(a_{\mathrm{out}}(p')\,\phi(x)-\phi(x)\,a_{\mathrm{in}}(p'))|\alpha,\mathrm{in}\rangle\Big] \\
=&\sqrt{(2\pi)^3 2w_{p'}}\Big[\langle\gamma,\mathrm{out}|\phi(x)|\alpha-p',\mathrm{in}\rangle \\
&-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3y\langle\gamma,\mathrm{out}|(\phi_{\mathrm{out}}(y)\,\phi(x)-\phi(x)\,\phi_{\mathrm{in}}(y))|\alpha,\mathrm{in}\rangle\overleftrightarrow{\partial_0}f_{p'}^*(y)\Big] \\
=&\sqrt{(2\pi)^3 2w_{p'}}\Big[\langle\gamma,\mathrm{out}|\phi(x)|\alpha-p',\mathrm{in}\rangle-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\int \mathrm{d}^3y \\
&\cdot\left(\lim_{y_0\to\infty}-\lim_{y_0\to-\infty}\right)\langle\gamma,\mathrm{out}|\left(T\left(\phi(y)\,\phi(x)\right)\right)|\alpha,\mathrm{in}\rangle\overleftrightarrow{\partial_0}f_{p'}^*(y)\Big]
\end{aligned} \tag{4-85}
$$

同样地, 可以得到

$$
\begin{aligned}
\langle\beta,\mathrm{out}|\phi(x)|\alpha,\mathrm{in}\rangle =&\sqrt{(2\pi)^3 2w_{p'}}\{\langle\gamma,\mathrm{out}|\phi(x)|\alpha-p',\mathrm{in}\rangle\} \\
&+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\int \mathrm{d}^4y\langle\gamma,\mathrm{out}|T\left(\phi(y)\,\phi(x)\right)|\alpha,\mathrm{in}\rangle\left(\overleftarrow{\Box}_y+\mu^2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}
\end{aligned} \tag{4-86}
$$

我们看到, 当约去不止一个粒子时, 就会出现场算符的编时乘积. 现在我们已经

很清楚如何从初态和末态中移除所有粒子, 由此可得

$$
\begin{aligned}
\langle p_1, \cdots, p_n, \mathrm{out} | q_1, \cdots, q_m, \mathrm{in} \rangle = \left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{z}} \right)^{m+n} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} \int \mathrm{d}^4 x_i \mathrm{d}^4 y_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i} q_i x_i} \left(\overrightarrow{\Box}_x + \mu^2 \right) \\
\times \langle 0 | T \left(\phi\left(y_1\right) \cdots \phi\left(y_m\right) \phi\left(x_1\right) \cdots \phi\left(x_m\right) \right) | 0 \rangle \\
\times \left(\overleftarrow{\Box}_{y_j} + \mu^2 \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i} p_j \cdot x_j}
\end{aligned} \tag{4-87}
$$

对于任意 $p_j \neq q_i$ 成立.

因此, 当所有的初态和末态粒子都被移除之后, 得到的就是场算符编时乘积在真空态之间的矩阵元了.

4.4 **U** 矩 阵

为了引入微扰论, 需要找到相互作用场量 $\phi(x)$, $\pi(x)$ 和自由场量 $\phi_{\mathrm{in}}(x)$, $\pi_{\mathrm{in}}(x)$ 之间的关系. 假定它们之间可由一个幺正矩阵 U 联系起来

$$
\phi(\boldsymbol{x}, t) = U^{-1}(t) \phi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, t) U(t), \quad \pi(\boldsymbol{x}, t) = U^{-1}(t) \pi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, t) U(t) \tag{4-88}
$$

初态场需要满足自由场的运动方程

$$
\partial_0 \phi_{\mathrm{in}}(x) = \mathrm{i}\left[H_{\mathrm{in}}\left(\phi_{\mathrm{in}}, \pi_{\mathrm{in}}\right), \phi_{\mathrm{in}}\right], \quad \partial_0 \pi_{\mathrm{in}}(x) = \mathrm{i}\left[H_{\mathrm{in}}\left(\phi_{\mathrm{in}}, \pi_{\mathrm{in}}\right), \pi_{\mathrm{in}}\right] \tag{4-89}
$$

其中, $H_{\mathrm{in}}\left(\phi_{\mathrm{in}}, \pi_{\mathrm{in}}\right)$ 是自由场的哈密顿量, 与此同时, 相互作用场的时间演化由有作用项的哈密顿量控制

$$
\partial_0 \phi(x) = \mathrm{i}[H(\phi, \pi), \phi], \quad \partial_0 \pi(x) = \mathrm{i}[H(\phi, \pi), \pi] \tag{4-90}
$$

从自由场的方程可以得到

$$
\begin{aligned}
\partial_0 \phi_{\mathrm{in}} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[U \phi U^{-1}\right] = \frac{\partial U}{\partial t} \phi U^{-1} + U \frac{\partial \phi}{\partial t} U^{-1} + U \phi \frac{\partial U^{-1}}{\partial t} \\
&= \frac{\partial U}{\partial t}\left(U^{-1} \phi_{\mathrm{in}} U\right) U^{-1} + U(\mathrm{i}[H(\phi, \pi), \phi]) U^{-1} - U \phi U^{-1} \frac{\partial U}{\partial t} U^{-1} \\
&= \left(\frac{\partial U}{\partial t} U^{-1}\right) \phi_{\mathrm{in}} + \mathrm{i}\left[H\left(\phi_{\mathrm{in}}, \pi_{\mathrm{in}}\right), \phi_{\mathrm{in}}\right] - \phi_{\mathrm{in}} \frac{\partial U}{\partial t} U^{-1}
\end{aligned}
$$

利用方程 (4-89), 可以化简得到

$$
\left[\frac{\partial U}{\partial t} U^{-1} + \mathrm{i} H_I\left(\phi_{\mathrm{in}}, \pi_{\mathrm{in}}\right), \phi_{\mathrm{in}}\right] = 0 \tag{4-91}
$$

其中, $H_I(\phi_{\text{in}},\pi_{\text{in}}) = H(\phi_{\text{in}},\pi_{\text{in}}) - H_{\text{in}}(\phi_{\text{in}},\pi_{\text{in}})$ 包含全部相互作用项. 同样地, 可以证明

$$\left[\frac{\partial U}{\partial t}U^{-1} + \mathrm{i}H_I(\phi_{\text{in}},\pi_{\text{in}}),\pi_{\text{in}}\right] = 0 \tag{4-92}$$

这意味着 $\left(\dfrac{\partial U}{\partial t}U^{-1} + \mathrm{i}H_I\right)$ 与所有的算符对易, 可以视为 c 数. 为了简单起见, 令这个 c 数为零, 就得到

$$\mathrm{i}\frac{\partial U(t)}{\partial t} = H_I(t)U(t) \tag{4-93}$$

这个方程的结构和平常见到的 Schrödinger 方程很相似. 为了方便起见, 定义

$$U(t,t') \equiv U(t)U^{-1}(t') \tag{4-94}$$

这个组合通常称为时间演化算符. 这样方程 (4-93) 可以写成

$$\mathrm{i}\frac{\partial U(t,t')}{\partial t} = H_I(t)U(t,t') \quad \text{且}\ U(t,t) = 1 \tag{4-95}$$

容易看出 U 矩阵满足群的性质

$$U(t,t') = U(t,t_1)U(t_1,t') \tag{4-96}$$

将其转换为积分方程

$$U(t,t') = 1 - \mathrm{i}\int_{t'}^{t}\mathrm{d}t_1 H_I(t_1)U(t_1,t') \tag{4-97}$$

则包括了初态情况. 反复利用以上方程, 假设 H_I 足够小, 得到

$$\begin{aligned} U(t,t') =& 1 - \mathrm{i}\int_{t'}^{t}\mathrm{d}t_1 H_I(t_1) + (-\mathrm{i})^2\int_{t'}^{t}\mathrm{d}t_1 H_I(t_1)\int_{t'}^{t_1}\mathrm{d}t_2 H_I(t_2) + \cdots \\ &+ (-\mathrm{i})^n\int_{t'}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t'}^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_{t'}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n) + \cdots \end{aligned}$$

其中, 第三项可以写为

$$U^{(2)} = (-\mathrm{i})^2\int_{t'}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t'}^{t_1}\mathrm{d}t_2 H_I(t_1)H_I(t_2) = (-\mathrm{i})^2\int_{t'}^{t}\mathrm{d}t_2\int_{t_2}^{t}\mathrm{d}t_1 H_I(t_1)H_I(t_2) \tag{4-98}$$

这里我们换了积分顺序, 其中 $t' < t_2 < t_1 < t$. 交换积分变量 t_1 和 t_2 的定义, 得到

$$U^{(2)} = (-\mathrm{i})^2\int_{t'}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t_2 H_I(t_2)H_I(t_1) \tag{4-99}$$

注意: 此时上式中 $t' < t_1 < t_2 < t$. 因此在上面两式中, $H_I(t_1) H_I(t_2)$ 和 $H_I(t_2) \times H_I(t_1)$ 都是编时乘积. 可以利用编时乘积将以上两个等价的表达形式结合起来, 即

$$\begin{aligned} U^{(2)} &= (-\mathrm{i})^2 \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t'}^{t_1} \mathrm{d}t_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + (-\mathrm{i})^2 \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t_2 H_I(t_2) H_I(t_1) \\ &= (-\mathrm{i})^2 \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t'}^{t_1} \mathrm{d}t_2 T(H_I(t_2) H_I(t_1)) + (-\mathrm{i})^2 \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t_2 T(H_I(t_2) H_I(t_1)) \\ &= \frac{(-\mathrm{i})^2}{2} \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_2 T(H_I(t_2) H_I(t_1)) \end{aligned} \tag{4-100}$$

这个形式的特点是每个时间积分的上下限都是一样的, 这就是引进编时乘积的结果. 将以上步骤推广到 U 矩阵更高阶的项, 可以得到

$$\begin{aligned} U(t, t') &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_n T(H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)) \\ &= T\left(\exp\left[-\mathrm{i} \int_{t'}^{t} \mathrm{d}^4 x \mathcal{H}_I(\phi_{\mathrm{in}}, \pi_{\mathrm{in}})\right]\right) \end{aligned}$$

4.5 真空期望值的微扰展开

由 LSZ 约化公式 (4-87) 可以看到, 散射矩阵 S 的矩阵元可以写成场算符编时乘积的真空期望值的形式

$$\tau(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \langle 0 | T(\phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n)) | 0 \rangle \tag{4-101}$$

利用 U 矩阵, 将上式用 ϕ_{in} 写出

$$\begin{aligned} \tau =& \langle 0 | T\left(U^{-1}(t_1) \phi_{\mathrm{in}}(x_1) U(t_1, t_2) \phi_{\mathrm{in}}(x_2) U(t_2, t_3) \cdots U(t_{n-1}, t_n) \phi_{\mathrm{in}}(x_n) U(t_n)\right) | 0 \rangle \\ =& \langle 0 | T\left(U^{-1}(t) U(t, t_1) \phi_{\mathrm{in}}(x_1) \cdots \phi_{\mathrm{in}}(x_n) U(t_n, t') U(t')\right) | 0 \rangle \end{aligned}$$

令 $t > t_1 > \cdots > t_n > t'$, 可以将 $U^{-1}(t)$ 和 $U(t')$ 提出编时乘积项, 结合 U 和 ϕ_{in} 可得

$$\begin{aligned} \tau &= \langle 0 | U^{-1}(t) T(U(t, t_1) \phi_{\mathrm{in}}(x_1) \cdots \phi_{\mathrm{in}}(x_n) U(t_n, t')) U(t') | 0 \rangle \\ &= \left\langle 0 \middle| U^{-1}(t) T\left(\phi_{\mathrm{in}}(x_1) \cdots \phi_{\mathrm{in}}(x_n) \exp\left[-\mathrm{i} \int_{t'}^{t} H_I(t'') \mathrm{d}t''\right]\right) U(t') \middle| 0 \right\rangle \end{aligned}$$

现在处理系数项中的 $U^{-1}(t)$ 与 $U(t')$.

首先证明: $|0\rangle$ 是 $U(-t)$ 在 $t \longrightarrow \infty$ 时的一个本征态.

证明: 考虑 $\langle p,\alpha,\mathrm{in}|U(-t)|0\rangle$ 形式的矩阵元. 利用与约化公式推导同样的方法可以写出

$$\begin{aligned}\langle p,\alpha,\mathrm{in}|U(-t)|0\rangle =&\sqrt{(2\pi)^3 2w_p}\langle\alpha,\mathrm{in}|a_{\mathrm{in}}(p)\,U(-t)|0\rangle\\ =&\mathrm{i}\sqrt{(2\pi)^3 2w_p}\int\mathrm{d}^3x f_p^*(\boldsymbol{x},-t')\overleftrightarrow{\partial_0'}\langle\alpha,\mathrm{in}|\phi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},-t')\,U(-t)|0\rangle\\ =&\mathrm{i}\sqrt{(2\pi)^3 2w_p}\int\mathrm{d}^3x f_p^*(\boldsymbol{x},-t')\overleftrightarrow{\partial_0'}\langle\alpha,\mathrm{in}|U(-t')\\ &\times\phi(\boldsymbol{x},-t')\,U(-t')U(-t)|0\rangle\end{aligned}$$

计算 $\overleftrightarrow{\partial_0'}$, 考虑 $t=t'$ 的极限情况, 可以得到

$$\begin{aligned}&f_p^*(\boldsymbol{x},-t')\overleftrightarrow{\partial_0'}U(-t')\phi(\boldsymbol{x},-t')\,U(-t')U(-t)\\ =&\partial_0' f_p^*(\boldsymbol{x},-t')\,U(-t)\phi(-t)-f_p^*(\boldsymbol{x},-t')\\ &\times\left[\dot{U}(-t)\phi(-t)+U(-t)\dot{\phi}(-t)+U(-t)\phi(-t)\dot{U}^{-1}(-t)U^{-1}(-t)\right]\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}\langle p,\alpha,\mathrm{in}|U(-t)|0\rangle =&\sqrt{(2\pi)^3 2w_p}\Big\{\langle\alpha,\mathrm{in}|U(-t)a_{\mathrm{in}}(p)\,|0\rangle\\ &+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x f_p^*(\boldsymbol{x},-t')\,\langle\alpha,\mathrm{in}|\dot{U}\phi+U\phi\dot{U}^{-1}U|0\rangle\Big\}\end{aligned}\tag{4-102}$$

末项中, 如果没有微分耦合项, 可得到

$$\begin{aligned}\dot{U}\phi+U\phi\dot{U}^{-1}U&=\dot{U}\left(U^{-1}\phi_{\mathrm{in}}U\right)+U\left(U^{-1}\phi_{\mathrm{in}}U\right)\left(-U^{-1}\dot{U}U^{-1}\right)U\\ &=\dot{U}U^{-1}\phi_{\mathrm{in}}U-\phi_{\mathrm{in}}\dot{U}U^{-1}U=\left[\dot{U}U^{-1},\phi_{\mathrm{in}}\right]U\\ &=-\mathrm{i}\left[H_I(\phi_{\mathrm{in}},\pi_{\mathrm{in}}),\phi_{\mathrm{in}}\right]U=0\end{aligned}$$

由此得到了在 $t\to\infty$ 情况下任何初态都满足 $\langle p,\alpha,\mathrm{in}|U(-t)|0\rangle=0$ 的结果. 这意味着

$$U(-t)|0\rangle=\lambda_-|0\rangle \text{ 在 } t\to\infty \text{ 时成立, 其中 } \lambda_- \text{ 是相因子}\tag{4-103}$$

证毕.

同样地, 可以证明

$$U(t)|0\rangle=\lambda_+|0\rangle \text{ 在 } t\to\infty \text{ 时成立, 其中 } \lambda_+ \text{ 是某个相因子}\tag{4-104}$$

这些相因子可以写成

$$\begin{aligned}\lambda_-\lambda_+^* &= \langle 0|U(-t)|0\rangle\langle 0|U^{-1}(t)|0\rangle = \langle 0|U(-t)U^{-1}(t)|0\rangle \\ &= \langle 0|T\left(\exp\left[\mathrm{i}\int_{-t}^{t} H_I(t')\,\mathrm{d}t'\right]\right)|0\rangle \\ &= \left[\langle 0|T\exp\left(-\mathrm{i}\int_{-t}^{t} H_I(t')\,\mathrm{d}t'\right)|0\rangle\right]^{-1}\end{aligned}$$

现在已经将真空期望值 $\tau(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 完全用 ϕ_{in} 表达出来了

$$\begin{aligned}\tau(x_1,x_2,\cdots,x_n) =& \langle 0|U^{-1}(-t)T\Bigg(\phi_{\text{in}}(x_1)\,\phi_{\text{in}}(x_2)\cdots\phi_{\text{in}}(x_n) \\ &\times\exp\left(-\mathrm{i}\int_{-t}^{t} H_I(t')\,\mathrm{d}t'\right)\Bigg)U(t)|0\rangle \\ =& \lambda_-\lambda_+^*\langle 0|T\Bigg(\phi_{\text{in}}(x_1)\,\phi_{\text{in}}(x_2)\cdots\phi_{\text{in}}(x_n) \\ &\times\exp\left(-\mathrm{i}\int_{-t}^{t} H_I(t')\,\mathrm{d}t'\right)\Bigg)|0\rangle\end{aligned}$$

或者

$$\tau(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \frac{\langle 0|(T\phi_{\text{in}}(x_1)\,\phi_{\text{in}}(x_2)\cdots\phi_{\text{in}}(x_n)\exp\left(-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} H_I(t')\,\mathrm{d}t')\right)|0\rangle}{\langle 0|T\left(\exp\left(-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} H_I(t')\,\mathrm{d}t'\right)\right)|0\rangle} \tag{4-105}$$

任何运算都需要将指数形式的 H_I 展开, 可写成以下形式

$$\begin{aligned}&\tau(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \\ &\frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^m}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m\langle 0|T(\phi_{\text{in}}(x_1)\,\phi_{\text{in}}(x_2)\cdots\phi_{\text{in}}(x_n)\mathcal{H}_I(y_1)\mathcal{H}_I(y_2)\cdots\mathcal{H}_I(y_m))|0\rangle}{\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^m}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m\langle 0|T(\mathcal{H}_I(y_1)\,\mathcal{H}_I(y_2)\cdots\mathcal{H}_I(y_m))|0\rangle}\end{aligned} \tag{4-106}$$

4.5.1 Wick 定理

计算自由场 ϕ_{in} 编时乘积的真空矩阵元的步骤比较简单但需要多次重复. 方法是将算符的编时乘积转化为正规乘积, 使矩阵元变得易于计算. 结果可归纳为如下 Wick 定理的形式:

$$T\{\phi_{\text{in}}(x_1)\cdots\phi_{\text{in}}(x_n)\} =: \phi_{\text{in}}(x_1)\cdots\phi_{\text{in}}(x_n):$$

$$
\begin{aligned}
&+[\langle 0|\phi_{\rm in}(x_1)\,\phi_{\rm in}(x_2)\,|0\rangle : \phi_{\rm in}(x_3)\,\phi_{\rm in}(x_4)\cdots\phi_{\rm in}(x_n) : + \text{它的置换项}]\\
&+[\langle 0|\phi_{\rm in}(x_1)\,\phi_{\rm in}(x_2)\,|0\rangle\langle 0|\phi_{\rm in}(x_3)\,\phi_{\rm in}(x_4)\,|0\rangle : \phi_{\rm in}(x_5)\cdots\phi_{\rm in}(x_n) :\\
&+\text{它的置换项}] + \cdots\\
&+\begin{cases}
[\langle 0|\phi_{\rm in}(x_1)\,\phi_{\rm in}(x_2)\,|0\rangle\langle 0|\phi_{\rm in}(x_3)\,\phi_{\rm in}(x_4)\,|0\rangle\cdots\langle 0|\phi_{\rm in}(x_{n-1})\,\phi_{\rm in}(x_n)\,|0\rangle\\
+\text{它的置换项}], \quad n\text{为偶数}\\
[\langle 0|\phi_{\rm in}(x_1)\,\phi_{\rm in}(x_2)\,|0\rangle\cdots\langle 0|\phi_{\rm in}(x_{n-2})\,\phi_{\rm in}(x_{n-1})\,|0\rangle\phi_{\rm in}(x_n)\\
+\text{它的置换项}], \quad n\text{为奇数}
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{4-107}
$$

为了方便, 现在定义一个新的量 —— 两个场算符的**缩并 (contraction)**, 它就等于它们的编时乘积的真空期望值

$$
\overline{\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2)} = \langle 0|\,T(\phi_{\rm in}(x_1)\phi_{\rm in}(x_2))\,|0\rangle
\tag{4-108}
$$

那么上面的 Wick 定理可以重新表述成

$$
T\{\phi_{\rm in}(x_1)\cdots\phi_{\rm in}(x_n)\} =: \phi_{\rm in}(x_1)\cdots\phi_{\rm in}(x_n) : + : \text{所有可能的缩并} :
\tag{4-109}
$$

其中, “所有可能的缩并” 指的是所有可能的两两缩并. 例如, 对于四个场的情形, 有

$$
\begin{aligned}
T(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4) = &: \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : + : \phi_1^{\bullet}\phi_2^{\bullet}\phi_3\phi_4 : + : \phi_1^{\bullet}\phi_2\phi_3^{\bullet}\phi_4 : + : \phi_1^{\bullet}\phi_2\phi_3\phi_4^{\bullet} :\\
&+ : \phi_1\phi_2^{\bullet}\phi_3^{\bullet}\phi_4 : + : \phi_1\phi_2^{\bullet}\phi_3\phi_4^{\bullet} : + : \phi_1\phi_2\phi_3^{\bullet}\phi_4^{\bullet} :\\
&+ : \phi_1^{\bullet}\phi_2^{\bullet}\phi_3^{\circ}\phi_4^{\circ} : + : \phi_1^{\bullet}\phi_2^{\circ}\phi_3^{\bullet}\phi_4^{\circ} : + : \phi_1^{\bullet}\phi_2^{\circ}\phi_3^{\circ}\phi_4^{\bullet} :
\end{aligned}
\tag{4-110}
$$

这一定理可以用归纳法来证明. 我们只在 $n = 2$ 的简单情形下进行说明. 很显然, 两个算符的编时乘积与正规乘积之差是一个 c 数, 因为 $a_{\rm in}$ 和 $a_{\rm in}^{\dagger}$ 的对易子是 c 数, 所以有

$$
T\{\phi_{\rm in}(x_1)\,\phi_{\rm in}(x_2)\} =: \phi_{\rm in}(x_1)\,\phi_{\rm in}(x_2) : + c\text{数}
\tag{4-111}
$$

为了计算这个 c 数, 可以考虑上式在真空态之间的矩阵元. 因为正规乘积的真空矩阵元为零, 所以

$$
\langle 0|T\{\phi_{\rm in}(x_1)\,\phi_{\rm in}(x_2)\}|0\rangle = c\text{数}
\tag{4-112}
$$

由此得到

$$
T\{\phi_{\rm in}(x_1)\,\phi_{\rm in}(x_2)\} =: \phi_{\rm in}(x_1)\,\phi_{\rm in}(x_2) : + \langle 0|T\{\phi_{\rm in}(x_1)\,\phi_{\rm in}(x_2)\}|0\rangle
\tag{4-113}
$$

因为场算符正规乘积的真空期望值是 0, 所以由 Wick 定理可知, 只有缩并完全的项会对编时乘积的真空期望值有贡献, 即式 (4-107) 中的最后一项. 所以, 当 n 为奇数时,

$$\langle 0|T\{\phi_{\text{in}}(x_1)\cdots\phi_{\text{in}}(x_n)\}|0\rangle = 0 \tag{4-114}$$

当 n 为偶数时,

$$\begin{aligned}\langle 0|T\{\phi_{\text{in}}(x_1)\cdots\phi_{\text{in}}(x_n)\}|0\rangle = \sum_{\text{交换项排序}} &\langle 0|T(\phi_{\text{in}}(x_1)\,\phi_{\text{in}}(x_2))|0\rangle \\ &\langle 0|T(\phi_{\text{in}}(x_3)\,\phi_{\text{in}}(x_4))|0\rangle\cdots\end{aligned} \tag{4-115}$$

可以用 $\lambda\phi^3$ 理论进行说明. 考虑两点函数, 展开到相互作用项的二阶, 用 Wick 定理写出缩并的项

$$\begin{aligned}&\langle 0|\,T\{\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2){:}\ \phi^3_{\text{in}}(y_1){::}\phi^3_{\text{in}}(y_2)\ {:}\}|0\ \rangle\\
=&\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)\ {:}\ \phi_{\text{in}}(y_1)\phi_{\text{in}}(y_1)\phi_{\text{in}}(y_1)\ {::}\ \phi_{\text{in}}(y_2)\phi_{\text{in}}(y_2)\phi_{\text{in}}(y_2)\ {:} + \cdots\\
&+\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)\ {:}\ \phi_{\text{in}}(y_1)\phi_{\text{in}}(y_1)\phi_{\text{in}}(y_1)\ {::}\ \phi_{\text{in}}(y_2)\phi_{\text{in}}(y_2)\phi_{\text{in}}(y_2)\ {:} + \cdots\\
&+\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)\ {:}\ \phi_{\text{in}}(y_1)\phi_{\text{in}}(y_1)\phi_{\text{in}}(y_1)\ {::}\ \phi_{\text{in}}(y_2)\phi_{\text{in}}(y_2)\phi_{\text{in}}(y_2)\ {:} + \cdots\\
=&6\times\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)\ {:}\ \phi_{\text{in}}(y_1)\phi_{\text{in}}(y_1)\phi_{\text{in}}(y_1)\ {::}\ \phi_{\text{in}}(y_2)\phi_{\text{in}}(y_2)\phi_{\text{in}}(y_2)\ {:}\\
&+18\times\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)\ {:}\ \phi_{\text{in}}(y_1)\phi_{\text{in}}(y_1)\phi_{\text{in}}(y_1)\ {::}\ \phi_{\text{in}}(y_2)\phi_{\text{in}}(y_2)\phi_{\text{in}}(y_2)\ {:}\\
&+18\times\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)\ {:}\ \phi_{\text{in}}(y_1)\phi_{\text{in}}(y_1)\phi_{\text{in}}(y_1)\ {::}\ \phi_{\text{in}}(y_2)\phi_{\text{in}}(y_2)\phi_{\text{in}}(y_2)\ {:}\end{aligned}$$

这里只写出了比较典型的几项贡献. 其中第二个等号中的省略号指缩并方式与前面类似的项, 它们会给出相同的结果, 所以在最后的结果中要乘以各自的系数.

4.5.2　Feynman 传播子

由 Wick 定理可以看出, 在计算矩阵元时, 最重要的一个量就是两个自由场编时乘积的真空期望值, 我们称它为 **Feynman 传播子**. 各类场的 Feynman 传播子都很容易计算得到. 实标量场的结果为

$$\langle 0|T(\phi_{\text{in}}(x)\,\phi_{\text{in}}(y))|0\rangle = \mathrm{i}\Delta_F\left(x-y,\mu^2\right) = \mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}}{k^2-\mu^2+\mathrm{i}\varepsilon}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)} \mathrm{i}\Delta_F(k) \tag{4-116}$$

其中

$$\mathrm{i}\Delta_F(k) = \frac{\mathrm{i}}{k^2 - \mu^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{4-117}$$

复标量场的传播子是

$$\langle 0|T(\phi_{\mathrm{in}}(x)\,\phi^*_{\mathrm{in}}(y))|0\rangle = \mathrm{i}\Delta_F\left(x-y,\mu^2\right) = \mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}}{k^2-\mu^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{4-118}$$

图像表示

图 4-1 是我们遇到的第一个 Feynman 图: 将时空点 x 与 y 用线连起来, 表示 Feynman 传播子. 由前面的定义可知, 两个场 $\phi(x_1), \phi(x_2)$ 之间的缩并就是它们的 Feynman 传播子, 因此由图 4-1, 每条线 (传播子) 代表一次缩并. 对于多个场 $\phi_1\phi_2\phi_3\cdots\phi_n$, 就有多种连线方式. 不同的连线方式对应着不同的缩并方式. 比如, 对于 $\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4$ 的例子, 可以将 ϕ_1 和 ϕ_3 缩并, 同时 ϕ_2 和 ϕ_4 缩并, 得到 $\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4$; 或者将 ϕ_1, ϕ_2 缩并, 同时缩并 ϕ_3, ϕ_4, 结果就是 $\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4$.

x ●———● $y = \mathrm{i}\Delta F(x-y,\mu^2)$

图 4-1　Feynman 传播子

将上面关于 $\lambda\phi^3$ 的例子用 Feynman 图表示出来就是 (图 4-2, 图 4-3):

(1)

$$\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\phi_{\mathrm{in}}(x_2) : \phi_{\mathrm{in}}(y_1)\phi_{\mathrm{in}}(y_1)\phi_{\mathrm{in}}(y_1) :: \phi_{\mathrm{in}}(y_2)\phi_{\mathrm{in}}(y_2)\phi_{\mathrm{in}}(y_2) : \tag{4-119}$$

x_1　x_2　y_1　y_2

图 4-2

(2)

$$\phi_{\mathrm{in}}(x_1)\phi_{\mathrm{in}}(x_2) : \phi_{\mathrm{in}}(y_1)\phi_{\mathrm{in}}(y_1)\phi_{\mathrm{in}}(y_1) :: \phi_{\mathrm{in}}(y_2)\phi_{\mathrm{in}}(y_2)\phi_{\mathrm{in}}(y_2) : \tag{4-120}$$

x_1　y_1　y_2　x_2

图 4-3

这里的 y_1, y_2 是作用项的时空坐标. 不难看出来, 将图 4-3 中的 y_1 和 y_2 互换得到的图形与原来的相同, 所以不再重复给出. 图 4-2 和图 4-3 之和的倍数 2 可以消掉微扰展开中的一部分系数.

4.5.3　真空振幅

可以将 Feynman 图分为以下几种.

(1) 封闭圈图 (closed loop diagram): 没有外线的图 (外线指的是只有一端连入图中的线);

(2) 连通图 (connected diagram): 图中所有的点都是互相连接的, 没有互相分离开的部分;

(3) 非连通图 (disconnected diagram): 被分成若干部分的图, 由若干连通图 (子图) 组成.

根据这样的分类可知, 上面 $\lambda\phi^3$ 的例子给出的 Feynman 图中, 第二个图 (图 4-3) 是一个连通图, 而第一个图 (图 4-2) 则是一个非连通图, 它由两个连通的子图构成, 其中第二个子图是封闭圈图.

回忆前面讲过的 τ 方程可知, 在 τ 方程的分母中是这样的项

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^m}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_m\langle 0|T\{\mathcal{H}_I\left(\phi_{\text{in}}\left(y_1\right)\right)\cdots\mathcal{H}_I\left(\phi_{\text{in}}\left(y_m\right)\right)\}|0\rangle \tag{4-121}$$

它的 Feynman 图没有外线, 只有封闭圈图. 例如, 对于 $\mathcal{H}_I=\dfrac{\lambda}{3!}:\phi_{\text{in}}^3:$ 的例子, 展开到二阶项, 有

$$\begin{aligned}\langle 0|T\{\mathcal{H}_I(\phi_{\text{in}}(y_1))\mathcal{H}_I(\phi_{\text{in}}(y_2))\}|0\rangle=&\left(\frac{\lambda}{3!}\right)\langle 0|T\{:\phi_{\text{in}}^3(y_1)::\phi_{\text{in}}^3(y_2):\}|0\rangle\\ =&3\times 2\times\left(\frac{\lambda}{3!}\right)^2:\phi_{\text{in}}(y_1)\phi_{\text{in}}(y_1)\phi_{\text{in}}(y_1)::\phi_{\text{in}}(y_2)\phi_{\text{in}}(y_2)\phi_{\text{in}}(y_2):\end{aligned} \tag{4-122}$$

对应的 Feynman 图如图 4-4 所示.

而 τ 方程的分子中所有的项对应的 Feynman 图都有外线, 它们要么是连通的, 要么是非连通的. 可以证明, 把分子的非连通图中封闭圈图的部分分离出来, 正好可以与分母相抵消. 因此, 可以把 τ 方程写成

$$\begin{aligned}\tau\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)&=\frac{\sum\limits_i G_i\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)}{\sum\limits_k D_k}=\frac{\sum\limits_i G_i^C\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\sum\limits_k D_k}{\sum\limits_k D_k}\\&=\sum_i G_i^C\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\end{aligned}$$

其中, $G_i^C(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是有 n 条外线的连通图; D_k 是封闭圈图. 因此, 计算有 n 条外线的 τ 方程时, 可以忽略所有的非连通图. 关于这一点的详细论证可以参考其他的场论教材.

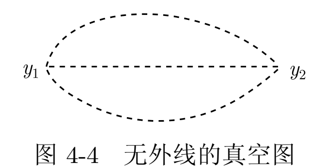


图 4-4 无外线的真空图

4.5.4 计算 S 矩阵元

现在来讨论如何用微扰论计算 S 矩阵元. 先用一个简单的例子来说明. 从这个例子中可以看到, 中间步骤中许多复杂的因子相互抵消, 最终得到一个较为简单的结果. 这些抵消是具有普遍性的, 而且许多复杂的中间步骤其实是重复的, 因此可以用一个规则来省略中间步骤并直接写下最终结果. 同时我们还可以看到一些图 (Feynman 图) 可以用以代替一些算式 (如 Feynman 传播子), 只要有了图和算式的对应规则, 从 Feynman 图就可以给出最终的结果.

计算 S 矩阵

举下面这个简单的例子: $\mathcal{H}_I = \dfrac{\lambda}{3!}\phi_{\rm in}^3$. 求下面这个过程的 S 矩阵. 相应的动量为

$$\phi(q_1) + \phi(q_2) \longrightarrow \phi(p_1) + \phi(p_2) \tag{4-123}$$

首先利用 LSZ 约化公式将 $S_{\alpha\beta}$ 写成场算符的真空期望值的形式

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha} =& \langle \beta, \mathrm{out}|\alpha, \mathrm{in}\rangle = \langle p_1, p_2, \mathrm{out}|q_1, q_2, \mathrm{in}\rangle \\
=& \left(\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\right)^4 \int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4y_1\mathrm{d}^4y_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1y_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2y_2}\left(\Box_{y_1}+\mu^2\right)\left(\Box_{y_2}+\mu^2\right) \\
&\times \langle 0|T\left(\phi(y_1)\phi(y_2)\phi(x_1)\phi(x_2)\right)|0\rangle \left(\overleftarrow{\Box}_{x_1}+\mu^2\right)\left(\overleftarrow{\Box}_{x_2}+\mu^2\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1x_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2x_2}
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha} =& \left(\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\right)^4 \int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4y_1\mathrm{d}^4y_2 \left(\mu^2-p_1^2\right)\left(\mu^2-p_2^2\right)\left(\mu^2-q_1^2\right)\left(\mu^2-q_2^2\right) \\
&\times \tau(y_1, y_2, x_1, x_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1y_1+p_2y_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q_1x_1+q_2x_2)}
\end{aligned} \tag{4-124}$$

其中

$$\tau(y_1, y_2, x_1, x_2) = \langle 0|T\left(\phi(y_1)\phi(y_2)\phi(x_1)\phi(x_2)\right)|0\rangle \tag{4-125}$$

在上式中, 利用了分部积分将向左的 Klein-Gordon 算符变成了传播子的倒数. 利用式 (4-106) 得到 τ 的微扰展开为

$$\begin{aligned}\tau\left(y_1,y_2,x_1,x_2\right)=&\sum_n\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4z_1\cdots\mathrm{d}^4z_n\\&\times\langle 0|T\Big(\phi_{\text{in}}\left(y_1\right)\phi_{\text{in}}\left(y_2\right)\phi_{\text{in}}\left(x_1\right)\phi_{\text{in}}\left(x_2\right)\\&\times\mathcal{H}_I\left(\phi_{\text{in}}\left(z_1\right)\right)\cdots\mathcal{H}_I\left(\phi_{\text{in}}\left(z_n\right)\right)\Big)|0\rangle\end{aligned}\tag{4-126}$$

最低阶贡献为

$$\begin{aligned}\tau^{(2)}\left(y_1,y_2,x_1,x_2\right)=&\frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\\&\times\langle 0|T\Big\{\phi_{\text{in}}\left(y_1\right)\phi_{\text{in}}\left(y_2\right)\phi_{\text{in}}\left(x_1\right)\phi_{\text{in}}\left(x_2\right)\\&\times\left[\frac{\lambda}{3!}\phi_{\text{in}}^3\left(z_1\right)\right]\left[\frac{\lambda}{3!}\phi_{\text{in}}^3\left(z_2\right)\right]\Big\}|0\rangle\end{aligned}\tag{4-127}$$

利用 Wick 定理, 可以得到如图 4-5 所示的连通图, 对图中的每一条线都可以写出传播子 $\mathrm{i}\Delta_F\left(x_i-z_j\right)$. 其中图 (a) 对于 $\tau\left(y_1,y_2,x_1,x_2\right)$ 的贡献为

$$\begin{aligned}\tau^{(2)}\left(y_1,y_2,x_1,x_2\right)=&\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\mathrm{i}\Delta_F\left(y_1-z_1\right)\mathrm{i}\Delta_F\left(y_2-z_1\right)\\&\mathrm{i}\Delta_F\left(z_2-x_1\right)\mathrm{i}\Delta_F\left(z_2-x_2\right)\mathrm{i}\Delta_F\left(z_1-z_2\right)+\cdots\end{aligned}$$

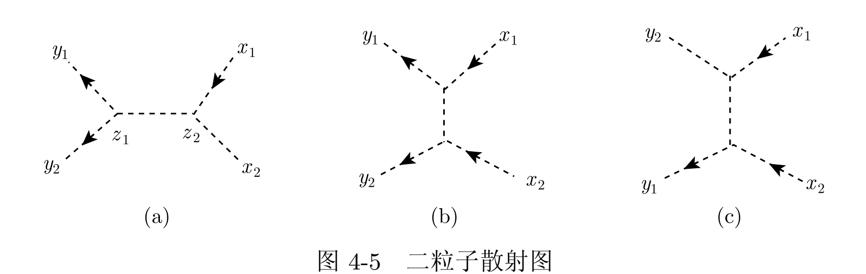


图 4-5　二粒子散射图

代入动量空间的传播子

$$\mathrm{i}\Delta_F\left(x\right)=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{\left(2\pi\right)^4}\frac{\mathrm{i}}{k^2-\mu^2+\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\tag{4-128}$$

可以得到

$$\tau^{(2)}(y_1,y_2,x_1,x_2)=\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4z_1\mathrm{d}^4z_2\int\frac{\mathrm{d}^4k_1}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4k_2}{(2\pi)^4}\cdots\int\frac{\mathrm{d}^4k_5}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1\cdot(y_1-z_1)}$$
$$\mathrm{i}\Delta_F(k_1)\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2\cdot(z_1-x_1)}\mathrm{i}\Delta_F(k_2)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_3(z_1-z_2)}$$
$$\mathrm{i}\Delta_F(k_3)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_4\cdot(y_2-z_2)}\mathrm{i}\Delta_F(k_4)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_5\cdot(z_2-x_2)}\mathrm{i}\Delta_F(k_5)\tag{4-129}$$

计算积分

$$z_1\ 积分\quad\int\mathrm{d}^4z_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1-k_2-k_3)\cdot z_1}=(2\pi)^4\delta^4(k_1-k_2-k_3)$$
$$z_2\ 积分\quad\int\mathrm{d}^4z_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_3+k_4-k_5)\cdot z_2}=(2\pi)^4\delta^4(k_3+k_4-k_5)$$

得到每个顶点的能动量守恒. 可以利用任一 δ 函数来对 k_3 积分, 则 τ 变为

$$\tau^{(2)}(y_1,y_2,x_1,x_2)=\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{2!}\int\frac{\mathrm{d}^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_4}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_5}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_4-k_5)$$
$$\times\mathrm{i}\Delta_F(k_1)\,\mathrm{i}\Delta_F(k_2)\,\mathrm{i}\Delta_F(k_4)\,\mathrm{i}\Delta_F(k_5)\,\mathrm{i}\Delta_F(k_1-k_2)$$
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1\cdot y_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2\cdot y_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_4\cdot x_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_5\cdot x_2}\tag{4-130}$$

τ 成为若干传播子 $\mathrm{i}\Delta_F(k_1)\cdots$ 和平面波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_ix_j}\cdots$ 的乘积.

将得到的 τ 代入 $S_{\beta\alpha}$, 得

$$S_{\beta\alpha}=\left(\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\right)^4\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4y_1\mathrm{d}^4y_2\left(\mu^2-p_1^2\right)\left(\mu^2-p_2^2\right)\left(\mu^2-q_1^2\right)\left(\mu^2-q_2^2\right)$$
$$\times\tau(y_1,y_2,x_1,x_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1y_1+p_2y_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q_1x_1+q_2x_2)}$$
$$=\left(\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{z}}\right)^4\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4y_1\mathrm{d}^4y_2\left(\mu^2-p_1^2\right)\left(\mu^2-p_2^2\right)\left(\mu^2-q_1^2\right)\left(\mu^2-q_2^2\right)$$
$$\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1y_1+p_2y_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q_1x_1+q_2x_2)}\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{2!}\int\frac{\mathrm{d}^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_4}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_5}{(2\pi)^4}(2\pi)^4$$
$$\delta^4(k_1-k_2+k_4-k_5)$$
$$\times\mathrm{i}\Delta_F(k_1)\,\mathrm{i}\Delta_F(k_2)\,\mathrm{i}\Delta_F(k_4)\,\mathrm{i}\Delta_F(k_5)\,\mathrm{i}\Delta_F(k_1+k_2)$$
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1\cdot y_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2\cdot x_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_4\cdot y_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_5\cdot x_2}$$

对坐标 x_i,y_j 的积分将使得内部动量 k_i 与某个外部动量相等

$$\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1x_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_4\cdot x_1}=(2\pi)^4\delta^4(q_1+k_4),\quad\int\mathrm{d}^4x_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2x_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_5\cdot x_2}=(2\pi)^4\delta^4(q_2+k_5)\tag{4-131}$$

$$\int \mathrm{d}^4 y_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1 y_1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 \cdot y_1} = (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 - k_1), \quad \int \mathrm{d}^4 y_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2 y_2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 \cdot y_2} = (2\pi)^4 \delta^4 (p_2 - k_2) \tag{4-132}$$

因此可以看到外线传播子抵消掉了 LSZ 中的传播子的倒数, 最终得到

$$S_{\beta\alpha} = \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{2!} \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^4 (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 + p_2 - q_1 - q_2)\, \mathrm{i}\Delta_F (p_1 + p_2) \cdots \tag{4-133}$$

这在动量空间中是一个简单的结果. 加上其余两个图的贡献得到

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} =& \frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{2!} \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^4 (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \\ & \times [\mathrm{i}\Delta_F (p_1 + p_2) + \mathrm{i}\Delta_F (p_1 - q_2) + \mathrm{i}\Delta_F (p_1 - q_1)] \end{aligned} \tag{4-134}$$

在这个简单的例子中我们看到一些具有一般性的结论, 比如, 只有连通图才有贡献, 外线传播子抵消掉 LSZ 约化公式中传播子的倒数, 顶点处动量守恒等. 尽管中间步骤复杂, 但是结果却比较简单, 这是因为其中有许多复杂的因子相互抵消了. 因此, 可以写下一个简单的规则 (Feynman 规则), 它能从表示散射过程的图直接得到最终的答案.

4.6 Feynman 规则

为了不用每次都在 S 矩阵元中写出 δ 函数, 可以定义一个 T 矩阵如下

$$S_{fi} = \delta_{fi} + \mathrm{i}(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) T_{fi} \tag{4-135}$$

其中, T_{fi}为$i \to f$ 的散射振幅. 附录中将会看到 T 矩阵直接与散射截面和衰变率相联系.

矩阵元 T_{fi} 的最终形式十分简单, 可以利用简单的规则替代那些枯燥繁杂的中间步骤:

(a) 首先画出所有与外线相连的 Feynman 图. 将每个传播子标上动量, 并对每个顶点加上动量守恒的约束;

(b) 对于每个自旋为 0, 动量为 p 的玻色子内线, 写下传播子

$$\mathrm{i}\Delta_F (q) = \frac{\mathrm{i}}{q^2 - \mu^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{4-136}$$

(c) 对于每个未被动量守恒确定的内动量 l, 写下

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4} \tag{4-137}$$

(d) 在每个顶点, 所乘的因子取决于相互作用的特性. 对于标量场, 要乘上 $-\mathrm{i}\lambda$.

4.6.1 $\lambda\phi^3$ 理论中的例子

在 $\lambda\phi^3$ 理论中, 考虑散射过程 $\phi(k_1)+\phi(k_2)\longrightarrow\phi(k_3)+\phi(k_4)$. 在 λ 的第二阶, 有 3 个 Feynman 图 (图 4-6). 对应的矩阵元是

$$\begin{aligned}
T^{(a)} &= (-\mathrm{i}\lambda)^2 \frac{\mathrm{i}}{(k_1-k_3)^2-\mu^2} \\
T^{(b)} &= (-\mathrm{i}\lambda)^2 \frac{\mathrm{i}}{(k_1+k_2)^2-\mu^2} \\
T^{(c)} &= (-\mathrm{i}\lambda)^2 \frac{\mathrm{i}}{(k_1-k_4)^2-\mu^2}
\end{aligned} \tag{4-138}$$

总的振幅为 $T=T^{(a)}+T^{(b)}+T^{(c)}$.

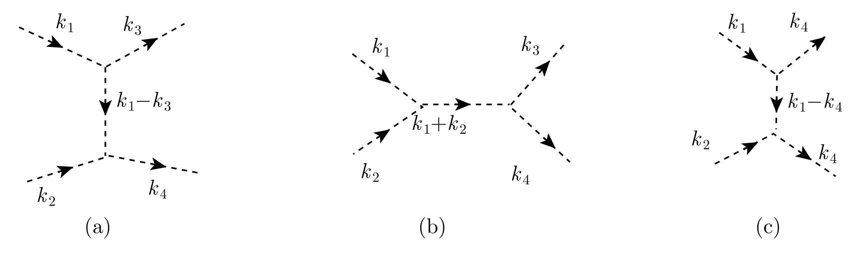


图 4-6 动量空间散射 Feynman 图

Mandelstam 变量

为了方便起见, 定义下列 Lorentz 不变的物理量:

$$\begin{aligned}
s &= (k_1+k_2)^2, \quad \text{质心系总能量} \\
t &= (k_1-k_3)^2, \quad \text{4- 动量转移 (散射角)} \\
u &= (k_1-k_4)^2
\end{aligned}$$

称为 Mandelstam 变量, 满足

$$s+t+u=4\mu^2 \tag{4-139}$$

用这些变量可以将 Feynman 振幅写成以下形式

$$T^{(a)}=(\lambda)^2\frac{\mathrm{i}}{t-\mu^2}, \quad T^{(b)}=(\lambda)^2\frac{\mathrm{i}}{s-\mu^2}, \quad T^{(c)}=(\lambda)^2\frac{\mathrm{i}}{u-\mu^2} \tag{4-140}$$

4.7 附录: 截面积和衰变率

为了和实验测量结果对比, 需要计算出散射的反应截面和衰变率. 首先将 S 矩阵元写成

$$S_{fi} = \delta_{fi} + \mathrm{i}(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)T_{fi} \tag{4-141}$$

其中, T_{fi}为$i \to f$ 的散射振幅. 对于 $i \neq f$, 跃迁概率为

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4\delta^4(0)[(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)\,|T_{fi}|^2] \tag{4-142}$$

为了解释 $\delta^4(0)$, 有

$$(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i) = \int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_f - p_i)x} \tag{4-143}$$

积分限在有限大的体积 V 与时间间隔 T 中, 可以将 $\delta^4(0)$ 重写为

$$(2\pi)^4\delta^4(0) = VT \tag{4-144}$$

这就是我们对 $\delta^4(0)$ 的解释. 这样跃迁概率可以写成

$$|S_{fi}|^2 = VT[(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)\,|T_{fi}|^2] \tag{4-145}$$

跃迁率 (transition rate, 单位时间的跃迁概率) 为

$$\omega_{fi} = (2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)\,|T_{fi}|^2\,V \tag{4-146}$$

4.7.1 衰变率

考虑一个一般的衰变过程

$$a(p) \to c_1(k_1) + c_2(k_2) + \cdots + c_n(k_n), \quad p_f = \sum_{l=1}^{n} k_i, \quad p_i = p \tag{4-147}$$

动量空间体积元 $\mathrm{d}^3k_1\,\mathrm{d}^3k_2\cdots\mathrm{d}^3k_n$ 中的态数目为

$$\prod_{l=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3k_l}{(2\pi)^3 2\omega_{kl}} \tag{4-148}$$

将所有末态求和得到转换率为

$$\mathrm{d}\omega' = (2\pi)^4\delta^4(p - \Sigma_{j=1}^{n}k_j)\,|T_{fi}|^2\,V\prod_{l=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3k_l}{(2\pi)^3 2\omega_{kl}} \tag{4-149}$$

我们使用的物理态的归一性要求为

$$\langle p|p'\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}\,')2\omega_p \tag{4-150}$$

且对于 $p=p'$ 的情况要求

$$\langle p|p\rangle = (2\pi)^3\delta^3(0)2\omega_p = 2V\omega_p \tag{4-151}$$

这就是初态的粒子数. 每个粒子的衰变率为

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}\omega'}{2V\omega_p} = (2\pi)^4\delta^4(p-\Sigma_{j=1}^n k_j)\,|T_{fi}|^2\,\frac{1}{2\omega_p}\prod_{l=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3k_l}{(2\pi)^3 2\omega_{kl}} \tag{4-152}$$

如果末态有 m 个全同粒子, 需要将这个值除以 $m!$:

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\omega_p}\,|T_{fi}|^2\,\frac{\mathrm{d}^3k_1}{(2\pi)^3 2\omega_1}\cdots\frac{\mathrm{d}^3k_n}{(2\pi)^3 2\omega_n}(2\pi)^4\delta^4(p-\Sigma_{j=1}^n k_j)S, \quad S=\prod_j\frac{1}{(m_j)!} \tag{4-153}$$

注意, 在这个公式里总体积 V 被消掉了. 这是很合理的结果, 衰变率应该与总体积无关.

4.7.2 截面积

对于如下散射过程

$$a(p_1)+b(p_2)\to c_1(k_1)+c_2(k_2)+\cdots+c_n(k_n) \tag{4-154}$$

跃迁概率在对所有可能的末态求和之后有

$$\mathrm{d}\omega' = (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-\Sigma_{j=1}^n k_j)\,|T_{fi}|^2\,V\prod_{l=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3k_l}{(2\pi)^3 2\omega_{kl}} \tag{4-155}$$

将以上结果转成到束流中只有单粒子、靶核中也只有单粒子的情况, 将这个值除以粒子流的相对速度, 可以得到微分截面

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\omega_{p_1}V}\frac{1}{2\omega_{p_2}V}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-\Sigma_{j=1}^n k_j)\,|T_{fi}|^2\,V\prod_{l=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3k_l}{(2\pi)^3 2\omega_{kl}}\frac{V}{|v_1-v_2|} \tag{4-156}$$

速度因子可以写为

$$I = |\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2| = \left|\frac{\boldsymbol{p}_1}{E_1}-\frac{\boldsymbol{p}_2}{E_2}\right| \tag{4-157}$$

在质心系中

$$\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}, \quad p_1=(E_1,\boldsymbol{p}), \quad p_2=(E_2,-\boldsymbol{p})$$

$$I = \frac{|\boldsymbol{p}|}{E_1 E_2}(E_1 + E_2) \tag{4-158}$$

$$(p_1 \cdot p_2)^2 = (E_1 E_2 + \boldsymbol{p}^{\,2})^2 = E_1^2 E_2^2 + 2E_1 E_2 \boldsymbol{p}^{\,2} + \boldsymbol{p}^{\,4} \tag{4-159}$$

$$\begin{aligned}
(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 &= (\boldsymbol{p}^{\,2} + m_1^2)(\boldsymbol{p}^{\,2} + m_2^2) + 2E_1 E_2 \boldsymbol{p}^{\,2} + \boldsymbol{p}^{\,4} - m_1^2 m_2^2 \\
&= \boldsymbol{p}^{\,2}[2\boldsymbol{p}^{\,2} + (m_1^2 + m_2^2) + 2E_1 E_2] \\
&= \boldsymbol{p}^{\,2}(E_1 + E_2)^2 \\
&\Rightarrow I = \frac{1}{E_1 E_2}\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}
\end{aligned} \tag{4-160}$$

最后得到

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{I}\frac{1}{2\omega_{p_1}}\frac{1}{2\omega_{p_2}}(2\pi)^4 \delta^4\left(p_1 + p_2 - \sum_{j=1}^{n} k_j\right)|T_{fi}|^2 \prod_{l=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^3 k_l}{(2\pi)^3 2\omega_l} \tag{4-161}$$

同样地, 这个式子中的总体积也消掉了.

第 5 章　量子电动力学

5.1　量子电动力学理论

量子场论最早应用在量子电动力学 (quantum electrodynamics, QED) 的量子效应计算. 它成功地解释了许多电磁现象, 并因此在物理学其他领域也得到了广泛的信赖与应用. 目前为止, 除了引力作用之外, 我们已知的所有基本相互作用都可以由量子场论的观点描述. 本章将以几个简单的物理过程为例, 说明如何在 QED 中进行计算. 为了简便起见, 只考虑最低阶的过程.

首先写出 QED 中如下形式的拉氏量密度

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu - eA_\mu)\psi(x) - m\overline{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{5-1}$$

对应的运动方程是

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = eA_\mu\gamma^\mu\psi \tag{5-2}$$

$$\partial_v F^{\mu\nu} = e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{5-3}$$

以上方程是非线性耦合的, 难以得到解析解, 需要采用第 4 章提到的微扰近似来对物理量进行计算. 先讨论这个理论的一般性质.

5.1.1　量子化

将拉氏量写成如下形式:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{int}} \\
\mathcal{L}_0 &= \overline{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
\mathcal{L}_{\mathrm{int}} &= -e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu
\end{aligned}$$

其中, $\mathcal{L}_0$ 只包含二阶项, 即此前研究过的自由场的拉氏量, 而 $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ 是描述相互作用的部分.

费米场的共轭动量为

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_\alpha)} = \mathrm{i}\psi_\alpha^\dagger(x) \tag{5-4}$$

对于电磁场, 选择如下规范

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0 \tag{5-5}$$

得到共轭动量为

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A^i\right)} = -F^{0i} = E^i \tag{5-6}$$

由运动方程可得

$$\partial_\nu F^{0\nu} = e\psi^\dagger\psi \quad \Longrightarrow \quad -\nabla^2 A^0 = e\psi^\dagger\psi \tag{5-7}$$

因此 A^0 非零, 但也不是一个独立的动力学变量, 可由其他场量表示出来

$$A^0 = e\int \mathrm{d}^3x' \frac{\psi^\dagger\left(x',t\right)\psi\left(x',t\right)}{4\pi|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|} = e\int \frac{\mathrm{d}^3x'\rho\left(x',t\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{5-8}$$

对易关系取如下形式

$$\left\{\psi_\alpha\left(\boldsymbol{x},t\right),\psi_\beta^\dagger\left(\boldsymbol{x}',t\right)\right\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\right), \quad \left\{\psi_\alpha\left(\boldsymbol{x},t\right),\psi_\beta\left(\boldsymbol{x}',t\right)\right\} = \cdots = 0$$

$$\left[\dot{A}_i\left(\boldsymbol{x},t\right),A_j\left(\boldsymbol{x}',t\right)\right] = \mathrm{i}\delta_{ij}^{\mathrm{tr}}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\right)$$

其中

$$\delta_{ij}^{\mathrm{tr}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right) \tag{5-9}$$

由式 (5-8) 可以写出包含 A_0 的对易子

$$\left[A_0\left(\boldsymbol{x},t\right),\psi_\alpha\left(\boldsymbol{x}',t\right)\right] = e\int \frac{\mathrm{d}^3x''}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''|}\left[\psi^\dagger\left(\boldsymbol{x}'',t\right)\psi\left(\boldsymbol{x}'',t\right),\psi_\alpha\left(\boldsymbol{x}',t\right)\right] = -\frac{e}{4\pi}\frac{\psi_\alpha\left(\boldsymbol{x}',t\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{5-10}$$

哈密顿量为

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\psi_\alpha\right)}\dot{\psi}_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A^k\right)}\dot{A}_k - \mathcal{L} \\ &= \psi^\dagger\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m\right)\psi + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2\right) + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}A_0 + e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\end{aligned}$$

然而在哈密顿量中, 利用分部积分, $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}A_0$ 这一项将与最后一项 $e\overline{\psi}\gamma^0\psi A_0$ 相抵消,

$$H = \int \mathrm{d}^3x\mathcal{H} = \int \mathrm{d}^3x\left\{\psi^\dagger\left[\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}-e\boldsymbol{A}\right)+\beta m\right]\psi + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2\right)\right\} \tag{5-11}$$

因此 A_0 不会出现在相互作用中. 但如果写出

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_l + \boldsymbol{E}_t, \quad \boldsymbol{E}_l = -\boldsymbol{\nabla}A_0, \quad \boldsymbol{E}_t = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{5-12}$$

有

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2\right) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x{\boldsymbol{E}_l}^2 + \int \mathrm{d}^3x\left({\boldsymbol{E}_t}^2+\boldsymbol{B}^2\right) \tag{5-13}$$

纵向部分为

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{E}_l{}^2=\frac{e^2}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\frac{\rho\,(\boldsymbol{x},t)\,\rho\,(\boldsymbol{y},t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{5-14}$$

这就是密度为 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\rho(\boldsymbol{y},t)$ 的电荷分布之间 Coulomb 相互作用. 由此可以写出哈密顿量为

$$H=\int \mathrm{d}^3x\left\{\psi^\dagger\left[\boldsymbol{\alpha}\cdot(-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}-e\boldsymbol{A})+\beta m\right]\psi+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}_t{}^2+\boldsymbol{B}^2\right)\right\}+\frac{e^2}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\frac{\rho\,(\boldsymbol{x},t)\,\rho\,(\boldsymbol{y},t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{5-15}$$

注意第二项中的电磁场是横向的辐射场. 最后一项是静电场的相互作用.

尽管我们可以引入一组对易子和反对易子来实现量子化, 但要得到物理结果仍然很困难. 这是因为无法求解高度非线性的经典运动方程. 没有经典解, 就不能作模式展开以引入产生算符和湮没算符, 也很难找到哈密顿量的本征值和本征态. 在场论中, 我们所知的唯一的近似方法就是微扰论. 下面开始建立微扰论的框架.

由拉氏量的自由场部分 $\boldsymbol{A}_0$ 满足无质量的 Klein-Gordon 方程

$$\Box\,\boldsymbol{A}^{(0)}=0 \tag{5-16}$$

通解为

$$\boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}\sum_\lambda\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda)[a(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+a^+(k,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}],\quad w=k_0=|\boldsymbol{k}| \tag{5-17}$$

其中, $\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda)$ 是极化矢量, 满足

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda)=0,\quad \lambda=1,2 \tag{5-18}$$

一般选择

$$\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda')=\delta_{\lambda\lambda'},\quad \boldsymbol{\epsilon}(-k,1)=-\boldsymbol{\epsilon}(k,1),\quad \boldsymbol{\epsilon}(-k,2)=\boldsymbol{\epsilon}(-k,2) \tag{5-19}$$

可将末态展开的结果写成如下更方便的形式

$$A_\mu(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}\sum_\lambda\epsilon_\mu(k,\lambda)[a(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+a^+(k,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}] \tag{5-20}$$

其中

$$\epsilon_\mu(k,\lambda)=(0,\boldsymbol{\epsilon}(k,\lambda)) \tag{5-21}$$

5.1.2 光子的传播子

类似于标量场, 光子的 Feynman 传播子可定义为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}D_{\mu\nu}\left(x,x'\right) &= \left\langle 0\left|T\left(A_\mu\left(x\right)A_\nu\left(x'\right)\right)\right|0\right\rangle \\
&= \theta\left(t-t'\right)\left\langle 0\left|A_\mu\left(x\right)A_\nu\left(x'\right)\right|0\right\rangle + \theta\left(t'-t\right)\left\langle 0\left|A_\nu\left(x'\right)A_\mu\left(x\right)\right|0\right\rangle
\end{aligned}
$$

由模态展开, 可以得到

$$
\begin{aligned}
\left\langle 0\left|A_\mu\left(x\right)A_\nu\left(x'\right)\right|0\right\rangle &= \int\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}}\sum_{\lambda,\lambda'}\epsilon_\mu(k,\lambda)\epsilon_\nu(k',\lambda') \\
&\quad \left\langle 0\left|[a(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}]a^+(k',\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x'}\right|0\right\rangle \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2\omega_k}\sum_{\lambda,\lambda'}\epsilon_\mu(k,\lambda)\epsilon_\nu(k',\lambda')\delta^3\left(k-k'\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx+\mathrm{i}k'x'}\delta_{\lambda\lambda'} \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\sum_{\lambda}\epsilon_\mu(k,\lambda)\epsilon_\nu(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')}
\end{aligned}
$$

由于有

$$
\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}k_0}{k_0^2-\omega^2+\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\left(t-t'\right)} = \begin{cases} -\mathrm{i}\dfrac{1}{2\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}, & t>t' \\ -\mathrm{i}\dfrac{1}{2\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')}, & t'>t \end{cases} \tag{5-22}
$$

可以得到

$$
\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot\left(x'-x\right)}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon} = -\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left[\theta(t-t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')}+\theta(t-t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}\right] \tag{5-23}
$$

且

$$
\begin{aligned}
\left\langle 0\left|T\left(A_\mu\left(x\right)A_\nu\left(x'\right)\right)\right|0\right\rangle &= \int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\sum_{\lambda,\lambda'}\epsilon_\mu(k,\lambda)\epsilon_\nu(k,\lambda')[\theta(t-t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')} \\
&\quad +\theta(t-t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}] \\
&= \mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot\left(x'-x\right)}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\sum_{\lambda=1}^{2}\epsilon_\nu(k,\lambda)\epsilon_\mu(k,\lambda) = \mathrm{i}D_{\mu\nu}\left(x,x'\right)
\end{aligned}
$$

极化向量 $\epsilon_\mu(k,\lambda)(\lambda=1,2)$ 彼此垂直. 我们还需要另外两个互相垂直的单位向量来建立 Minkowski 空间的完备向量基. 容易看出可取

$$
\eta^\mu = (1,0,0,0)\,, \quad \hat{k}^\mu = \frac{k^\mu-(k\cdot\eta)\,\eta^\mu}{\sqrt{(k\cdot\eta)^2-k^2}} \tag{5-24}
$$

且完备关系有如下形式

$$\sum_{\lambda=1}^{2}\epsilon_{\nu}(k,\lambda)\epsilon_{\mu}(k,\lambda)=-g_{\mu\nu}-\eta_{\mu}\eta_{\nu}-\hat{k}_{\mu}\hat{k}_{\nu}$$

$$=-g_{\mu\nu}-\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k\cdot\eta)^{2}-k^{2}}+\frac{(k\cdot\eta)(k_{\mu}\eta_{\nu}+\eta_{\mu}k_{\nu})}{(k\cdot\eta)^{2}-k^{2}}-\frac{k^{2}\eta_{\mu}\eta_{\nu}}{(k\cdot\eta)^{2}-k^{2}}$$

定义动量空间的传播子为

$$D_{\mu\nu}(x,x')=\int\frac{\mathrm{d}^{4}k}{(2\pi)^{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x'-x)}D_{\mu\nu}(k) \tag{5-25}$$

则有

$$D_{\mu\nu}(k)=\frac{1}{k^{2}+\mathrm{i}\varepsilon}\left[-g_{\mu\nu}-\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k\cdot\eta)^{2}-k^{2}}+\frac{(k\cdot\eta)(k_{\mu}\eta_{\nu}+\eta_{\mu}k_{\nu})}{(k\cdot\eta)^{2}-k^{2}}-\frac{k^{2}\eta_{\mu}\eta_{\nu}}{(k\cdot\eta)^{2}-k^{2}}\right] \tag{5-26}$$

下面我们将会说明, 正比于 k_{μ} 的项对电流守恒的物理过程没有贡献, 且最后一项 $\eta_{\mu}\eta_{\nu}=\delta_{\mu0}\delta_{\nu0}$ 将被式 (5-14) 中的 Coulomb 相互作用抵消掉.

5.1.3 QED 中的 Feynman 规则

相互作用的哈密顿量有如下形式

$$H_{\mathrm{int}}=\mathrm{e}\int\mathrm{d}^{3}x\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} \tag{5-27}$$

Feynman 传播子, 顶点和外线波动方程如图 5-1 所示.

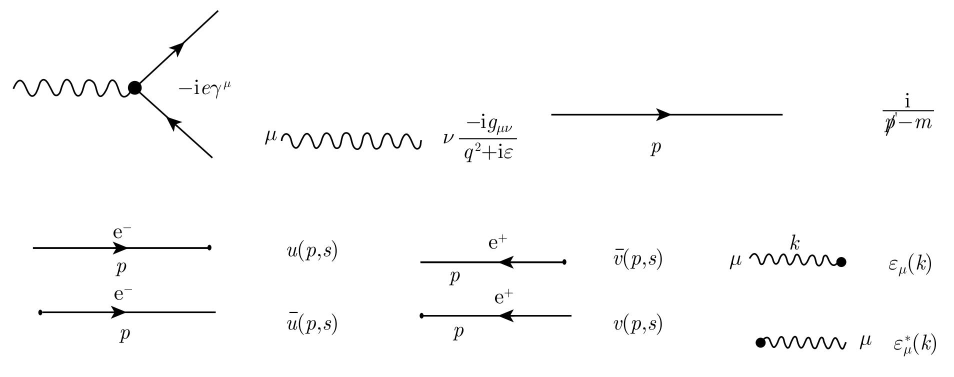


图 5-1 Feynman 传播子和顶点

5.2　e^+e^- 湮没

5.2.1　$\mathbf{e^+e^- \to \mu^+\mu^-}$

首先将这个过程的动量标记为

$$e^-(p) + e^+(p') \longrightarrow \mu^-(k) + \mu^+(k') \tag{5-28}$$

由 Feynman 规则, 可以写出图 5-2 对应的 Feynman 振幅

$$\begin{aligned} M(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) &= \overline{v}(p',s')(-ie\gamma^\mu)u(p,s)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)\overline{u}(k',r')(-ie\gamma^\nu)v(k,r) \\ &= \frac{ie^2}{q^2}\overline{v}(p',s')\gamma^\mu u(p,s)\,\overline{u}(k,r)\gamma_\mu v(k',r') \end{aligned}$$

其中, $q = p + p'$. 注意电子 - 光子顶点有如下性质

$$q_\mu \overline{v}(p')\gamma^\mu u(p) = (p+p')_\mu \overline{v}(p')\gamma^\mu u(p) = \overline{v}(p')(\not{p}+\not{p}')u(p) = 0 \tag{5-29}$$

这里利用了旋量的 Dirac 方程. 它是流守恒的结果, 并且表明光子传播子中与因子 $ig_{\mu\nu}$ 相加的正比于光子动量的项对物理过程并没有贡献.

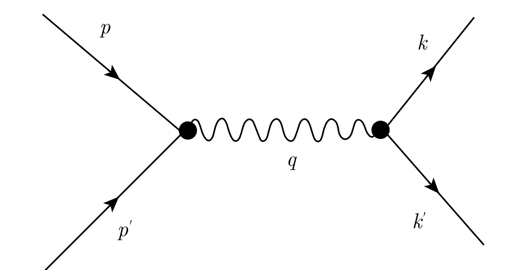


图 5-2　$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 最低阶的 Feynman 图

为计算散射截面, 需要求出 M^*, 其中 $(\overline{v}\gamma^\mu u)^*$ 可简化为

$$(\overline{v}\gamma^\mu u)^* = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma_0)^\dagger v = u^\dagger\gamma_0\gamma^\mu v = \overline{u}\gamma^\mu v \tag{5-30}$$

更一般的形式可以写为

$$(\overline{v}\varGamma u)^* = \overline{u}\overline{\varGamma}v, \quad \overline{\varGamma} = \gamma^0\varGamma^\dagger\gamma^0 \tag{5-31}$$

不难看出

$$\overline{\gamma}_\mu = \gamma_\mu \tag{5-32}$$

$$\overline{\gamma_\mu\gamma_5} = -\gamma_\mu\gamma_5 \tag{5-33}$$

$$\overline{\not{a}\not{b}\cdots\not{p}} = \not{p}\cdots\not{b}\not{a} \tag{5-34}$$

通常要计算的是非极化的散射截面, 需要对自旋求和

$$\sum_s u_\alpha(p,s)\,\overline{u}_\beta(p,s) = (\not{p}+m)_{\alpha\beta} \tag{5-35}$$

$$\sum_s v_\alpha(p,s)\,\overline{v}_\beta(p,s) = (\not{p}-m)_{\alpha\beta} \tag{5-36}$$

上式的推导如下. 从第 2 章中给出的自由旋量, 可以得到

$$\begin{aligned}\sum_s u_\alpha(p,s)\,\overline{u}_\beta(p,s) &= (E+m)\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\end{pmatrix}\sum_s \chi_s\chi_s^\dagger\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\end{pmatrix} \\ &= (E+m)\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} & \dfrac{-\boldsymbol{p}^2}{(E+m)^2}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E+m & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -E+m\end{pmatrix} = \not{p}+m\end{aligned}$$

对 v 旋量也有类似的结果

$$\begin{aligned}\sum_s v_\alpha(p,s)\,\overline{v}_\beta(p,s) &= (E+m)\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} \\ 1\end{pmatrix}\chi_s\chi_s^\dagger\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} & -1\end{pmatrix} \\ &= (E+m)\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{(E+m)^2} & -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} & -1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E-m & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -(E+m)\end{pmatrix} = \not{p}-m\end{aligned}$$

由上面的结果可得, 典型的对自旋求和的过程如下

$$\begin{aligned}&\sum_{s,s'}\overline{v}_\alpha(p',s')\,(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\,u_\beta(p,s)\,\bar{u}_\rho(p,s)\,(\gamma^\nu)_{\rho\sigma}\,v_\sigma(p',s') \\ =&\sum_{s'}\overline{v}_\alpha(p',s')\,(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\,(\not{p}+m)_{\beta\rho}\,(\gamma^\nu)_{\rho\sigma}\,v_\sigma(p',s') \\ =&(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\,(\not{p}+m)_{\beta\rho}\,(\gamma^\nu)_{\rho\sigma}\,(\not{p}'-m)_{\sigma\alpha} \\ =&\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu\,(\not{p}+m)\,\gamma^\nu\,(\not{p}'-m)\right]\end{aligned}$$

所以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\sum_{\text{自旋}}\left|M(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-\to\mu^+\mu^-)\right|^2\\=&\frac{e^4}{4q^4}\mathrm{tr}\left[(\not{p}'-m_\mathrm{e})\,\gamma^\mu\,(\not{p}+m_\mathrm{e})\,\gamma^\nu\right]\mathrm{tr}\left[(\not{k}+m_\mu)\,\gamma_\mu\,(\not{k}'-m_\mu)\,\gamma_\nu\right]\end{aligned}\tag{5-37}$$

现在需要计算 γ 矩阵乘积的迹. 计算过程很直截了当, 直接给出结果如下

$$\mathrm{tr}\,(\gamma^\mu)=0\tag{5-38}$$

$$\mathrm{tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu)=4g^{\mu\nu}\tag{5-39}$$

$$\mathrm{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\right)=4\left(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}+g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}\right)\tag{5-40}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n)=&(a_1\cdot a_2)\mathrm{tr}(\not{a}_3\cdots\not{a}_n)-(a_1\cdot a_3)\,\mathrm{tr}\,(\not{a}_2\cdots\not{a}_n)+\cdots\\&+(a_1\cdot a_n)\mathrm{tr}(\not{a}_2\not{a}_3\cdots\not{a}_{n-1}),\quad n\text{为偶数}\end{aligned}\tag{5-41}$$

这里不给出普遍证明, 只利用一些例子来说明. 从 Dirac 代数

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}\tag{5-42}$$

对等式两边取迹得到

$$\mathrm{tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu)=4g^{\mu\nu}\tag{5-43}$$

其中利用了

$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)\tag{5-44}$$

对于 4 个 γ 矩阵求迹的情况, 利用 Dirac 代数将最左边的 γ 矩阵一步步换到最右边

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(\not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4)=&2\,(a_1\cdot a_2)\,\mathrm{tr}\,(\not{a}_3\not{a}_4)-\mathrm{tr}\,(\not{a}_2\not{a}_1\not{a}_3\not{a}_4)\\=&8\,(a_1\cdot a_2)\,(a_3\cdot a_4)-2\,(a_1\cdot a_3)\,\mathrm{tr}\,(\not{a}_3\not{a}_4)+\mathrm{tr}\,(\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_1\not{a}_4)\\=&8\,(a_1\cdot a_2)\,(a_3\cdot a_4)-8\,(a_1\cdot a_3)\,(a_2\cdot a_4)+2\,(a_1\cdot a_4)\,\mathrm{tr}\,(\not{a}_2\not{a}_3)\\&-\mathrm{tr}\,(\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4\not{a}_1)\end{aligned}$$

利用迹恒等式 (5-44) 可见, 最后一项与我们所需要的结果只差一个负号, 因此

$$\mathrm{tr}\,(\not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4)=4[(a_1\cdot a_2)\,(a_3\cdot a_4)-(a_1\cdot a_3)\,(a_2\cdot a_4)+(a_1\cdot a_4)\,(a_2\cdot a_3)]\tag{5-45}$$

通过上面的例子可以看到对偶数个 γ 矩阵怎样导出结果. 对于奇数个 γ 矩阵, 有下面的结果

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n\right) =& \operatorname{tr}\left(\gamma_5^2\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n\right) = (-1)^n \operatorname{tr}\left(\gamma_5\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n\gamma_5\right) \\ &= (-1)^n \operatorname{tr}\left(\gamma_5^2\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n\right) = (-1)^n \operatorname{tr}\left(\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n\right)\end{aligned}$$

所以奇数个 γ 矩阵乘积的迹为 0.

利用上面这些结果, 可以得到

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left[\left(\not{p}'-m_{\mathrm{e}}\right)\gamma^\mu\left(\not{p}+m_{\mathrm{e}}\right)\gamma^\nu\right] &= \operatorname{tr}\left[\not{p}'\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu\right] - m^2\operatorname{tr}\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right] \\ &= 4\left[p'^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}\left(p\cdot p'\right) + p^\mu p'^\nu\right] - 4m_{\mathrm{e}}^2 g^{\mu\nu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left[\left(\not{k}+m_\mu\right)\gamma_\mu\left(\not{k}'-m_\mu\right)\gamma_\nu\right] &= \operatorname{tr}\left[\not{k}\gamma_\mu\not{k}'\gamma_\nu\right] - m_\mu^2\operatorname{tr}\left[\gamma_\mu\gamma_\nu\right] \\ &= 4\left[k_\mu k'_\nu - g_{\mu\nu}\left(k\cdot k'\right) + k'_\mu k_\nu\right] - 4m_\mu^2 g_{\mu\nu}\end{aligned}$$

通常我们感兴趣的是比 m_μ 更高能的区域的截面, 因此可以忽略 m_μ 和 m_{e}, 进而得到

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{自旋}}\left|M(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-\to\mu^+\mu^-)\right|^2 = 8\frac{e^4}{q^4}\left[(p\cdot k)\left(p'\cdot k'\right) + (p'\cdot k)\left(p\cdot k'\right)\right] \tag{5-46}$$

在质心系中, 可以将四动量写为

$$p_\mu = (E,0,0,E)\,,\quad p'_\mu = (E,0,0,-E) \tag{5-47}$$

$$k_\mu = (E,\boldsymbol{k})\,,\quad k'_\mu = (E,-\boldsymbol{k})\,,\quad \boldsymbol{k}\cdot\hat{z} = |\boldsymbol{k}|\cos\theta \tag{5-48}$$

其中, θ 是散射角; E 是 e^+ 或 e^- 的能量, 是质心系能量的一半. 在 $m_\mu=0$ 的近似条件下有 $E=|\boldsymbol{k}|$ 且

$$q^2 = (p+p')^2 = 4E^2,\quad p\cdot k = p'\cdot k' = E^2(1-\cos\theta) \tag{5-49}$$

$$p'\cdot k = p\cdot k' = E^2(1+\cos\theta) \tag{5-50}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{\text{自旋}}|M|^2 &= \frac{8e^4}{16E^4}\left[E^4(1-\cos\theta)^2 + E^4(1+\cos\theta)^2\right] \\ &= e^4\left(1+\cos^2\theta\right)\end{aligned}$$

这个过程的散射截面与振幅的关系为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{I}\frac{1}{2E}\frac{1}{2E}(2\pi)^4\delta^4(p+p'-k-k')\frac{1}{4}\sum_{\text{自旋}}|M|^2\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'} \tag{5-51}$$

可以利用 δ 函数完成一部分积分. 为了简便起见, 引入变量 ρ, 称为相空间 (phase space), 定义为

$$\begin{aligned}\rho &= \int(2\pi)^4\delta^4(p+p'-k-k')\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'}\\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int\delta\left(2E-\omega-\omega'\right)\frac{\mathrm{d}^3k}{4\omega\omega'} = \frac{1}{32\pi^2}\int\delta\left(E-\omega\right)\frac{k^2\mathrm{d}k\mathrm{d}\Omega}{\omega^2} = \frac{\mathrm{d}\Omega}{32\pi^2}\end{aligned}$$

流强因子 (flux factor) 为

$$I = \frac{1}{E_1E_2}\sqrt{\left(p_1\cdot p_2\right)^2 - m_1^2m_2^2} = \frac{1}{E^2}2E^2 = 2 \tag{5-52}$$

微分截面可由此写出

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\frac{1}{4E^2}\left(\frac{1}{4}\sum_{\text{自旋}}|M|^2\right)\frac{\mathrm{d}\Omega}{32\pi^2} \tag{5-53}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{16E^2}\left(1+\cos^2\theta\right) \tag{5-54}$$

式中, $\alpha = \dfrac{e^2}{4\pi}$ 是精细结构常数. 总的散射截面可由此得到

$$\sigma\left(\mathrm{e^+e^-}\longrightarrow\mu^+\mu^-\right) = \frac{\alpha^2\pi}{3E^2} \tag{5-55}$$

即

$$\sigma\left(\mathrm{e^+e^-}\longrightarrow\mu^+\mu^-\right) = \frac{4\alpha^2\pi}{3s}, \quad s = \left(p_1+p_2\right)^2 = 4E^2 \tag{5-56}$$

这个散射截面在测量其他的 $\mathrm{e^+e^-}$ 碰撞过程中常被作为参考值. 注意, 这个散射截面随着入射能量的升高而减小, 在极高的质心系能量下趋向极小.

5.2.2 $\mathrm{e^+e^-}\longrightarrow$ 强子

$\mathrm{e^+e^-}$ 对撞机中一个很值得探讨的反应是

$$\mathrm{e^+e^-}\longrightarrow \text{强子} \tag{5-57}$$

这个反应将为我们研究强子的结构提供有用的信息.

根据后面会讲到的量子色动力学 (quantum chromodynamics, QCD)—— 描述强相互作用的理论, 这个反应过程在能量足够大时, 将先经过

$$\mathrm{e^+e^-}\longrightarrow \mathrm{q\bar{q}} \tag{5-58}$$

然后 $\mathrm{q\bar{q}}$ 再变成强子. 假定光子与 $\mathrm{q\bar{q}}$ 和 $\mu^+\mu^-$ 的耦合常数的差别仅来源于电荷的不同, 可以将 $\mathrm{e^+e^-}\longrightarrow\mathrm{q\bar{q}}$ 的散射截面写为

$$\sigma\left(e^+e^- \longrightarrow q\bar{q}\right) = 3\left(Q_q^2\right)\frac{4\alpha^2\pi}{3s} = 3\left(Q_q^2\right)\sigma\left(e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-\right) \tag{5-59}$$

其中, Q_q 是夸克 q 的带电量. 这里之所以将散射截面乘以因子 3, 是因为考虑到夸克有三种颜色. 由此产生强子的散射截面为

$$\frac{\sigma\left(e^+e^- \longrightarrow \text{强子}\right)}{\sigma\left(e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-\right)} = 3\left(\sum_i Q_i^2\right) \tag{5-60}$$

这里将 $e^+e^- \longrightarrow$ 强子的过程用它的散射截面与 $\sigma(e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-)$ 的散射截面之比来表示, 其比值 R 是与能量无关的数值. 以上求和只考虑能量允许的夸克对. 例如, 在低于粲夸克的能量下, 只有 u, d 和 s 需要考虑

$$\frac{\sigma\left(e^+e^- \longrightarrow \text{强子}\right)}{\sigma\left(e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-\right)} = 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = 2 \tag{5-61}$$

这个结果与实验数据 (图 5-3) 符合得很好.

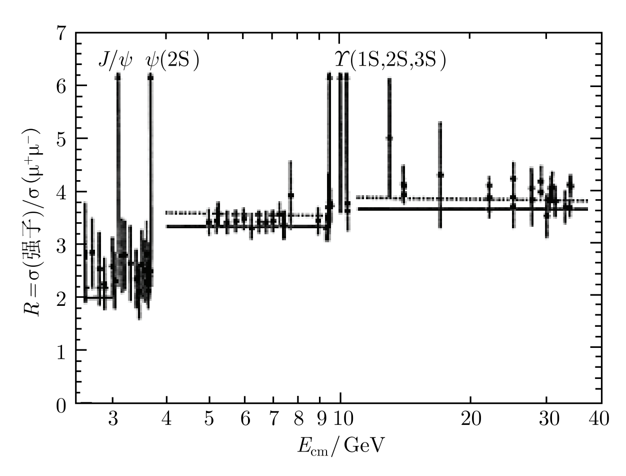


图 5-3　$e^+e^- \longrightarrow$ 强子散射截面与 $e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$ 散射截面之比

5.3　$ep \longrightarrow ep$

现在考虑电子与质子的弹性散射

$$e(k) + p(p) \longrightarrow e(k') + p(p') \tag{5-62}$$

一般来讲, 质子是强子, 需要考虑强相互作用. 但为了简单起见, 目前只考虑质子没有强相互作用的情形 (图 5-4), 在后文中再讨论加入强相互作用的影响.

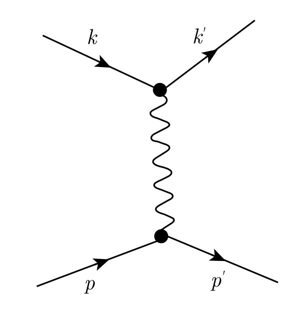


图 5-4 ep ⟶ ep 的 Feynman 图

5.3.1 质子作为点粒子

回顾 μ 和光子的散射, 入射 μ 为 $u\,(p,s)$, 出射 μ 为 $\bar{u}\,(p',s')$, 则

$$\langle\mu\,(p',s')\,|J^\mu|\,\mu\,(p,s)\rangle=\overline{u}(p',s')\gamma^\mu u\,(p,s) \tag{5-63}$$

这里 J^μ 为电磁流, 可以写为

$$J^\mu=\overline{\psi}_\mu\gamma^\mu\psi_\mu \tag{5-64}$$

当略去强相互作用时, 可以将光子 − 质子顶点写为

$$\langle p\,(p',s')\,|J^\mu|\,p\,(p,s)\rangle=\overline{u}(p',s')\gamma^\mu u\,(p,s) \tag{5-65}$$

注意电磁流是守恒的, 即

$$\partial_\mu J^\mu=0 \tag{5-66}$$

我们将对光子 $-\mu$ 或光子 − 质子顶点验证这个关系.

为了计算电磁流的散度, 需要写出 J^μ 是怎样随时空 x 变化的. 可以利用时空平移算符做到这一点. 对任意一个算符 $A(x)$, 有

$$[P^\mu,A\,(x)]=-\mathrm{i}\partial^\mu A\,(x) \tag{5-67}$$

利用恒等式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}=B+\mathrm{i}\,[A,B]+\frac{\mathrm{i}^2}{2!}\,[A,[A,B]]+\cdots,\quad A,B\text{为任意两个算符} \tag{5-68}$$

有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}P\cdot a}A\,(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot a}&=A\,(x)+\mathrm{i}a_\mu\,[P^\mu,A\,(x)]+\frac{\mathrm{i}^2}{2!}a_\mu a_\nu\,[P^\mu,[P^\nu,A\,(x)]]+\cdots\\&=A\,(x)+\mathrm{i}a_\mu\,(-\mathrm{i}\partial^\mu)\,A\,(x)+\frac{\mathrm{i}^2}{2!}a_\mu a_\nu\,(-\mathrm{i}\partial^\mu)\,(-\mathrm{i}\partial^\nu)\,A\,(x)+\cdots\\&=A\,(x+a)\end{aligned}$$

这里利用了 Taylor 展开

$$A\left(x+a\right)=\left(1+a_{\mu}\partial^{\mu}+\frac{a_{\mu}a_{\nu}\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{2!}+\cdots\right)A(x) \tag{5-69}$$

上述结果说明能动量算符 P^{μ} 生成时空平移. 可以利用这个关系将时空的依赖从算符中提取出来, 对本例, 电磁流 J^{μ} 为

$$J^{\mu}\left(x\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}P\cdot x}J^{\mu}\left(0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot x} \tag{5-70}$$

代回质子的矩阵元, 得到

$$\left\langle p\left(p',s'\right)\left|J^{\mu}\left(x\right)\right|p\left(p,s\right)\right\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p'-p)\cdot x}\left\langle p\left(p',s'\right)\left|J^{\mu}\left(0\right)\right|p\left(p,s\right)\right\rangle \tag{5-71}$$

以及

$$\partial_{\mu}\left\langle p\left(p',s'\right)\left|J^{\mu}\left(x\right)\right|p\left(p,s\right)\right\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p'-p)\cdot x}\mathrm{i}\left(p'_{\mu}-p_{\mu}\right)\left\langle p\left(p',s'\right)\left|J^{\mu}\left(0\right)\right|p\left(p,s\right)\right\rangle \tag{5-72}$$

现在可以验证流守恒 $\partial_{\mu}J^{\mu}=0$ 如下

$$\begin{aligned}\left(p'_{\mu}-p_{\mu}\right)\left\langle p\left(p',s'\right)\left|J^{\mu}\left(0\right)\right|p\left(p,s\right)\right\rangle&=\left(p'_{\mu}-p_{\mu}\right)\overline{u}(p',s')\gamma^{\mu}u\left(p,s\right)\\&=\overline{u}(p',s')\left(\not{p}'-\not{p}\right)u\left(p,s\right)=0\end{aligned} \tag{5-73}$$

这里用到了旋量 $\overline{u}(p',s')$ 和 $u\left(p,s\right)$ 满足 Dirac 方程. 为了方便起见, 将它写成

$$q_{\mu}\overline{u}(p',s')\gamma^{\mu}u\left(p,s\right)=0,\quad q=p'-p \tag{5-74}$$

最低阶的贡献来自于两者间交换一个光子, 其振幅可以写为如下形式

$$\begin{aligned}M(\mathrm{e}+\mathrm{p}\longrightarrow\mathrm{e}+\mathrm{p})&=\overline{u}(p',s')\left(-\mathrm{i}e\gamma^{\mu}\right)u\left(p,s\right)\left(\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{q^{2}}\right)\overline{u}(k',r')\left(-\mathrm{i}e\gamma^{\nu}\right)u\left(k,r\right)\\&=\frac{\mathrm{i}e^{2}}{q^{2}}\overline{u}(p',s')\gamma^{\mu}u\left(p,s\right)\overline{u}(k',r')\gamma_{\mu}u\left(k,r\right)\end{aligned}$$

其中, $q=k-k'$. 对于不考虑极化的散射截面, 需要对末态自旋求和, 对初态自旋求平均:

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{自旋}}\left|M(\mathrm{e}+\mathrm{p}\longrightarrow\mathrm{e}+\mathrm{p})\right|^{2}=\frac{e^{4}}{q^{4}}\mathrm{tr}\left[\left(\not{p}'+M\right)\gamma^{\mu}\left(\not{p}+M\right)\gamma^{\nu}\right]\mathrm{tr}\left[\left(\not{k}'+m_{\mathrm{e}}\right)\gamma_{\mu}\left(\not{k}+m_{\mathrm{e}}\right)\gamma^{\nu}\right] \tag{5-75}$$

其中, M 是质子质量. 仍然忽略电子质量, 容易计算出矩阵乘积的迹为

$$\mathrm{tr}\left[\not{k}'\gamma_{\mu}\not{k}\gamma^{\nu}\right]=4\left[k'^{\mu}k^{\nu}-g^{\mu\nu}\left(k\cdot k'\right)+k^{\mu}k'^{\nu}\right] \tag{5-76}$$

$$\mathrm{tr}\left[\left(\not{p}' + M\right)\gamma^{\mu}\left(\not{p} + M\right)\gamma^{\nu}\right] = 4\left[p'^{\mu}p^{\nu} - g^{\mu\nu}\left(p \cdot p'\right) + p^{\mu}p'^{\nu}\right] + 4M^2 g^{\mu\nu} \tag{5-77}$$

可得

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{自旋}}\left|M(\mathrm{e}^{+}\mathrm{e}^{-} \longrightarrow \mu^{+}\mu^{-})\right|^2 = \frac{e^4}{q^4}\left\{8\left[(p \cdot k)\left(p' \cdot k'\right) + (p' \cdot k)\left(p \cdot k'\right)\right] - 8M^2\left(k \cdot k'\right)\right\} \tag{5-78}$$

考虑在实验室坐标系的情形

$$p_{\mu} = (M, 0, 0, 0), \quad k_{\mu} = (E, \boldsymbol{k}), \quad k'_{\mu} = \left(E', \boldsymbol{k}'\right) \tag{5-79}$$

有

$$p \cdot k = ME, \quad p \cdot k' = ME', \quad k \cdot k' = EE'\left(1 - \cos\theta\right) \tag{5-80}$$

$$p' \cdot k' = (p + k - k') \cdot k' = p \cdot k' + k \cdot k', \quad p' \cdot k = (p + k - k') \cdot k = p.k - k \cdot k' \tag{5-81}$$

$$q^2 = \left(k - k'\right)^2 = -2k \cdot k' = -2EE'\left(1 - \cos\theta\right) \tag{5-82}$$

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{I}\frac{1}{2p_0}\frac{1}{2k_0}(2\pi)^4\delta^4(p + k - p' - k')\frac{1}{4}\sum_{\text{自旋}}|M|^2\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3 2p'_0}\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \tag{5-83}$$

相空间为

$$\begin{aligned}\rho &= \int(2\pi)^4\delta^4(p + k - p' - k')\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3 2p'_0}\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int\delta\left(p_0 + k_0 - p'_0 - k'_0\right)\frac{\mathrm{d}^3k'}{2p'_0 2k'_0}\end{aligned} \tag{5-84}$$

其中

$$p'_0 = \sqrt{M^2 + \left(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'\right)^2} = \sqrt{M^2 + \left(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'\right)^2} \tag{5-85}$$

利用实验室坐标系中的动量关系, 可以得到

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{4\pi^2}\int\delta\left(M + E - p'_0 - E'\right)\frac{k'^2\mathrm{d}k'\mathrm{d}\Omega}{2p'_0 2E'} \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int\delta\left(M + E - p'_0 - E'\right)\frac{\mathrm{d}\Omega E'\mathrm{d}E'}{p'_0}\end{aligned}$$

令

$$x = -E + p'_0 + E' \tag{5-86}$$

有

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}E'\left(1 + \frac{\mathrm{d}p'_0}{\mathrm{d}E'}\right) = \mathrm{d}E'\left(\frac{p'_0 + E' - E\cos\theta}{p'_0}\right) \tag{5-87}$$

且

$$\rho = \frac{1}{4\pi^2}\int \delta\left(x - M\right)\frac{\mathrm{d}\Omega E'\mathrm{d}x}{p_0' + E' - E\cos\theta} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{\mathrm{d}\Omega E'}{M + E\left(1 - \cos\theta\right)} \tag{5-88}$$

由 δ 函数可以得到关系式

$$M = x = -E + p_0' + E' \tag{5-89}$$

根据动量守恒的要求

$$p_0'^2 = M^2 + \left(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'\right)^2 = M^2 + E^2 + E'^2 - 2EE'\cos\theta \tag{5-90}$$

类似地, 能量守恒则要求

$$p_0'^2 = \left(M + E - E'\right)^2 = M^2 + E^2 + E'^2 - 2EE' + 2ME - 2ME' \tag{5-91}$$

比较以上两个方程, 可以解出 E' 为

$$E' = \frac{ME}{E\left(1 - \cos\theta\right) + M} = \frac{E}{1 + \left(\dfrac{2E}{M}\right)\sin^2\dfrac{\theta}{2}} \tag{5-92}$$

相空间因此写为

$$\rho = \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi^2}\frac{ME}{\left[M + E\left(1 - \cos\theta\right)\right]^2} = \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi^2}\frac{E'^2}{ME} \tag{5-93}$$

流强因子为

$$I = \frac{1}{ME}p\cdot k = 1 \tag{5-94}$$

微分截面为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{I}\frac{1}{2p_0}\frac{1}{2k_0}(2\pi)^4\delta^4(p + k - p' - k')\frac{1}{4}\sum_{\text{自旋}}|M|^2\,\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3 2p_0'}\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2k_0'} \tag{5-95}$$

即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} =& \frac{1}{4ME}\frac{1}{4\pi^2}\frac{E'^2}{ME}\frac{1}{4}\sum_{\text{自旋}}|M|^2 \\ =& \left(\frac{E'}{E}\right)^2\frac{1}{16\pi^2M^2}\frac{e^4}{q^4}\left\{8\left[(p\cdot k)\left(p'\cdot k^{'}\right) + (p'\cdot k)\left(p\cdot k^{'}\right)\right] - 8M^2\left(k\cdot k'\right)\right\}\end{aligned} \tag{5-96}$$

容易计算出上式右边的项

$$
\begin{aligned}
& [(p\cdot k)(p'\cdot k')+(p'\cdot k)(p\cdot k')]-M^2(k\cdot k') \\
=& (p\cdot k)(p+k-k')\cdot k'+(p\cdot k')(p+k-k')\cdot k-M^2(k\cdot k') \\
=& 2EE'M^2+(k\cdot k')\left(p\cdot q-M^2\right) \\
=& 2EE'M^2+M^2EE'(1-\cos\theta)\left(-\frac{q^2}{2M^2}-1\right) \\
=& 2EE'M^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

由此得到微分截面

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varOmega} &= \left(\frac{E'}{E}\right)^2\frac{\alpha^2}{M^2}\frac{1}{\left(4EE'\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)^2}2EE'M^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \frac{\alpha^2}{4}\frac{E'}{E^3}\frac{1}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

即

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varOmega}=\frac{\alpha^2}{4E^2}\frac{1}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}}\frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{q^2}{2M^2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\dfrac{2E}{M}\sin^2\dfrac{\theta}{2}} \tag{5-97}
$$

这里将质子视为与 μ 子一样的基本粒子得到了散射截面. 这个结果可以用于电子波长远大于质子大小的情况. 实际的散射截面与以上由点电荷假设计算得到的散射截面存在差别, 这个差别来自于质子的内部结构.

5.3.2 强相互作用的影响

真实的质子会发生强相互作用, 由于强相互作用耦合常数很大, 无法应用微扰论, 其结果很难计算. 我们将看到, 在这个简单的情况下, 可以利用一些一般性的分析将强作用包含进去. 我们想要研究质子电磁流的矩阵元 $\langle p',s'|J_\mu|p,s\rangle$ 在强作用下有什么样的结构. 在没有可靠的强相互作用理论时, 我们并不知道怎样写下真正的电磁流 J_μ. 在夸克模型中我们可以写下用夸克场表示的 J_μ, 但这并不十分有用, 因为我们并不知道用夸克场表示的质子波函数. 幸运的是, 在这个简单的情况下, 我们仅利用一些一般的性质, 如 Lorentz 不变性、宇称守恒和流守恒, 就能得到一些很有用的信息. 首先, 我们写下满足 Lorentz 结构的所有可能的

项, 也就是矩阵元 $\langle p', s' | J_\mu | p, s\rangle$ 里的四矢量, 它们是

$$V_1^\mu = \overline{u}(p')\gamma^\mu u(p), \quad V_2^\mu = \overline{u}(p')\sigma^{\mu\nu}(p-p')_\nu u(p), \quad V_3^\mu = \bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}(p+p')_\nu u(p)$$
$$V_4^\mu = \overline{u}(p')(p+p')^\mu u(p), \quad V_5^\mu = \overline{u}(p')(p-p')^\mu u(p)$$

这里利用了宇称守恒, 所以与 γ_5 有关的项不出现. 现在我们来检查这些项是否满足流守恒. 容易看出

$$(p-p')_\mu V_3^\mu \neq 0, \quad (p-p')_\mu V_5^\mu \neq 0 \tag{5-98}$$

而其余是满足流守恒的. 下面证明 V_4^μ 可以写成 V_1^μ 和 V_2^μ 的线性组合. 为此需要利用一个重要的关系 ——Gordon 分解:

$$\overline{u}(p')\gamma_\mu u(p) = \overline{u}(p')\left[\frac{(p+p')^\mu}{2m} + \frac{\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu}{2m}\right]u(p) \tag{5-99}$$

其推导过程如下.

由 Dirac 方程, 可以得到

$$(\not{p} - m)u(p) = 0, \quad \overline{u}(p')(\not{k}' - m) = 0 \tag{5-100}$$

且

$$\overline{u}(p')\gamma^\mu(\not{p} - m)u(p) = 0, \quad \overline{u}(p')(\not{p}' - m)\gamma^\mu u(p) = 0 \tag{5-101}$$

加和得到

$$\begin{aligned}2m\overline{u}(p')\gamma_\mu u(p) =& \bar{u}(p')\left(\gamma_\mu\not{p} + \not{p}'\gamma_\mu\right)u(p) = \overline{u}(p')\left(p^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu + p'^\nu\gamma_\nu\gamma_\mu\right)u(p)\\ =& \overline{u}(p')\Bigg[p^\nu\left(\frac{1}{2}\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} + \frac{1}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\right)\\ &+ p'^\nu\left(\frac{1}{2}\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} - \frac{1}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\right)\Bigg]u(p)\end{aligned}$$

因此可得

$$\overline{u}(p')\gamma_\mu u(p) = \overline{u}(p')\left[\frac{(p+p')^\mu}{2m} + \frac{\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu}{2m}\right]u(p) \tag{5-102}$$

由此看到 V_4^μ 可以写成 V_1^μ 和 V_2^μ 的线性组合. 因此, 该矩阵元最普遍的形式为

$$\langle p' | J_\mu | p\rangle = \overline{u}(p', s')\left[\gamma^\mu F_1\left(q^2\right) + \frac{\mathrm{i}\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2M}F_2\left(q^2\right)\right]u(p, s), \quad q = p - p' \tag{5-103}$$

其中, F_1 和 F_2 是 Lorentz 不变的任意函数, 这样它们与 V_1^μ 和 V_2^μ 的乘积在 Lorentz 变换时不会改变性质. 由于 F_1 和 F_2 是 Lorentz 不变, 因此它们必须是

Lorentz 不变量的函数, 如 p^2、p'^2 和 $q^2=(p-p')^2$. 由于 $p^2=p'^2=M^2$, 因此 F_1 和 F_2 只能依赖于 q^2,

$$F_1=F_1\left(q^2\right),\quad F_2=F_2\left(q^2\right) \tag{5-104}$$

在方程 (5-103) 中, $F_1\left(q^2\right)$ 称为**电荷形状因子**(charge form factor), 而 $F_2\left(q^2\right)$ 称为**磁形状因子**(magnetic form factor). 这两个因子包含了所有强相互作用的影响. 当 $F_1\left(q^2\right)=1$ 且 $F_2\left(q^2\right)=0$ 时, 对应的是质子被视为点粒子的情形. 通过以上推导, 我们发现强相互作用的效果竟然可以简单地参量化而得到两个标量函数, 即 $F_{1,2}\left(q^2\right)$. 实验测得的这两个形状因子的值为质子结构的研究提供了极有价值的信息. 电荷的形状因子满足 $F_1(0)=1$. 这一限制来源于质子的总电量为 1 的事实, 推导过程如下:

$$Q\left|p\right\rangle=\left|p\right\rangle \tag{5-105}$$

有

$$\left\langle p'\left|Q\right|p\right\rangle=\left\langle p'|p\right\rangle=2E\left(2\pi\right)^3\delta^3\left(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'\right) \tag{5-106}$$

又由方程 (5-103) 得到

$$\begin{aligned}\left\langle p'\left|Q\right|p\right\rangle&=\int\mathrm{d}^3x\left\langle p'\left|J_0\left(x\right)\right|p\right\rangle=\int\mathrm{d}^3x\left\langle p'\left|J_0\left(0\right)\right|p\right\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(p'-p\right)\cdot x}\\&=\left(2\pi\right)^3\delta^3\left(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'\right)\overline{u}(p',s')\gamma_0u\left(p,s\right)F_1\left(0\right)\\&=2E\left(2\pi\right)^3\delta^3\left(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'\right)F_1\left(0\right)\end{aligned}$$

这意味着 $F_1(0)=1$. 为了更深入地讨论形状因子, 将电荷算符 Q 写成电荷密度的积分形式

$$Q=\int\mathrm{d}^3x\rho\left(x\right)=\int\mathrm{d}^3xJ_0\left(x\right) \tag{5-107}$$

有

$$\left\langle p'\left|J_0\left(x\right)\right|p\right\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle p'\left|J_0\left(0\right)\right|p\right\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}F_1\left(q^2\right)\overline{u}(p',s')\gamma_0u\left(p,s\right) \tag{5-108}$$

这里, $F_1\left(q^2\right)$ 可被视为电荷密度分布的 Fourier 变换形式, 即

$$F_1\left(q^2\right)\sim\int\mathrm{d}^3x\rho\left(x\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{5-109}$$

并给出质子内部电量分布的信息. 将形状因子 $F_1\left(q^2\right)$ 按照 q^2 的阶次展开

$$F_1\left(q^2\right)=F_1\left(0\right)+q^2F_1'\left(0\right)+\cdots \tag{5-110}$$

可以看出 $F_1(0)$ 即为总的电荷, $F_1'(0)$ 与电荷分布的平均半径有关. 这可由下面的推导看出. 取电荷球对称分布的简单情况 $\rho(\boldsymbol{x})=\rho(r)$, 则

$$
\begin{aligned}
F_1\left(q^2\right) &= \int \mathrm{d}^3x\rho(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} = 2\pi\int_0^\infty r^2\mathrm{d}r\rho(r)\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}qr\cos\theta} \\
&= 2\pi\int_0^\infty r^2\mathrm{d}r\rho(r)\,\frac{1}{\mathrm{i}qr}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}qr}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qr}] \\
&= \frac{4\pi}{q}\int_0^\infty r\mathrm{d}r\rho(r)\sin qr = \frac{4\pi}{q}\int_0^\infty r\mathrm{d}r\rho(r)\left[qr-\frac{(qr)^3}{6}+\cdots\right] = Q-\frac{q^2}{6}\left\langle r^2\right\rangle+\cdots
\end{aligned}
$$

其中

$$
Q=4\pi\int_0^\infty r^2\mathrm{d}r\rho(r)=\int_0^\infty \mathrm{d}^3x\rho(r),\quad \left\langle r^2\right\rangle=4\pi\int_0^\infty r^4\mathrm{d}r\rho(r)=\int_0^\infty \mathrm{d}^3xr^2\rho(r) \tag{5-111}
$$

类似地, 可以得到考虑形状因子的微分截面形式

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\alpha^2}{4E^2}\frac{\left[\cos^2\frac{\theta}{2}\frac{1}{1-q^2/4M^2}\left[G_E^2-\left(q^2/4M^2\right)G_M^2\right]-\frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}G_M^2\right]}{\sin^4\frac{\theta}{2}\left[1+\frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]} \tag{5-112}
$$

其中

$$
G_E=F_1+\frac{q^2}{4M^2}F_2 \tag{5-113}
$$

$$
G_M=F_1+F_2 \tag{5-114}
$$

注意微分截面 $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ 不含 G_E 和 G_M 的交叉项, 这简化了实验对形状因子的测量. 实验上质子的 G_E 和 G_M 由下式给出

$$
G_E\left(q^2\right)\approx\frac{G_M\left(q^2\right)}{\varkappa_p}\approx\frac{1}{\left(1-q^2/0.7\mathrm{GeV}^2\right)} \tag{5-115}
$$

其中, $\varkappa_p=2.79$ 是质子的磁矩. 当质子是点粒子时, 有 $G_E\left(q^2\right)=G_M\left(q^2\right)=1$. 因此, 方程 (5-115) 包含不可忽略的 q^2 项, 即意味着质子有内部结构. 在 q^2 很大时, 弹性散射截面按 $G_E\approx G_M\sim q^{-4}$ 迅速减小.

5.4 Compton 散 射

Compton 散射曾是建立起电磁波的粒子说的重要根据. 假设光子带有能量和动量, 利用能动量守恒可以计算得到散射过程中光子的频移. 实验观察到这个频移, 并由此建立起了光子的粒子性.

γ 和 e 的动量为

$$\gamma(k) + \mathrm{e}(p) \longrightarrow \gamma(k') + \mathrm{e}(p') \tag{5-116}$$

在微扰展开的最低阶有两个 Feynman 图对物理过程有贡献 (图 5-5), 对应的 Feynman 振幅由下式给出

$$\begin{aligned} M(\gamma\mathrm{e} \to \gamma\mathrm{e}) = & \overline{u}(p')(-\mathrm{i}e\gamma^{\mu})\varepsilon'_{\mu}(k')\frac{\mathrm{i}}{\not{p}+\not{k}-m}(-\mathrm{i}e\gamma^{\nu})\varepsilon_{\nu}(k)u(p) \\ & + \overline{u}(p')(-\mathrm{i}e\gamma^{\mu})\varepsilon_{\mu}(k)\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-\not{k}'-m}(-\mathrm{i}e\gamma^{\nu})\varepsilon'_{\nu}(k')u(p) \end{aligned}$$

注意到, 如果将振幅写为

$$M = \varepsilon'_{\mu}(k')M^{\mu} \tag{5-117}$$

其中, $\epsilon'_{\mu}(k')$ 是末态光子的极化矢量. 用动量 k' 替代这个极化矢量, 得到

$$k'_{\mu}M^{\mu} = -\mathrm{i}e^2\left[\overline{u}(p')\not{k}'\frac{1}{\not{p}+\not{k}-m}\gamma^{\nu}\varepsilon_{\nu}(k)u(p) + \overline{u}(p')\gamma^{\mu}\varepsilon_{\mu}(k)\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-\not{k}'-m}\not{k}'u(p)\right] \tag{5-118}$$

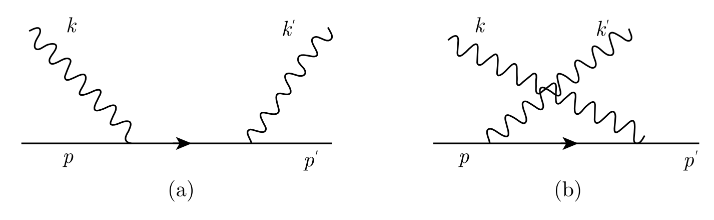


图 5-5 Compton 散射最低阶 Feynman 图

利用以下关系式

$$\not{k}' = (\not{p}' + \not{k}' - m) - (\not{p}' - m) = (\not{p} - m) - (\not{p} - \not{k}' - m) \tag{5-119}$$

可以得到

$$k'_{\mu}M^{\mu} = -\mathrm{i}e^2[\overline{u}(p')\gamma^{\nu}\varepsilon_{\nu}(k)u(p) - \overline{u}(p')\gamma^{\mu}\varepsilon_{\mu}(k)u(p)] = 0 \tag{5-120}$$

这是规范不变性的结果. 类似地可以证明, 如果用 k_{μ} 替代 $\varepsilon_{\mu}(k)$, 振幅同样为零. 利用这个结果, 可以将对光子极化求和的结果简化如下. 令极化矢量为

$$\varepsilon_{\mu}(k,1) = (0,1,0,0), \quad \varepsilon_{\mu}(k,2) = (0,0,1,0), \quad k_{\mu} = (k,0,0,k) \tag{5-121}$$

对极化矢量求和有

$$\sum_{\lambda}|\varepsilon_{\mu}(k,\lambda)M^{\mu}|^2 = |M^1|^2 + |M^2|^2 \tag{5-122}$$

然而从 $k_\mu M^\mu = 0$ 可以得到

$$M^0 = M^3 \implies \left|M^0\right|^2 = \left|M^3\right|^2 \tag{5-123}$$

因此

$$\sum_\lambda \left|\varepsilon_\mu\left(k,\lambda\right)M^\mu\right|^2 = \left|M^1\right|^2 + \left|M^2\right|^2 + \left|M^3\right|^2 - \left|M^0\right|^2 = -g_{\mu\nu}M^\mu M^{*\nu} \tag{5-124}$$

等价于下式中的替换

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu\left(k,\lambda\right)\varepsilon_\mu\left(k,\lambda\right) \to -g_{\mu\nu} \tag{5-125}$$

上式间接证明了前文关于光子传播子的推导中给出的结论, $-g_{\mu\nu}$ 可被用于计算对极化方向求和.

将散射振幅分母中的 γ 矩阵放在分子上

$$M = -\mathrm{i}e^2\varepsilon'_\mu\varepsilon_\nu\left[\overline{u}(p')\gamma^\mu\frac{\not{p}+\not{k}+m}{2p\cdot k}\gamma^\nu u\left(p\right) + \overline{u}(p')\gamma^\nu\frac{\not{p}-\not{k}'+m}{-2p\cdot k'}\gamma^\mu u\left(p\right)\right] \tag{5-126}$$

利用

$$\left(\not{p}+m\right)\gamma^\nu u\left(p\right) = 2p^\nu u\left(p\right) \tag{5-127}$$

可得

$$M = -\mathrm{i}e^2\overline{u}(p')\left[\frac{\not{\varepsilon}'\not{k}\not{\varepsilon} + 2\left(p\cdot\varepsilon\right)\not{\varepsilon}'}{2p\cdot k} + \frac{-\not{\varepsilon}\not{k}'\not{\varepsilon}' + 2\left(p\cdot\varepsilon\right)\not{\varepsilon}'}{-2p\cdot k'}\right]u\left(p\right) \tag{5-128}$$

利用方程 (5-125) 可以对光子的极化方向求和, 得到

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{自旋}}\left|M\right|^2 = e^4\mathrm{tr}\left\{\begin{array}{c}\left(\not{p}'+m\right)\left[\dfrac{\gamma_\mu\not{k}\gamma_\alpha + 2p_\alpha\gamma_\mu}{2p\cdot k} + \dfrac{\gamma_\alpha\not{k}'\gamma_\mu - 2p_\alpha\gamma_\mu}{2p\cdot k'}\right] \\ \left(\not{p}+m\right)\left[\dfrac{\gamma^\mu\not{k}\gamma^\alpha + 2p^\alpha\gamma^\mu}{2p\cdot k} + \dfrac{\gamma^\alpha\not{k}'\gamma^\mu - 2p^\alpha\not{\varepsilon}'}{2p\cdot k'}\right]\end{array}\right\} \tag{5-129}$$

通过直接但繁杂的计算, 可以得到上式中对迹求和的结果

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{自旋}}\left|M\right|^2 = 2e^4\left[\frac{p\cdot k'}{p\cdot k} + \frac{p\cdot k}{p\cdot k'} + 2m^2\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right) + m^4\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right)^2\right] \tag{5-130}$$

在实验室坐标系中

$$p\cdot k = \omega m, \quad p\cdot k' = \omega' m \tag{5-131}$$

其中, ω, ω' 分别为实验室坐标系下初态光子和末态光子的能量. 由方程 (5-83) 给出的 ep 散射的结果, 得到 ω 与 ω' 之间的关系

$$\omega' = \frac{m\omega}{\omega(1-\cos\theta)+m} \tag{5-132}$$

或写成

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1-\cos\theta) \tag{5-133}$$

其中, θ 是散射角. 这就是 Compton 散射中著名的频移方程.

进而可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{\text{自旋}}|M|^2 &= 2e^4\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 2m\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right) + m^2\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right)^2\right] \\ &= 2e^4\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right]\end{aligned}$$

解得微分截面为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{I}\frac{1}{2p_0}\frac{1}{2k_0}(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')\frac{1}{4}\sum_{\text{自旋}}|M|^2\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3 2p_0'}\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2k_0'} \tag{5-134}$$

先计算相空间

$$\rho = \int(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3 2p_0'}\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2k_0'} \tag{5-135}$$

显然此式与 ep 散射有同样结果

$$\rho = \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi^2}\frac{\omega'^2}{m\omega} \tag{5-136}$$

由此得到微分截面

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(\varepsilon\cdot\varepsilon')^2 - 2\right] \tag{5-137}$$

上式即为 Klein-Nishima 关系. 在 $\omega \to 0$ 的低能极限, 上式简化为 Thomson 散射

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(1+\cos^2\theta\right) \tag{5-138}$$

总的微分散射截面即为

$$\sigma_{\text{总}} = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2} \tag{5-139}$$

式中, $\dfrac{\alpha}{m}$ 为经典电子半径.

此外, 在高能极限下有

$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{\omega m}\left[\ln\frac{2\omega}{m} + \frac{1}{2} + O\left(\frac{m}{\omega}\ln\frac{m}{\omega}\right)\right] \tag{5-140}$$

5.5　附录: Ward 恒等式

Ward 恒等式是定域规范对称性的一个结果 [4]. 这里我们给出它的一个简单推导. 考虑如下积分

$$G_{\mu ab}(p,q)=\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx-\mathrm{i}py}\left\langle 0\left|T\{J_\mu(x)\,\psi_a(y)\,\overline{\psi}_b(0)\}\right|0\right\rangle \tag{5-141}$$

其中

$$J_\mu(x)=\overline{\psi}(x)\,\gamma_\mu\psi(x) \tag{5-142}$$

是守恒流, 满足

$$\partial^\mu J_\mu(x)=0 \tag{5-143}$$

为了计算上面的积分, 先来看一个简单的例子

$$G_\mu(q)=\int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx}\left\langle 0\left|T\{J_\mu(x)\,A(0)\}\right|0\right\rangle \tag{5-144}$$

其中, $A(0)$ 是某个定域算符 (local operator). 有

$$\begin{aligned}q^\mu G_\mu &=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx}\partial_x^\mu\left\langle 0\left|[\theta(x_0)J_\mu(x)A(0)+\theta(-x_0)A(0)J_\mu(x)]\right|0\right\rangle\\&=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx}\left\langle 0\left|\{\delta(x_0)[J_0(x),A(0)]+T[A(0)\partial^\mu J_\mu(x)]\}\right|0\right\rangle\end{aligned}$$

将它推广到包含两个定域算符情况的结果是

$$\begin{aligned}q^\mu H_\mu &=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx}\partial_x^\mu\left\langle 0\left|T\{J_\mu(x)\,A(0)B(y)\}\right|0\right\rangle\\&=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx}\left\langle 0\right|T\{\partial^\mu J_\mu(x)A(0)B(y)+\delta(x_0)[J_0(x),A(0)]B(y)\\&\quad+\delta(x_0-y_0)[J_0(x),B(y)]A(0)\}\left|0\right\rangle\end{aligned}$$

那么, 对于我们的例子, 则有

$$\begin{aligned}q^\mu G_\mu(p,q)_{ab} &=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx-\mathrm{i}py}\partial_x^\mu\left\langle 0\left|T[J_\mu(x)\,\psi_a(y)\,\overline{\psi}_b(0)]\right|0\right\rangle\\&=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx-\mathrm{i}py}\{\left\langle 0\left|T[\partial^\mu J_\mu(x)\,\psi_a(y)\,\overline{\psi}_b(0)]\right|0\right\rangle\\&\quad+\left\langle 0\left|T(\delta(x_0-y_0)\,[J_0(x)\,,\psi_a(y)]\overline{\psi}_b(0))\right|0\right\rangle\\&\quad+\left\langle 0\left|T(\delta(x_0)\left[J_0(x)\,,\overline{\psi}_b(0)\right]\psi_a(y))\right|0\right\rangle\}\\&=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx-\mathrm{i}py}\{\left\langle 0\left|-T[\psi_a(x)\,\overline{\psi}_b(0)]\delta^4(x-y)\right|0\right\rangle\end{aligned}$$

$$+ \left\langle 0 \left| T[\delta^4 (x) \overline{\psi}_b (0) \psi_a (y)] \right| 0 \right\rangle \}$$
$$= - \mathrm{i} \left[S_F (p)_{ab} - S_F (p+q)_{ab} \right]$$

其中利用了对易关系

$$\delta (x_0 - y_0) [J_0 (x), \psi (y)] = -\delta^4 (x-y) \psi (y) \tag{5-145}$$

$$\delta (x_0) [J_0 (x), \overline{\psi} (0)] = \delta^4 (x) \overline{\psi} (0) \tag{5-146}$$

上式将顶点函数 $G_{\mu ab}(p,q)$ 和传播子联系了起来. 为了从顶点函数中去掉传播子, 在等式两边同时乘以 $S_F^{-1} (p)_{ca}$ 和 $S_F^{-1} (p+q)_{bd}$, 得

$$q^\mu S_F^{-1} (p)_{ca} G_\mu (p,q)_{ab} S_F^{-1} (p+q)_{bd} = -\mathrm{i} S_F^{-1} (p)_{ca} \left[S_F (p)_{ab} - S_F (p+q)_{ab} \right] S_F^{-1} (p+q)_{bd} \tag{5-147}$$

定义

$$S_F^{-1} (p)_{ca} G_\mu (p,q)_{ab} S_F^{-1} (p+q)_{bd} = c_\mu (p,q)_{cd} \tag{5-148}$$

得到

$$\mathrm{i} q^\mu c_\mu (p,q)_{cd} = S_F^{-1} (p+q)_{cd} - S_F^{-1} (p)_{cd} \tag{5-149}$$

这就是 Ward 恒等式的简单版本.

第 6 章　路径积分方法

路径积分表述 (path integral formalism) 最初被发展出来是为了让量子力学与经典力学产生紧密的联系. 比如, 坐标空间中的跃迁振幅就可以用作用量 S 表示为

$$\langle f|\mathrm{i}\rangle = \int [\mathrm{d}x]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S/\hbar} \tag{6-1}$$

由此可以看到, 当 $\hbar \to 0$ 时, 作用量最小的轨道起决定性作用 —— 这就是经典的作用量原理. 这一方法使用普通的函数而不是算符, 因而提供了另一种框架来表述量子力学. 以后在讨论到非 Abel 规范理论时, 会需要消除其中非物理的自由度. 这一点在路径积分表述中更容易被实现, 只需对积分路径加以约束.

下面先从熟悉的量子力学的算符形式出发, 导出它的路径积分表述; 接着将它推广到场论中, 并讨论包含 Grassmann 代数的情形. 后者是费米子理论所必需的.

6.1　一维量子力学

6.1.1　跃迁振幅

我们来考虑一个简单的体系: 在一维空间中运动的哈密顿量为 H 的一个粒子. 它从初态 $|q,t\rangle$ 到末态 $|q',t'\rangle$ 的跃迁矩阵元为

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \langle q'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t'-t)}|q\rangle \tag{6-2}$$

其中, $|q\rangle$ 是 Schrödinger 绘景中位置算符 Q 的本征态

$$Q|q\rangle = q|q\rangle \tag{6-3}$$

而 $|q,t\rangle$ 则表示 Heisenberg 绘景中相应的态

$$|q,t\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|q\rangle \tag{6-4}$$

这些态按如下方式归一化

$$\langle q'|q\rangle = \delta\,(q-q') \tag{6-5}$$

在路径积分表述中, 上面的跃迁矩阵元可以写成

$$\langle q', t'|q, t\rangle = N\int[\mathrm{d}q]\exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau L(q, \dot{q})\right\} \tag{6-6}$$

现在我们来解释如何得到这个公式以及它的含义. 先将时间间隔 (t', t) 分为 n 个等份, 间距为

$$\delta t = \frac{t'-t}{n} \tag{6-7}$$

在它们之间插入态矢量的完备集, 跃迁矩阵元变成

$$\begin{aligned}\langle q'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t'-t)}|q\rangle = \int \mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_{n-1}\langle q'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\delta t}|q_{n-1}\rangle\langle q_{n-1}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\delta t}|q_{n-2}\rangle \\ \langle q_{n-2}|\cdots|q_1\rangle\langle q_1|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\delta t}|q\rangle\end{aligned} \tag{6-8}$$

如果 δt 足够小, 可以将上式中每个矩阵元近似地写为

$$\langle q_j|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\delta t}|q_i\rangle = \langle q_j|(1-\mathrm{i}H(P, Q)\delta t)|q_i\rangle + O\left((\delta t)^2\right) + \cdots \tag{6-9}$$

考虑如下简单形式的哈密顿量

$$H(P, Q) = \frac{P^2}{2m} + V(Q) \tag{6-10}$$

那么就有

$$\begin{aligned}\langle q_j|H|q_i\rangle &= \langle q_j|\frac{P^2}{2m}|q_i\rangle + V\left(\frac{q_i+q_j}{2}\right)\delta(q_i-q_j) \\ &= \int\frac{\mathrm{d}p_k}{2\pi}\langle q_j|\frac{P^2}{2m}|p_k\rangle\langle p_k|q_i\rangle + V\left(\frac{q_i+q_j}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}p_k}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_k(q_j-q_i)} \\ &= \int\frac{\mathrm{d}p_k}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_k(q_j-q_i)}\left[\frac{p_k^2}{2m} + V\left(\frac{q_i+q_j}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

最后一个等号中利用了

$$\langle q|p\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}pq} \tag{6-11}$$

这是坐标空间中的动量本征函数. 对这一无穷小量求幂后得到

$$\begin{aligned}\langle q_j|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\delta t}|q_i\rangle &\simeq \int\frac{\mathrm{d}p_k}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_k(q_j-q_i)}\left\{1-\mathrm{i}\delta t\left[\frac{p_k^2}{2m} + V\left(\frac{q_i+q_j}{2}\right)\right]\right\} \\ &\simeq \int\frac{\mathrm{d}p_k}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_k(q_j-q_i)}\exp\left\{-\mathrm{i}\delta t\left[\frac{p_k^2}{2m} + V\left(\frac{q_i+q_j}{2}\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{6-12}$$

于是总的跃迁矩阵元可以写成

$$\langle q'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t'-t)}|q\rangle \cong \int\left(\frac{\mathrm{d}p_1}{2\pi}\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi}\right)\int \mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_{n-1}$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\left[\sum_{i=1}^{n}p_i(q_i-q_{i-1})-(\delta t)H\left(p_i,\frac{q_i+q_{i-1}}{2}\right)\right]\right\} \tag{6-13}$$

其中, $q_0=q, q_{n+1}=q'$. 当 $n\longrightarrow\infty$ 时, 它可以形式地写成

$$\langle q'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t'-t)}|q\rangle = \int\left[\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{2\pi}\right]\exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}t\,[p\dot{q}-H(p,q)]\right\} \tag{6-14}$$
$$\equiv\lim_{n\to\infty}\int(\frac{\mathrm{d}p_1}{2\pi})\cdots(\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi})\int \mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_{n-1}$$
$$\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\delta t\left[p_i\left(\frac{q_i-q_{i-1}}{\delta t}\right)-H\left(p_i,\frac{q_i+q_{i-1}}{2}\right)\right]\right\} \tag{6-15}$$

这是路径积分体系中的基本关系, 也是它的基本含义. 也就是说, 当我们去掉了算符的结构, 所花的代价是引入了无穷多的积分.

在大部分情况下, 哈密顿量是 p 的二次式. 可以用公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\mathrm{e}^{-ax^2+bx}=\frac{1}{\sqrt{4\pi a}}\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}} \tag{6-16}$$

对动量作积分, 得到

$$\int\frac{\mathrm{d}p_i}{2\pi}\exp\left[\frac{-\mathrm{i}\delta t}{2m}p_i^2+\mathrm{i}p_i(q_i-q_{i-1})\right]=\left(\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\delta t}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{\mathrm{i}m(q_i-q_{i-1})^2}{2\delta t}\right] \tag{6-17}$$

那么总的矩阵元就可以进一步写成

$$\langle q'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t'-t)}|q\rangle=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\delta t}\right)^{n/2}\int\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{d}q_i\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\delta t\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_i-q_{i-1}}{\delta t}\right)^2-V\right]\right\} \tag{6-18}$$

即

$$\langle q',t'|q,t\rangle=\langle q'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t'-t)}|q\rangle=N\int[\mathrm{d}q]\exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau\left[\frac{m}{2}\dot{q}^2-V(q)\right]\right\} \tag{6-19}$$

这就是从初态 $|q,t\rangle$ 跃迁到末态 $|q',t'\rangle$ 的几率振幅的路径积分表示. 指数上的多项式就是这个简单体系的作用量, 所以得到

$$\langle q',t'|q,t\rangle=N\int[\mathrm{d}q]\exp(\mathrm{i}S) \tag{6-20}$$

这是路径积分中最常用的公式.

在标准的量子力学中, 我们将坐标 q 和它的共轭动量 p 看成作用在 Hilbert 空间的算符, 然后计算算符的矩阵元, 并把它们和实验测量的结果作比较. 而路径积分体系则避开了中间的算符, 直接处理 c 数的矩阵元, 所付出的代价就是出现无穷多的积分. 这两种方式 —— 算符和路径积分, 在研究量子场论时都很有用, 在许多情况下相得益彰. 有些运算在算符形式中更容易操作, 如算符展开, 而路径积分则可以更有效地处理有约束的系统, 如规范理论.

6.1.2 Green 函数

场论中的基本量是场算符编时乘积的真空期望值. 那么为了将上面得到的公式推广到场论中, 先考虑 Heisenberg 绘景中坐标算符的编时乘积在基态 $|0\rangle$ 之间的期望值:

$$G(t_1,t_2)=\langle 0|T(Q^{\mathrm{H}}(t_1)Q^{\mathrm{H}}(t_2))|0\rangle \tag{6-21}$$

显然, 我们需要搞清楚编时算符和基态在路径积分中的含义. 先来讨论编时操作.

在上式中插入态矢量完备集

$$G(t_1,t_2)=\int \mathrm{d}q\mathrm{d}q'\langle 0|q',t'\rangle\langle q',t'|T(Q^{\mathrm{H}}(t_1)Q^{\mathrm{H}}(t_2))|q,t\rangle\langle q,t|0\rangle \tag{6-22}$$

其中, 矩阵元

$$\langle q,t|0\rangle=\phi_0(q)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_0t}=\phi_0(q,t) \tag{6-23}$$

是基态波函数. 假设

$$t'>t_1>t_2>t \tag{6-24}$$

那么

$$\begin{aligned}\langle q',t'|T(Q^{\mathrm{H}}(t_1)Q^{\mathrm{H}}(t_2))|q,t\rangle =&\langle q'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t'-t_1)}Q^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t_1-t_2)}Q^{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t_2-t)}|q\rangle\\ =&\int \mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\langle q'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t'-t_1)}|q_1\rangle q_1\langle q_1|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t_1-t_2)}|q_2\rangle\\ &q_2\langle q_2|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t_2-t)}|q\rangle\\ =&\int\left[\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{2\pi}\right]q_1(t_1)q_2(t_2)\exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau[p\dot{q}-H(p,q)]\right\}\end{aligned} \tag{6-25}$$

不难看出, 对于其他的时间序列, 如 $t'>t_2>t_1>t$, 会得到同样的结果, 因为通过将时间间隔分成小段, 路径积分会自动地按照时间顺序排列好. 所以在路径积分体系中不需要编时操作, 因为里面根本没有算符.

这样我们就可以把 Green 函数写成

$$G(t_1,t_2)=\int \mathrm{d}q\mathrm{d}q'\phi_0^*(q',t')\phi_0(q,t)\int\left[\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{2\pi}\right]q_1(t_1)q_2(t_2)\exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau[p\dot{q}-H(p,q)]\right\} \tag{6-26}$$

可以通过下面的步骤去掉基态波函数 $\phi_0(q,t)$. 首先有

$$\langle q',t'|\mathcal{O}(t_1,t_2)|q,t\rangle=\int \mathrm{d}Q\mathrm{d}Q'\langle q',t'|Q',T'\rangle\langle Q',T'|\mathcal{O}(t_1,t_2)|Q,T\rangle\langle Q,t|q,t\rangle \tag{6-27}$$

其中

$$\mathcal{O}(t_1,t_2)=T(Q^{\mathrm{H}}(t_1)Q^{\mathrm{H}}(t_2)) \tag{6-28}$$

设 $|n\rangle$ 为能量本征态, 本征值为 E_n, 波函数为 ϕ_n, 即

$$H|n\rangle=E_n|n\rangle,\quad \langle q|n\rangle=\phi_n(q) \tag{6-29}$$

那么

$$\begin{aligned}\langle q',t'|Q',T'\rangle=\langle q'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t'-T')}|Q'\rangle&=\sum_n\langle q'|n\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n(t'-T')}\langle n|Q'\rangle\\&=\sum_n\phi_n(q')\phi_n^*(Q')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n(t'-T')}\end{aligned} \tag{6-30}$$

为了分离出基态波函数, 取一个“不寻常的极限”: $t'\to-\mathrm{i}\infty$, 则有

$$\lim_{t'\to-\mathrm{i}\infty}\langle q',t'|Q',T'\rangle=\phi_0(q')\phi_0^*(Q')\mathrm{e}^{-E_0|t'|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_0T'} \tag{6-31}$$

之所以选择这个特殊极限 $t'\to-\mathrm{i}\infty$ 是因为基态是能量最低的态, 有 $E_0<E_n(n\neq0)$. 所以在这个极限下基态是求和项中最重要的贡献, 而其他项的贡献都被压低了.

同样地, 也可以得到

$$\lim_{t\to\mathrm{i}\infty}\langle Q,T|q,t\rangle=\phi_0(Q)\phi_0^*(q)\mathrm{e}^{-E_0|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_0T} \tag{6-32}$$

这样有

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{t'\to-\mathrm{i}\infty\\t\to\mathrm{i}\infty}}\langle q',t'|\mathcal{O}(t_1,t_2)|q,t\rangle=&\int\mathrm{d}Q\mathrm{d}Q'\phi_0(q')\phi_0^*(Q')\langle Q',T'|\mathcal{O}(t_1,t_2)|Q,T\rangle\\&\times\phi_0(Q)\phi_0^*(q)\mathrm{e}^{-E_0|t'|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_0T'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_0T}\mathrm{e}^{-E_0|t|}\\=&\phi_0(q')\phi_0^*(q)\mathrm{e}^{-E_0|t'|}\mathrm{e}^{-E_0|t|}G(t_1,t_2)\end{aligned} \tag{6-33}$$

很容易看出来

$$\lim_{\substack{t'\to-\mathrm{i}\infty\\t\to\mathrm{i}\infty}}\langle q',t'|q,t\rangle=\phi_0(q')\phi_0^*(q)\mathrm{e}^{-E_0|t'|}\mathrm{e}^{-E_0|t|} \tag{6-34}$$

最后, Green 函数可以写为

$$G(t_1,t_2)=\lim_{\substack{t'\to -\mathrm{i}\infty\\ t\to \mathrm{i}\infty}}\frac{\langle q',t'|T[Q^H(t_1)Q^H(t_2)]|q,t\rangle}{\langle q',t'|q,t\rangle} \tag{6-35}$$

$$=\lim_{\substack{t'\to -\mathrm{i}\infty\\ t\to \mathrm{i}\infty}}\frac{1}{\langle q',t'|q,t\rangle}\int\left[\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{2\pi}\right]q(t_1)q(t_2)\exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau[p\dot{q}-H(p,q)]\right\} \tag{6-36}$$

这一结论推广到 n 点 Green 函数是

$$G(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\langle 0|T[q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)]|0\rangle \tag{6-37}$$

$$=\lim_{\substack{t'\to -\mathrm{i}\infty\\ t\to \mathrm{i}\infty}}\frac{1}{\langle q',t'|q,t\rangle}\int\left[\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{2\pi}\right]q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau[p\dot{q}-H(p,q)]\right\} \tag{6-38}$$

在这里我们看到, 分子和分母的不同之处在于 $q(t_1)\cdots q(t_n)$ 这些因子, 因此其中任何与 $q(t)$ 无关的因子都会从分子分母中抵消掉.

现在我们引入 n 点函数的生成泛函, 它非常有用:

$$Z[J]=\lim_{\substack{t'\to -\mathrm{i}\infty\\ t\to \mathrm{i}\infty}}\frac{1}{\langle q',t'|q,t\rangle}\int\left[\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{2\pi}\right]\exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau[p\dot{q}-H(p,q)+J(\tau)q(\tau)]\right\} \tag{6-39}$$

其中, $J(\tau)$ 是一个任意的函数. 于是 Green 函数可以用生成泛函写成

$$G(t_1,t_2,\cdots,t_n)=(-\mathrm{i})^n\,\frac{\delta^n}{\delta J(t_1)\cdots\delta J(t_n)}Z[J]\bigg|_{J=0} \tag{6-40}$$

这个非物理的极限——$t'\to -\mathrm{i}\infty$ 和 $t\to \mathrm{i}\infty$ 应当被理解为欧氏的 (Euclidian) Green 函数. 它的定义是

$$S^{(n)}(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)=\mathrm{i}^n G^{(n)}(-\mathrm{i}\tau_1,-\mathrm{i}\tau_2,\cdots,-\mathrm{i}\tau_n) \tag{6-41}$$

$S^{(n)}$ 的生成泛函是

$$Z_E[J]=\lim_{\substack{\tau'\to \infty\\ \tau\to -\infty}}\int[\mathrm{d}q]\frac{1}{\langle q',t'|q,t\rangle}\exp\left\{\int_\tau^{\tau'}\mathrm{d}\tau''\left[-\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau''}\right)^2-V(q)+J(\tau'')q(\tau'')\right]\right\} \tag{6-42}$$

可以调整 $V(q)$ 的零点, 使得

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+V(q)>0 \tag{6-43}$$

它提供衰减的效应, 给出一个收敛的 Gauss 积分. 通过这种形式, 我们可以看到, 路径积分中的任何不依赖于 q 的常数都会在生成泛函中被消掉. 事实上, 这才是一个定义路径积分的更合适的方式. 因为在 Minkowski 空间中, 对 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}S}$ 的积分是没有被明确定义的, 它会不停地振荡而不衰减. 所以应该从欧氏空间的表述出发, 稍后再解析延拓到闵氏空间中.

6.1.3 例子: 自由粒子的路径积分

下面通过一个例子来具体说明路径积分体系, 即质量为 m 的自由粒子在一维空间中运动.

自由粒子的哈密顿量是

$$H = \frac{P^2}{2m} \tag{6-44}$$

作用量可以用时空间隔写成

$$\begin{aligned} S &= \int_t^{t'} L\mathrm{d}t'' = \int_t^{t'} \frac{m}{2}\dot{q}^2\mathrm{d}t'' = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{q_i - q_{i+1}}{\varDelta}\right)^2 \varDelta \\ &= \frac{m}{2\varDelta}\left[(q-q_1)^2 + (q_1-q_2)^2 + \cdots + (q_{n-1}-q')^2\right] \end{aligned} \tag{6-45}$$

其中, $n\varDelta = t' - t$. 由式 (6-45) 和 1.2 节中给出的积分测度, 跃迁振幅可以写成

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{i}}\right)^{\frac{n}{2}} \int \prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{d}q_i \times \exp\left\{\frac{\mathrm{i}m}{2\varDelta}\left[(q-q_1)^2 + (q_1-q_2)^2 + \cdots + (q_{n-1}-q')^2\right]\right\}$$

其中, 逐次的积分可以用下面这个 Gauss 型的积分公式计算

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left[a(x-x_1)^2 + b(x-x_2)^2\right] = \sqrt{\frac{-\pi}{a+b}}\exp\left[\frac{ab}{a+b}(x_1-x_2)^2\right] \tag{6-46}$$

得到前几个积分是

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}q_1 \exp\left\{\frac{\mathrm{i}m}{2\varDelta}\left[(q-q_1)^2 + (q_1-q_2)^2\right]\right\} &= \sqrt{\frac{2\pi \mathrm{i}\varDelta}{m}\cdot\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}m}{2\varDelta}\frac{(q-q_2)^2}{2}\right] \\ \int \mathrm{d}q_2 \exp\left\{\frac{\mathrm{i}m}{2\varDelta}\left[\frac{(q-q_2)^2}{2} + (q_2-q_3)^2\right]\right\} &= \sqrt{\frac{2\pi \mathrm{i}\varDelta}{m}\cdot\frac{2}{3}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}m}{2\varDelta}\frac{(q-q_3)^2}{3}\right] \\ \int \mathrm{d}q_3 \exp\left\{\frac{\mathrm{i}m}{2\varDelta}\left[\frac{(q-q_3)^2}{3} + (q_3-q_4)^2\right]\right\} &= \sqrt{\frac{2\pi \mathrm{i}\varDelta}{m}\cdot\frac{3}{4}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}m}{2\varDelta}\frac{(q-q_4)^2}{4}\right] \end{aligned}$$

等. 这样, 最后得到

$$
\begin{aligned}
\langle q', t'|q, t\rangle &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\varDelta}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}\varDelta}{m}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}m}{2n\varDelta}\left(q-q'\right)^2\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi\mathrm{i}n\varDelta}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}m\left(q'-q\right)^2}{2\left(t'-t\right)}\right] \\
&= \left(\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\left(t'-t\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}m\left(q'-q\right)^2}{2\left(t'-t\right)}\right]
\end{aligned}
\tag{6-47}
$$

对于这个简单的例子而言, 其实可以直接计算跃迁振幅. 由 Schrödinger 绘景中的跃迁振幅表达式出发

$$
\begin{aligned}
\langle q', t'|q, t\rangle &= \langle q'\left|\exp\left[-\mathrm{i}H\left(t'-t\right)\right]\right|q\rangle \qquad (6\text{-}48) \\
&= \langle q'|\exp\left[\frac{-\mathrm{i}P^2}{2m}\left(t'-t\right)\right]|q\rangle
\end{aligned}
$$

插入动量本征态的完全集, 得到

$$
\begin{aligned}
\langle q', t'|q, t\rangle &= \int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\langle q'|\exp\left[\frac{-\mathrm{i}p^2}{2m}\left(t'-t\right)\right]|p\rangle\langle p|q\rangle \\
&= \int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\exp\left[\frac{-\mathrm{i}p^2}{2m}\left(t'-t\right)+\mathrm{i}p\left(q'-q\right)\right]
\end{aligned}
\tag{6-49}
$$

这个积分可以使用 Gauss 积分公式

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\exp\left(-ax^2+bx\right)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)
\tag{6-50}
$$

在本例中, 将 $a=\dfrac{\mathrm{i}}{2m}\left(t'-t\right), b=\mathrm{i}\left(q'-q\right)$ 代入上式, 得到

$$
\langle q', t'|q, t\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\left(t'-t\right)}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}m}{2}\frac{\left(q'-q\right)^2}{t'-t}\right]
\tag{6-51}
$$

与路径积分方法的结果相同.

6.2　场　　论

6.2.1　生成泛函

作如下的代换, 便可以将量子力学的这套处理方法推广到包含标量场 $\phi(x)$ 的场论中

$$
\prod_{i=1}^{\infty}\left[\mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i\right]\longrightarrow\left[\mathrm{d}\phi(x)\mathrm{d}\pi(x)\right]
\tag{6-52}
$$

$$L(q,\dot{q}) \longrightarrow \int \mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\mathrm{d}^3x, \quad H(p,q) \longrightarrow \int \mathcal{H}(\phi,\pi)\mathrm{d}^3x \tag{6-53}$$

类比等式 (6-38), 标量场的 Green 函数可以写成

$$\begin{aligned}G^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= \langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n))|0\rangle \\ &= \int [\mathrm{d}\phi]\,\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\right\}\end{aligned}$$

为了方便, 我们使用欧氏时间来进行计算. 对于标量场的 $\lambda\phi^4$ 理论, 生成泛函是

$$Z[J] = \int [\mathrm{d}\phi]\exp\left\{-\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi\right]\right\} \tag{6-54}$$

注意, 泛函导数 (functional derivative) 的定义是

$$\frac{\delta F[\phi(x)]}{\delta\phi(y)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F[\phi(x)+\varepsilon\delta(x-y)] - F[\phi(x)]}{\varepsilon} \tag{6-55}$$

因此

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}J(y) = \delta^{(4)}(x-y), \quad \frac{\delta}{\delta J(x)}\int \mathrm{d}^4y J(y)\phi(y) = \phi(x) \tag{6-56}$$

由这些简单的规则, 可以得到

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(y)} = \int [\mathrm{d}\phi]\,\phi(y)\exp\left\{\int \mathrm{d}^4x[\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi) + J(x)\phi(x)]\right\} \tag{6-57}$$

$$\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(y_1)\,\delta J(y_2)} = \int [\mathrm{d}\phi]\,\phi(y_1)\phi(y_2)\exp\left\{\int \mathrm{d}^4x[\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi) + J(x)\phi(x)]\right\} \tag{6-58}$$

$$\cdots\cdots$$

因此 Green 函数可以用生成泛函写成如下形式

$$\begin{aligned}G^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= \langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n))|0\rangle = \left.\frac{\delta^{(n)}Z}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0} \\ &= \left[\frac{\delta^{(n)}}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\int [\mathrm{d}\phi]\right. \\ &\qquad \left.\exp\left\{\int \mathrm{d}^4y[\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi) + J(y)\phi(y)]\right\}\right]_{J=0}\end{aligned} \tag{6-59}$$

6.2.2　连通的 Green 函数

由等式 (6-59) 定义的 Green 函数包含连通的 (connected) 和非连通的 (disconnected) Green 函数. 只有连通的 Green 函数才是我们要用的, 它可以通过对下式求泛函导数得到

$$W[J] = -\mathrm{i}\ln Z[J] \tag{6-60}$$

现在以自由场论为例来进行说明. 稍后我们会看到, 自由场生成泛函可以写成如下形式

$$Z_0\,[J] = \exp\left[\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 J(x_1\Delta(x_1,x_2)J(x_2)\right] \tag{6-61}$$

其中, $\Delta(x_1,x_2)$ 表示坐标空间的传播子. 将指数函数展开后得到

$$\begin{aligned}Z_0\,[J] =& 1+\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 J(x_1)\Delta(x_1,x_2)J(x_2)\\ &+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4y_1 J(x_1)\Delta(x_1,y_1)J(y_1)\\ &\int \mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4y_2 J(x_2)\Delta(x_2,y_2)J(y_2)+\cdots\end{aligned} \tag{6-62}$$

可以将上式符号地表示成

$$Z_0 = 1+\frac{1}{2}(J\text{——}J)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2(J\text{——}J)(J\text{——}J)+\cdots \tag{6-63}$$

这里的“——”代表传播子. 注意, 在生成泛函中, 源函数 $J(x)$ 总是成对出现, 并且通过 $\Delta(x,y)$ 连在一起. 因此, 当我们对 $J(x)$ 求微分得到 Green 函数时, 对两个被 $\Delta(x,y)$ 连在一起的源函数 $J(x)$ 和 $J(y)$ 的微分就对应 Wick 定理中的一次缩并. 对源函数求微分, 可以看到

$$\left.\frac{\delta Z_0\,[J]}{\delta J\,(y)}\right|_{J=0} = 0 \tag{6-64}$$

事实上, 所有奇数次的微分都为 0. 因为 J 是成对出现的, 奇数次的微分之后再令 $J=0$, 这些项的贡献都是 0. 对于两点函数, 则有

$$\langle 0\,|T\{\phi\,(y_1)\,\phi\,(y_2)\}|\,0\rangle = \left.\frac{\delta^2 Z\,[J]}{\delta J\,(y_1)\,\delta J\,(y_2)}\right|_{J=0} = \Delta(y_1,y_2) \tag{6-65}$$

它对应于从 Z_0 的第二项中去掉两个源函数 $J(x_1),J(x_2)$, 结果留下一个传播子

$$y_1\text{———}y_2 \tag{6-66}$$

同样地,

$$\begin{aligned}\langle 0\,|T\{\phi\,(y_1)\,\phi\,(y_2)\,\phi\,(y_3)\,\phi\,(y_4)\}|\,0\rangle =& \left.\frac{\delta^4 Z\,[J]}{\delta J\,(y_1)\,\delta J\,(y_2)\,\delta J\,(y_3)\,\delta J\,(y_4)}\right|_{J=0}\\ =&\Delta(y_1,y_2)\Delta(y_3,y_4)+\text{它的置换项 (permutation)}\end{aligned} \tag{6-67}$$

它的图形表示是

$$\begin{matrix}y_1\text{———}y_2\\ y_3\text{———}y_4\end{matrix}\ +\text{它的置换项} \tag{6-68}$$

因此四点函数是非连通的, 包含两个分开的两点函数. 由此可以看出来, 更高点的函数也是由非连通的图构成. 这是我们所预料到的. 因为没有相互作用, 就只能得到非连通的图. 但是, 如果对 Z_0 取对数, 得到

$$W_0 = -\mathrm{i}\ln Z_0 = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yJ(x)\Delta(x,y)J(y) \tag{6-69}$$

这样就只有两点函数, 所有的非连通图都消失了.

6.2.3　自由场生成泛函

我们现在来讨论微扰展开. 以 $\lambda\phi^4$ 为例, 将拉氏量写成

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}_0(\phi) + \mathcal{L}_I(\phi) \tag{6-70}$$

$$\mathcal{L}_0(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\lambda\phi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2, \quad \mathcal{L}_I(\phi) = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{6-71}$$

生成泛函是

$$Z[J] = \int [\mathrm{d}\phi]\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\left[\mathcal{L}_0(\phi) + \mathcal{L}_I(\phi) + J\phi\right]\right\} \tag{6-72}$$

为了简单起见, 我们就用 $Z[J]$ 来做计算. 其中自由场部分 $\mathcal{L}_0(\phi)$ 是二次项, 对它的积分是 Gauss 型积分, 可以直接积出. 由式 (6-56) 看到, 在路径积分中, 场变量 $\phi(x)$ 可以用微分算符 $\mathrm{i}\dfrac{\delta}{\delta J(x)}$ 来代替. 这样, 我们就可以将作用项转变成关于源函数 $J(x)$ 的多次微分. 因此有

$$Z[J] = \left[\exp\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]Z_0[J] \tag{6-73}$$

其中

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \int [\mathrm{d}\phi]\exp\left\{\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{2}(\partial_\lambda\phi)^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + J\phi\right]\right\} \\ &= \int [\mathrm{d}\phi]\exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\phi(x)K(x,y)\phi(y) + \int \mathrm{d}^4zJ(z)\phi(z)\right] \end{aligned}$$

是自由场生成泛函, 并且有

$$K(x,y) = -\mathrm{i}\delta^4(x-y)\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \boldsymbol{\nabla}^2 + \mu^2\right) \tag{6-74}$$

多个变量的 Gauss 积分公式是

$$\int \mathrm{d}\phi_1\mathrm{d}\phi_2\cdots\mathrm{d}\phi_n\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\phi_iK_{ij}\phi_j + \sum_k J_k\phi_k\right] \sim \frac{1}{\sqrt{\det K}}\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j}J_i(K^{-1})_{ij}J_j\right] \tag{6-75}$$

推导过程如下. 对于单变量 Gauss 积分, 有

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-ax^2+bx\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\exp\left[-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2}{4a}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \tag{6-76}$$

将它推广到如下多个变量的情形, 即

$$I_n=\int\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{ij}A_{ij}x_ix_j+\sum_j b_jx_j\right]=\int\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\exp\left[-\frac{1}{2}\left(x,Ax\right)+(B,x)\right] \tag{6-77}$$

其中

$$(x,Ax)=\sum_{ij}A_{ij}x_ix_j,\quad (B,x)=\sum_j b_jx_j \tag{6-78}$$

因为 A 是一个实对称矩阵, 因而可以通过一个正交矩阵 $\boldsymbol{S}$ 被对角化

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{S} \tag{6-79}$$

那么就有

$$(x,Ax)=(Sx,DSx)=(y,Dy)\,,\quad (B,x)=(B',y)\,,\quad y=Sx,\quad B'=SB \tag{6-80}$$

将它代入上面的多变量积分式, 替换掉相应的项

$$\begin{aligned}I_n&=\int\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n\exp\left[-\frac{1}{2}\left(y,Dy\right)+(B',y)\right]=\prod_i\left[\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}d_iy_i^2+b_i'y_i\right)\mathrm{d}y_i\right]\\&=\prod_i\left[\sqrt{\frac{2\pi}{d_i}}\exp\left(\frac{b_i'^2}{2d_i}\right)\right]\end{aligned}$$

又因为

$$\prod_i\left[\exp\left(\frac{b_i^2}{2d_i}\right)\right]=\exp\left[\sum_i\left(\frac{b_i'^2}{2d_i}\right)\right],\quad \prod_i\sqrt{\frac{2\pi}{d_i}}=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det\boldsymbol{D}}}=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det\boldsymbol{A}}} \tag{6-81}$$

以及

$$\sum_i\left(\frac{b_i'^2}{2d_i}\right)=\frac{1}{2}\left(B',D^{-1}B'\right)=\frac{1}{2}\left(SB,D^{-1}SB\right)=\frac{1}{2}\left(B,A^{-1}B\right) \tag{6-82}$$

于是最后的结果可以写成

$$I_n=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\exp\left[\frac{1}{2}\left(B,A^{-1}B\right)\right]=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\exp\left[\sum_{i,j}\frac{1}{2}b_i\left(A^{-1}\right)_{ij}b_j\right] \tag{6-83}$$

将它应用到标量场的情形中, 得到

$$Z_0[J]=\exp\left[\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yJ(x)\Delta(x,y)J(y)\right] \tag{6-84}$$

其中, $\Delta(x,y)$ 是 $K(x,y)$ 的逆

$$\int \mathrm{d}^4yK(x,y)\Delta(y,z)=\delta^4(x-z) \tag{6-85}$$

可以看到 $Z_0[J]$ 是一个指数函数的形式, 指数上是被 $\Delta(x,y)$ 连在一起的两个源函数 $J(x)$ 和 $J(y)$. 不难得到

$$\Delta(x,y)=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)}}{k^2-\mu^2} \tag{6-86}$$

我们现在再给出另一种方法, 也能得到同样地结果. 定义

$$\phi(x)=\bar{\phi}(x)+\phi_c(x) \tag{6-87}$$

其中

$$\phi_c(x)=\mathrm{i}\int\Delta(x,z)J(z)\mathrm{d}^4z \tag{6-88}$$

是源为 $\mathrm{i}J$ 的古典解. 代入作用量中得到

$$\begin{aligned}
S=&-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\phi(x)K(x,y)\phi(y)+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4zJ(z)\phi(z)\\
=&-\frac{1}{2}\bigg\{\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bar{\phi}(x)K(x,y)\bar{\phi}(y)+\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bar{\phi}(x)K(x,y)\phi_c(y)\\
&+\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\phi_c(x)K(x,y)\bar{\phi}(y)+\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\phi_c(x)K(x,y)\phi_c(y)\bigg\}+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4zJ(z)\phi(z)
\end{aligned}$$

其中, 最后一个等号后的第二项是

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\,\bar{\phi}(x)K(x,y)\phi_c(y)&=\int \mathrm{d}^4x\,\bar{\phi}(x)\int \mathrm{d}^4yK(x,y)\mathrm{i}\int\Delta(y,z)J(z)\mathrm{d}^4z\\
&=\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\bar{\phi}(x)J(x)
\end{aligned} \tag{6-89}$$

同样地, 有

$$\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\,\phi_c(x)K(x,y)\bar{\phi}(y)=\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4yJ(y)\bar{\phi}(y) \tag{6-90}$$

$$\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\,\phi_c(x)K(x,y)\phi_c(y)=-\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yJ(x)\Delta(x,y)J(y) \tag{6-91}$$

将所有这些加在一起得到

$$
\begin{aligned}
S=&-\frac{1}{2}\left\{\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bar{\phi}(x)K(x,y)\bar{\phi}(y)+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\bar{\phi}(x)J(x)+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4yJ(y)\bar{\phi}(y)\right.\\
&\left.-\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yJ(x)\Delta(x,y)J(y)\right\}+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4zJ(z)[\bar{\phi}(z)+\phi_c(z)]\\
=&-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bar{\phi}(x)K(x,y)\bar{\phi}(y)-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yJ(x)\Delta(x,y)J(y)
\end{aligned}
$$

第一项与源 $J(x)$ 无关, 可以被丢掉. 于是就得到和前面相同的结果.

6.2.4 微扰展开与 Feynman 图

回到完全的生成泛函 $Z[J]$, 它可以用自由场生成泛函 $Z_0[J]$ 表示为

$$
Z[J]=\left[\exp\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]Z_0[J]=\left[\exp\int \mathrm{d}^4x\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right]Z_0[J] \tag{6-92}
$$

对 λ 作微扰展开, 得到

$$
Z[J]=\left[1+\frac{\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4+\frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^2\left(\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right)^2+\cdots\right]Z_0[J] \tag{6-93}
$$

或

$$
Z[J]=Z_0[J](1+\lambda z_1[J]+\cdots) \tag{6-94}
$$

其中

$$
z_1=\frac{1}{4!}\frac{1}{Z_0[J]}\left\{\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]^4\right\}Z_0[J] \tag{6-95}
$$

它包含关于 $J(x)$ 的泛函微分. 为了计算 z_1, 首先将 $Z_0[J]$ 展开成 $J(x)$ 的级数

$$
\begin{aligned}
Z_0[J]=&1+\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4y_1\mathrm{d}^4y_2J(y_1)\Delta(y_1,y_2)J(y_2)\\
&+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2!}\int \mathrm{d}^4y_1\mathrm{d}^4y_2\mathrm{d}^4y_3\mathrm{d}^4y_4\left[J(y_1)\Delta(y_1,y_2)J(y_2)J(y_3)\Delta(y_3,y_4)J(y_4)\right]+\cdots
\end{aligned}
$$

显然 Z_0 中只有 J 的整数幂次. 为了符号的简化, 将它写成

$$
\begin{aligned}
Z_0[J]=&1+\frac{1}{2}\int J_1\varDelta_{12}J_2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2!}\int(J_1\varDelta_{12}J_2)(J_3\varDelta_{34}J_4)\\
&+\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{3!}\int(J_1\varDelta_{12}J_2)(J_3\varDelta_{34}J_4)(J_5\varDelta_{56}J_6)+\cdots
\end{aligned} \tag{6-96}
$$

其中

$$J_i = J_i\,(y_i)\,,\quad \Delta_{ij} = \Delta(y_i, y_j),\quad \int = \int \prod_i \mathrm{d}^4 y_i \tag{6-97}$$

现在我们来看 z_1, λ 的一阶项:

$$z_1 = \frac{1}{4!}\frac{1}{Z_0[J]}\left\{\int \mathrm{d}^4 x \left[\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]^4\right\} Z_0\,[J] \tag{6-98}$$

假设我们要计算两点函数

$$\left.\frac{\delta^2 Z\,[J]}{\delta J\,(x_1)\,\delta J\,(x_2)}\right|_{J=0} \tag{6-99}$$

它包含关于 J 的两次微分. 因为在 z_1 已经有四次微分, 所以需要 $Z_0\,[J]$ 中 J 的 6 阶项:

$$Z_0^{(6)}\,[J] = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{3!}\int (J_1 \Delta_{12} J_2)(J_3 \Delta_{34} J_4)(J_5 \Delta_{56} J_6) \tag{6-100}$$

将它符号地表示成

$$Z_0^{(6)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} (J_1 \text{——} J_2) \\ (J_3 \text{——} J_4) \\ (J_5 \text{——} J_6) \end{pmatrix} \tag{6-101}$$

对它的一次微分得到

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} Z_0^{(6)}\,[J] = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{3!}\int 6(\Delta_{x2} J_2)(J_3 \Delta_{34} J_4)(J_5 \Delta_{56} J_6) \tag{6-102}$$

符号表示是

$$\frac{\delta}{\delta J} Z_0^{(6)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{3!}\left[6\begin{pmatrix} (x \text{——} J_2) \\ (J_3 \text{——} J_4) \\ (J_5 \text{——} J_6) \end{pmatrix}\right] \tag{6-103}$$

同样地, 二次微分得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2 Z_0^{(6)}\,[J] = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{3!}\int 6[&(\Delta_{xx})(J_3 \Delta_{34} J_4)(J_5 \Delta_{56} J_6) \\ &+ 4(\Delta_{x2} J_2)(\Delta_{x4} J_4)(J_5 \Delta_{56} J_6)]\end{aligned} \tag{6-104}$$

即

$$\frac{\delta^2}{\delta J^2} Z_0^{(6)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{3!} 6\left[\begin{pmatrix} (x \text{——} x) \\ (J_3 \text{——} J_4) \\ (J_5 \text{——} J_6) \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} (x \text{——} J_2) \\ (x \text{——} J_4) \\ (J_5 \text{——} J_6) \end{pmatrix}\right] \tag{6-105}$$

三次微分的结果是

$$\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 Z_0^{(6)}[J]=\left(\frac{1}{2}\right)^3\int[4(\varDelta_{xx})(\varDelta_{x4}J_4)(J_5\varDelta_{56}J_6)+4\times 2(\varDelta_{xx})(\varDelta_{x4}J_4)(J_5\varDelta_{56}J_6)$$
$$+4\times 2(\varDelta_{x2}J_2)(\varDelta_{x4}J_4)(\varDelta_{x6}J_6)]$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3\int[12(\varDelta_{xx})(\varDelta_{x4}J_4)(J_5\varDelta_{56}J_6)+8(\varDelta_{x2}J_2)(\varDelta_{x4}J_4)(\varDelta_{x6}J_6)]$$

简化的符号表示是

$$\frac{\delta^3}{\delta J^3}Z_0^{(6)}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\left[12\begin{pmatrix}(x\text{——}x)\\(x\text{——}J_4)\\(J_5\text{——}J_6)\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}(x\text{——}J_2)\\(x\text{——}J_4)\\(x\text{——}J_6)\end{pmatrix}\right] \tag{6-106}$$

四次微分得到

$$\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 Z_0^{(6)}[J]=\left(\frac{1}{2}\right)^3\int[12(\varDelta_{xx})(\varDelta_{xx})(J_5\varDelta_{56}J_6)+12\times 2(\varDelta_{xx})(\varDelta_{x4}J_4)(\varDelta_{x6}J_6)$$
$$+8\times 3(\varDelta_{xx})(\varDelta_{x4}J_4)(\varDelta_{x6}J_6)]$$
$$=\int\left[\frac{3}{2}(\varDelta_{xx})^2(J_5\varDelta_{56}J_6)+6(\varDelta_{xx})(\varDelta_{x4}J_4)(\varDelta_{x6}J_6)\right]$$

符号地表示成

$$\frac{\delta^4}{\delta J^4}Z_0^{(6)}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}(x\text{——}x)\\(x\text{——}x)\\(J_5\text{——}J_6)\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}(x\text{——}x)\\(x\text{——}J_4)\\(x\text{——}J_6)\end{pmatrix} \tag{6-107}$$

可以看出来, 上式左侧的第一项将会给出两点函数的一个非连通图 (图 6-1). 可以求出它等于

$$\langle 0\left|T\left[\phi\left(y_1\right)\phi\left(y_2\right)\right]\right|0\rangle_{\text{disc}}=\frac{\lambda}{4!}\frac{\delta^2}{\delta J\left(y_1\right)J\left(y_2\right)}\int\left[\frac{3}{2}(\varDelta_{xx})^2(J_5\varDelta_{56}J_6)\right]\Bigg|_{J=0}$$
$$=\frac{\lambda}{8}\int \mathrm{d}^4x\Delta^2(x,x)\Delta\left(y_1,y_2\right) \tag{6-108}$$

因此两点函数到这一阶的连通的部分就是

$$\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J\left(y_1\right)\delta J\left(y_2\right)}\right|_{J=0}=\frac{\lambda}{4!}\frac{\delta^2}{\delta J\left(y_1\right)\delta J\left(y_2\right)}\left\{\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]^4\right\}Z_0[J]\Bigg|_{J=0}$$
$$=\frac{\lambda}{2}\int \mathrm{d}^4x\Delta(x,x)\Delta(y_1,x)\Delta(y_2,x) \tag{6-109}$$

对应图 6-2 中的连通的 Feynman 图.

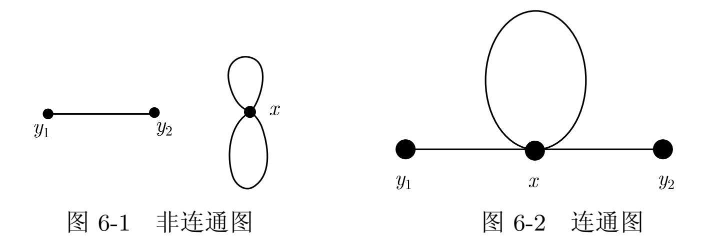


图 6-1　非连通图　　　　图 6-2　连通图

我们现在来展示, 上面的这个非连通图在 $W=-\mathrm{i}\ln Z$ 里会被抵消掉. 首先有

$$\frac{\delta W(J)}{\delta J_1}=-\mathrm{i}\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J_1},\quad \frac{\delta^2 W(J)}{\delta J_1\delta J_2}=-\mathrm{i}\left(-\frac{1}{Z^2}\frac{\delta Z}{\delta J_1}\frac{\delta Z}{\delta J_2}+\frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J_1\delta J_2}\right) \tag{6-110}$$

令 $J=0$, 得到

$$\left.\frac{\delta^2 W(J)}{\delta J_1\delta J_2}\right|_{J=0}=-\mathrm{i}\ \frac{1}{Z}\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta J_1\delta J_2}\right|_{J=0} \tag{6-111}$$

其中, 第二个因子是刚刚计算过的. 而对于第一个因子 Z, 有

$$Z[J]=\left[\exp\int \mathrm{d}^4x\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right]Z_0[J]=Z_0[J](1+\lambda z_1[J]+\cdots) \tag{6-112}$$

其中

$$z_1=\frac{1}{4!}\frac{1}{Z_0[J]}\left\{\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]^4\right\}Z_0[J] \tag{6-113}$$

$$\begin{aligned}Z_0[J]=&1+\frac{1}{2}\int J_1\varDelta_{12}J_2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2!}\int(J_1\varDelta_{12}J_2)(J_3\varDelta_{34}J_4)\\&+\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{3!}\int(J_1\varDelta_{12}J_2)(J_3\varDelta_{34}J_4)(J_5\varDelta_{56}J_6)+\cdots\end{aligned} \tag{6-114}$$

显然, Z_0 中只有 J^4 的项才会对 z_1 有贡献, 即

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}Z_0^{(4)}[J]=\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2!}\int 4(\varDelta_{x2}J_2)(J_3\varDelta_{34}J_4) \tag{6-115}$$

$$\frac{\delta^2}{\delta J^2(x)}Z_0^{(4)}[J]=\frac{1}{2!}\int[(\varDelta_{xx})(J_3\varDelta_{34}J_4)+2(\varDelta_{x2}J_2)(\varDelta_{x4}J_4)] \tag{6-116}$$

$$\frac{\delta^3}{\delta J^3(x)}Z_0^{(4)}[J]=\frac{1}{2!}\int[2(\varDelta_{xx})(\varDelta_{x4}J_4)+2\times 2(\varDelta_{xx})(\varDelta_{x4}J_4)] \tag{6-117}$$

$$\frac{\delta^4}{\delta J^4(x)}Z_0^{(4)}[J]=\frac{1}{2!}[2(\varDelta_{xx})(\varDelta_{xx})+2\times 2(\varDelta_{xx})(\varDelta_{xx})]=3(\varDelta_{xx})^2 \tag{6-118}$$

所以

$$\int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]^4 Z_0^{(4)}[J] = 3\int \mathrm{d}^4x\Delta^2(x,x) \tag{6-119}$$

于是得到

$$1+\lambda z_1 = 1+\frac{\lambda}{8}\int \mathrm{d}^4x\Delta^2\left(x,x\right) \tag{6-120}$$

因此

$$Z^{-1} = 1-\frac{\lambda}{8}\int \mathrm{d}^4x\Delta^2\left(x,x\right) \tag{6-121}$$

再加上前面推导出来的结果

$$\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta J_1\delta J_2}\right|_{J=0} = \Delta\left(z_1,z_2\right)+\frac{\lambda}{2}\int \mathrm{d}^4x\left[\Delta(x,x)\Delta(z_1,x)\Delta(z_2,x)+\frac{1}{4}\Delta(x,x)^2\Delta\left(z_1,z_2\right)\right] \tag{6-122}$$

得到

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta^2 W\left(J\right)}{\delta J_1\delta J_2}\right|_{J=0} &= -\,\mathrm{i}\,\frac{1}{Z}\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta J_1\delta J_2}\right|_{J=0} = -\mathrm{i}\left[1-\frac{\lambda}{8}\int \mathrm{d}^4x\Delta^2(x,x)\right]\\ &\quad\times\left\{\Delta\left(z_1,z_2\right)+\frac{\lambda}{2}\int \mathrm{d}^4x\left[\Delta(x,x)\Delta(z_1,x)\Delta(z_2,x)\right.\right.\\ &\quad\left.\left.+\frac{1}{4}\Delta^2(x,x)\Delta(z_1,z_2)\right]\right\}\\ &= -\,\mathrm{i}\Delta\left(z_1,z_2\right)-\mathrm{i}\frac{\lambda}{2}\int \mathrm{d}^4x\;\Delta(x,x)\Delta(z_1,x)\Delta(z_2,x)\end{aligned}$$

非连通图被消掉, 只有连通图保留了下来. 为了方便, 我们以后可以用 $Z_0\left[J\right]$ 做计算, 然后丢掉非连通图.

现在我们来计算四点函数

$$\left.\frac{\delta^2 Z\left[J\right]}{\delta J\left(x_1\right)\delta J\left(x_2\right)\delta J\left(x_3\right)\delta J\left(x_4\right)}\right|_{J=0} \tag{6-123}$$

需要 Z_0 中的 8 阶项

$$Z_0^{(8)}\left[J\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1}{4!}\int(J_1\mathit{\Delta}_{12}J_2)(J_3\mathit{\Delta}_{34}J_4)(J_5\mathit{\Delta}_{56}J_6)(J_7\mathit{\Delta}_{78}J_8) \tag{6-124}$$

于是有

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}Z_0^{(8)}\left[J\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1}{4!}\int 8(\mathit{\Delta}_{x2}J_2)(J_3\mathit{\Delta}_{34}J_4)(J_5\mathit{\Delta}_{56}J_6)(J_7\mathit{\Delta}_{78}J_8) \tag{6-125}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2 Z_0^{(8)}\left[J\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1}{4!}\int 8[(\mathit{\Delta}_{xx})(J_3\mathit{\Delta}_{34}J_4)(J_5\mathit{\Delta}_{56}J_6)(J_7\mathit{\Delta}_{78}J_8)\\ +6(\mathit{\Delta}_{x2}J_2)(\mathit{\Delta}_{x4}J_4)(J_5\mathit{\Delta}_{56}J_6)(J_7\mathit{\Delta}_{78}J_8)]\end{aligned} \tag{6-126}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 Z_0^{(8)}[J] = & \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{4!} \int 8[(\Delta_{xx})6(\Delta_{x4}J_4)(J_5\Delta_{56}J_6)(J_7\Delta_{78}J_8) \\
& +6\times 2(\Delta_{xx})(\Delta_{x4}J_4)(J_5\Delta_{56}J_6)(J_7\Delta_{78}J_8) \\
& +6\times 4(\Delta_{x2}J_2)(\Delta_{x4}J_4)(\Delta_{x6}J_6)(J_7\Delta_{78}J_8)] \\
= & \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{4!} \int 8[18(\Delta_{xx})(\Delta_{x4}J_4)(J_5\Delta_{56}J_6)(J_7\Delta_{78}J_8) \\
& +24(\Delta_{x2}J_2)(\Delta_{x4}J_4)(\Delta_{x6}J_6)(J_7\Delta_{78}J_8)]
\end{aligned} \tag{6-127}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 Z_0^{(8)}[J] = & \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{4!} \int 8[18(\Delta_{xx})(\Delta_{xx})(J_5\Delta_{56}J_6)(J_7\Delta_{78}J_8) \\
& + 18\times 4(\Delta_{xx})(\Delta_{x4}J_4)(\Delta_{x6}J_6)(J_7\Delta_{78}J_8) \\
& + 24\times 3(\Delta_{xx})(\Delta_{x4}J_4)(\Delta_{x6}J_6)(J_7\Delta_{78}J_8) \\
& + 24\times 2(\Delta_{x2}J_2)(\Delta_{x4}J_4)(\Delta_{x6}J_6)(\Delta_{x8}J_8)] \\
= & \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{4!} \int [96(\Delta_{xx})^2(J_5\Delta_{56}J_6)(J_7\Delta_{78}J_8) \\
& + 96\times 8(\Delta_{xx})(\Delta_{x4}J_4)(\Delta_{x6}J_6)(J_7\Delta_{78}J_8) \\
& + 48\times 8(\Delta_{x2}J_2)(\Delta_{x4}J_4)(\Delta_{x6}J_6)(\Delta_{x8}J_8)]
\end{aligned}
$$

不难看出来, 前两项包含 Δ_{xx}, 对应非连通图. 只有最后一项给出连通的四点函数 (图 6-3):

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(y_1)\,\delta J(y_2)\,\delta J(y_3)\,\delta J(y_4)}\right|_{J=0} &= \frac{\lambda}{4!}\left.\left\{\int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]^4\right\} Z_0^{(8)}[J]\right|_{J=0} \\
&= \lambda(\Delta_{xy_1})(\Delta_{xy_2})(\Delta_{xy_3})(\Delta_{xy_4})
\end{aligned} \tag{6-128}
$$

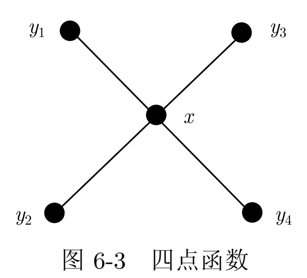


图 6-3 四点函数

由此看到, 在路径积分体系中, 得到了与正则量子化中使用 Wick 定理得到的完全相同的微扰展开, 并且也得到了相同的 Feynman 规则. 我们注意到, 生成泛函

$Z[J]$ 包含连通的和非连通的图, 但只有连通图是我们感兴趣的. 连通的 Green 函数是

$$G^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left.\frac{-\mathrm{i}\delta^n\ln Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0} \tag{6-129}$$

6.3 Grassmann 代 数

在路径积分体系中, 我们使用经典的函数替代算符来量子化满足对易关系的玻色场, 而在用路径积分量子化费米场时, 需要对反对易的 c 数函数作积分. 这在 Feynman 最初的路径积分量子化的表述中会带来问题. 这个问题后来是通过运用 Grassmann 代数解决的. Grassmann 代数处理的是反对易的数学量. 现在我们来简单介绍一下这个反对易代数.

在一个 n 维 Grassmann 代数中, 有 n 个生成元 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\cdots,\theta_n$, 满足反对易关系

$$\{\theta_i,\theta_j\}=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n \tag{6-130}$$

并且每一个元素都可以展开成一个有限级数

$$P(\theta)=P_0+P^{(1)}_{i_1}\theta_{i_1}+P^{(2)}_{i_1i_2}\theta_{i_1}\theta_{i_2}+\cdots+P_{i_1\cdots i_n}\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_n} \tag{6-131}$$

注意, 这个代数中对所有的 i 都有 $\theta_i^2=0$. 这说明不能用矩阵来实现这个代数.

6.3.1 一维

取 $n=1$, 有

$$\{\theta,\theta\}=0\quad 或\quad \theta^2=0 \tag{6-132}$$

任何元素都可以写成

$$P(\theta)=P_0+\theta P_1 \tag{6-133}$$

其中, P_0 是代数中一个与 θ 无关的元素. 我们可以按如下方法定义“微分”和“积分”. 在通常的实变函数中, 微分会降低实数变量的幂次. 我们类比于这个性质来定义 Grassmann 代数中的微分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\theta=\theta\frac{\overleftarrow{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\theta}=1,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}1=0\implies\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P(\theta)=P_1 \tag{6-134}$$

我们注意到, 微分 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}$ 有方向性. 为了定义积分, 利用平移不变性作为准则, 即

$$\int\mathrm{d}\theta P(\theta)=\int\mathrm{d}\theta P(\theta+\alpha) \tag{6-135}$$

α 是另一个 Grassmann 变量. 这意味着

$$\int \mathrm{d}\theta = 0 \tag{6-136}$$

可以归一化这个积分, 使得

$$\int \mathrm{d}\theta\, \theta = 1 \tag{6-137}$$

那么有

$$\int \mathrm{d}\theta P(\theta) = P_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} P(\theta) \tag{6-138}$$

考虑如下的变量代换

$$\theta \longrightarrow \widetilde{\theta} = a + b\theta \tag{6-139}$$

因为

$$\int \mathrm{d}\widetilde{\theta} P\left(\widetilde{\theta}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\widetilde{\theta}} P\left(\widetilde{\theta}\right) = P_1 \tag{6-140}$$

$$\int \mathrm{d}\theta P\left(\widetilde{\theta}\right) = \int \mathrm{d}\theta \left[P_0 + \widetilde{\theta} P_1\right] = \int \mathrm{d}\theta \left[P_0 + (a + b\theta) P_1\right] = bP_1 \tag{6-141}$$

得到

$$\int \mathrm{d}\widetilde{\theta} P\left(\widetilde{\theta}\right) = \int \mathrm{d}\theta \left(\frac{\mathrm{d}\widetilde{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\right)^{-1} P\left(\widetilde{\theta}(\theta)\right) \tag{6-142}$$

因此这里的 Jacobi 行列式是 c 数积分中的 Jacobi 行列式的逆.

尽管这些微分和积分的定义看起来很刻意, 但是它们已经被成功地应用在量子场论中, 没有出现任何问题.

6.3.2 一般情况

我们可以将上面的这些定义推广到 n 维 Grassmann 代数的情况

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_i}(\theta_1\theta_2\theta_3\cdots\theta_n) = \delta_{i_1}\theta_2\cdots\theta_n - \delta_{i_2}\theta_1\theta_3\cdots\theta_n + \cdots + (-1)^{n-1}\delta_{i_n}\theta_1\theta_2\cdots\theta_{n-1} \tag{6-143}$$

$$\{\mathrm{d}\theta_i, \mathrm{d}\theta_j\} = 0 \tag{6-144}$$

$$\int \mathrm{d}\theta_i = 0, \quad \int \mathrm{d}\theta_i \theta_j = \delta_{ij} \tag{6-145}$$

这里的“−”号来自于 Grassmann 生成元的反对易性质. 对于如下的变量代换

$$\widetilde{\theta}_i = b_{ij}\theta_j \tag{6-146}$$

有

$$\int \mathrm{d}\widetilde{\theta}_n \mathrm{d}\widetilde{\theta}_{n-1}\cdots\mathrm{d}\widetilde{\theta}_1 P\left(\widetilde{\theta}\right) = \int \mathrm{d}\theta_n\cdots\mathrm{d}\theta_1 \left[\det\frac{\mathrm{d}\widetilde{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\right]^{-1} P\left(\widetilde{\theta}(\theta)\right) \tag{6-147}$$

证明如下:

$$\widetilde{\theta_1}\widetilde{\theta_2}\cdots\widetilde{\theta_n}=b_{1i_1}b_{2i_2}\cdots b_{ni_n}\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_n} \tag{6-148}$$

只有当 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 都不相同时, 上式的右边才不是 0. 所以有

$$\begin{aligned}\widetilde{\theta_1}\widetilde{\theta_2}\cdots\widetilde{\theta_n}&=b_{1i_1}b_{2i_2}\cdots b_{ni_n}\epsilon_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_n}\\&=(\det b)\,\theta_1\theta_2\theta_3\cdots\theta_n\end{aligned}$$

其中, 利用了关系式

$$(\det b)=\epsilon_{i_1,i_2,\cdots,i_n}b_{1i_1}b_{2i_2}\cdots b_{ni_n} \tag{6-149}$$

由归一化条件

$$1=\int \mathrm{d}\widetilde{\theta_n}\mathrm{d}\widetilde{\theta_{n-1}}\cdots\mathrm{d}\widetilde{\theta_1}\left(\widetilde{\theta_1}\widetilde{\theta_2}\cdots\widetilde{\theta_n}\right)=(\det b)\int \mathrm{d}\widetilde{\theta_n}\mathrm{d}\widetilde{\theta_{n-1}}\cdots\mathrm{d}\widetilde{\theta_1}\,(\theta_1\theta_2\theta_3\cdots\theta_n) \tag{6-150}$$

得到

$$\mathrm{d}\widetilde{\theta_n}\mathrm{d}\widetilde{\theta_{n-1}}\cdots\mathrm{d}\widetilde{\theta_1}=(\det b)^{-1}\,\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_n \tag{6-151}$$

6.3.3 Grassmann 代数的 Gauss 积分

在场论中, 需要计算如下的 Gauss 型积分

$$G(A)\equiv\int \mathrm{d}\theta_n\cdots\mathrm{d}\theta_1\exp\left(\frac{1}{2}(\theta,A\theta)\right),\quad (\theta,A\theta)=\theta_iA_{ij}\theta_j \tag{6-152}$$

首先考虑 $n=2$ 的简单情形, 其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & A_{12}\\ -A_{12} & 0\end{pmatrix} \tag{6-153}$$

有

$$G(A)=\int \mathrm{d}\theta_2\mathrm{d}\theta_1\exp(\theta_1\theta_2A_{12})\simeq\int \mathrm{d}\theta_2\mathrm{d}\theta_1(1+\theta_1\theta_2A_{12})=A_{12}=\sqrt{\det A} \tag{6-154}$$

对于一般的 n 为偶数的情形, 首先通过一个幺正变换将矩阵 A 变成标准型

$$UAU^\dagger=A_s \tag{6-155}$$

$$A_s=\begin{bmatrix}a\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&&\\&b\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&\\&&\ddots\end{bmatrix} \tag{6-156}$$

这可由如下推导看出来. 因为 iA 是厄米的, 所以它可以用幺正变换来对角化

$$V\,(\mathrm{i}A)\,V^{\dagger}=A_d \tag{6-157}$$

其中, V 是幺正矩阵, A_d 是实数的对角矩阵, 对角元是久期方程 (secular equation) 的解

$$\det|\mathrm{i}A-\lambda I|=0 \tag{6-158}$$

因为 $A=-A^{\mathrm{T}}$, 有

$$0=\det|\mathrm{i}A-\lambda I|^{\mathrm{T}}=\det|-\mathrm{i}A-\lambda I| \tag{6-159}$$

这说明如果 λ 是一个解, 那么 $(-\lambda)$ 也是解. 因而 A_d 就是如下形式

$$A_d=\begin{pmatrix} a & & & & \\ & -a & & & \\ & & b & & \\ & & & -b & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{6-160}$$

为了把这个矩阵变成标准型, 使用幺正矩阵

$$S_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{6-161}$$

它有如下的性质

$$S_2\,(-\mathrm{i})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}S_2^{\dagger}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6-162}$$

因此得到 $S\,(-\mathrm{i}A_d)\,S^{\dagger}=A_s$, 其中

$$S=\begin{pmatrix} S_2 & & \\ & S_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \tag{6-163}$$

于是, 对于一般的 n 的积分是

$$G\,(A)=\int\mathrm{d}\theta_n\cdots\mathrm{d}\theta_1\exp\left(\frac{1}{2}\,(\theta,A\theta)\right)=\sqrt{\det A},\quad n\text{为偶数} \tag{6-164}$$

对于"复的" Grassmann 变量的积分是

$$\int\mathrm{d}\theta_n\mathrm{d}\bar{\theta}_n\mathrm{d}\theta_{n-1}\mathrm{d}\bar{\theta}_{n-1}\cdots\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\bar{\theta}_1\exp\left(\bar{\theta},A\theta\right)=\det A \tag{6-165}$$

对于费米场, 生成泛函的形式是

$$W\left[\eta,\bar{\eta}\right]=\int\left[\mathrm{d}\psi\left(x\right)\right]\left[\mathrm{d}\bar{\psi}\left(x\right)\right]\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[\mathcal{L}\left(\psi,\bar{\psi}\right)+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi\right]\right\} \tag{6-166}$$

不难看出来, 如果 $\mathcal{L}$ 与 $\psi,\bar{\psi}$ 二次相关, 即

$$\mathcal{L}=(\bar{\psi},A\psi) \tag{6-167}$$

那么有

$$W=\int\left[\mathrm{d}\psi\left(x\right)\right]\left[\mathrm{d}\bar{\psi}\left(x\right)\right]\exp\left\{\int\mathrm{d}^4x\bar{\psi}A\psi\right\}=\det A \tag{6-168}$$

第7章 重整化理论

7.1 重 整 化

量子场论的学习者通常都认为重整化是最困难的部分。我们将会看到, 量子场论中充满了各种各样的无穷大. 如果想要将理论预测与实验结果进行对比, 就需要处理这些无穷大. 初看起来这似乎是一个很艰巨的任务. 事实上也的确如此, 它的困难甚至让一些物理学家试图放弃量子场论. 但经过多年的努力和坚持 [5], 物理学家找到了重整化的方法, 让这些发散的理论变得有意义, 理论的预测结果也能与实验吻合得很好, 这就使得重整化方法被人们所接受.

重整化是一个从测量的物理量中将无穷大分离和消除的步骤. 它是一个具有一般性的方法, 并不局限于相对论性量子场论. 比如, 考虑一个在固体中运动的电子. 如果电子与固体晶格的相互作用足够弱, 就可以用一个有效质量 m^* 来描述它对外力的反应, 这个有效质量显然与在固体之外测得的电子质量 m 不同. 因此, 电子与固体晶格的相互作用使电子质量从 m 改变为 (或者说重整化为)m^*. 在这个简单的例子中, m 和 m^* 都是有限也可测量的. 而相对论性量子场论中则有两个区别. 一是相互作用引起的重整化通常是无穷大的 (对应于以后会学到的圈图), 这些无穷大来自于: 即使对很弱的相互作用依然有大动量区的贡献. 二是我们没有办法像上一个例子一样将电子从固体中取出来, 或者说没有办法“关掉”粒子之间的相互作用, 因此没有相互作用的“裸量”是不可测量到的. 简单地说, 在量子场中重整化的步骤就是将各种发散“打包”到裸量中, 或者说, 通过重新定义无法测量的物理量来吸收发散, 从而得到有限的可测量的物理量. 由此得到的有限的重整化质量只能由实验确定, 而无法单独由理论预测得到.

尽管重整化的概念很简单, 实际操作却非常复杂. 7.2 节我们用 $\lambda\phi^4$ 理论对重整化的步骤作一个简述和导引. 实际上我们需要一个将无穷大分离出来的步骤, 称为正规化 (regularization)[6]. 7.2 节我们先跳过该步骤, 而在后面加以补述. 另外, 还需注意的一点是, 并非所有的量子场论都可以通过将某些物理量重新定义来吸收所有的发散. 有这种性质的场论称为**可重整的**, 反之则称为**不可重整的**. 这已经成为判断一个理论是否可以运作的重要判据, 因为实际上我们并不了解如何处理一个不可重整的理论. 理论是否可以重整化的判别也将在后面讲述.

7.1.1 $\lambda\phi^4$ 理论的重整化

为了避免自旋和规范选择带来的复杂性, 我们考虑一个标量场的 $\lambda\phi^4$ 理论, 拉氏量为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \tag{7-1}$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \phi_0)^2 - \mu_0^2 \phi_0^2], \quad \mathcal{L}_I = -\frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4 \tag{7-2}$$

这里的 μ_0^2, λ_0, ϕ_0 通常称为**未重整化的**或**裸的**物理量, 会被相互作用重整化. 在前面的讨论中我们已经得到了 Feynman 规则, 顶点和传播子如图 7-1 所示.

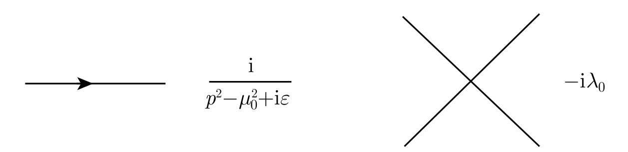


图 7-1 $\lambda\phi^4$ 理论的顶点与传播子

其中, p 为传播子带的动量, μ_0^2 为 $\mathcal{L}_0$ 中的裸质量. 我们需要注意以下几点:

(1) 每个顶点四动量守恒.

(2) 如果内部动量不能由动量守恒来确定, 需要作积分.

(3) 外线没有传播子.

作为一个简单的例子, 我们先来考虑两点函数 (传播子), 定义为

$$\mathrm{i}\Delta(p) = \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \langle 0 | T(\varphi_0(x)\varphi_0(0)) | 0 \rangle \tag{7-3}$$

它包含许多图的贡献, 如图 7-2 所示.

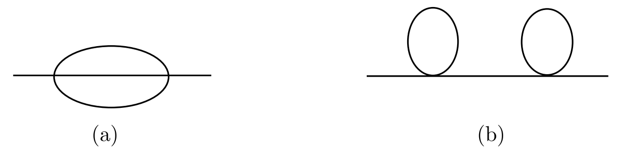


图 7-2 两点函数的 Feynman 图

先定义**单粒子不可约图**(one-particle-irreducible, 1PI): 断开一个 Feynman 图的任何一条内线都不能使它分成两部分, 这样的图就称为单粒子不可约图. 例如, 图 7-2 中, (a) 就是一个 1PI 图, 而 (b) 则不是. 很显然, 我们可以将一个一般的图表示成一些 1PI 图的集合, 这些子图通过一条线相连接. 不难看出, 对于一个单粒子可约的图, 可以把它所有的发散都归到 1PI 子图中. 因为在单粒子可约的图中, 可被断开的内线是不会被积分的. 例如, 图 7-2(b) 的发散就是由于它的单圈的 1PI 子图. 因此在重整化的讨论中, 我们可以专注于 1PI 图.

按照上面的逻辑不难发现, 可以将完全的传播子写成 1PI 自能图的组合 (图 7-3), 它会构成一个几何级数.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\Delta(p) &= \frac{\mathrm{i}}{p^2-\mu_0^2+\mathrm{i}\varepsilon} + \frac{\mathrm{i}}{p^2-\mu_0^2+\mathrm{i}\varepsilon}\left(-\mathrm{i}\Sigma\left(p^2\right)\right)\frac{\mathrm{i}}{p^2-\mu_0^2+\mathrm{i}\varepsilon} + \cdots \\
&= \frac{\mathrm{i}}{p^2-\mu_0^2-\Sigma\left(p^2\right)+\mathrm{i}\varepsilon}
\end{aligned} \tag{7-4}
$$

其中, $\Sigma\left(p^2\right)$ 包含了所有的 1PI 自能图. 显然, 只要能让自能 $\Sigma\left(p^2\right)$ 变得有限, 传播子 $\Delta(p)$ 也将是有限的. 所以下面我们只需要考虑 1PI 图.

= + + + ...

图 7-3 1PI 自能图

在一圈的范围, 图 7-4 和图 7-5 包含了所有发散的 1PI 图.

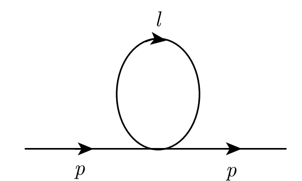


图 7-4 两点的 1PI 发散图

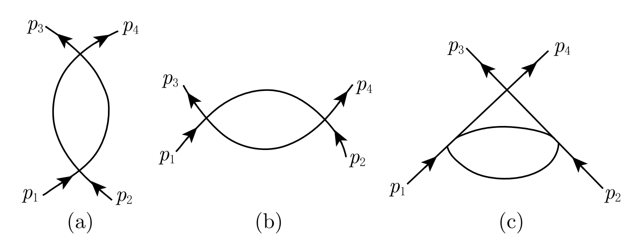


图 7-5 四点的 1PI 发散图

其中, 图 7-4 是自能图

$$
-\mathrm{i}\Sigma(p) = -\frac{\mathrm{i}\lambda_0}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{l^2-\mu_0^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{7-5}
$$

它是二次发散的. 图 7-5 是一圈的四点函数, 其中 (a) 的贡献为

$$
\varGamma(p^2) = \frac{(\mathrm{i}\lambda_0)^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{(l-p)^2-\mu_0^2+\mathrm{i}\varepsilon}\frac{\mathrm{i}}{l^2-\mu_0^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{7-6}
$$

它是对数发散的. 注意在 $\varGamma\left(p^2\right)$ 中, 积分对外动量 p 的依赖关系体现为分母中的 $(p-l)$. 这就是说, 如果对 $\varGamma\left(p^2\right)$ 求外动量 p 的微分, 分母中 l 的幂次会增加, 积分

将更加收敛, 即

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma(p^2)=\frac{1}{2p^2}p_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Gamma(p^2)=\frac{\lambda_0^2}{p^2}\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{(l-p)\cdot p}{[(l-p)^2-\mu_0^2+\mathrm{i}\varepsilon]^2}\frac{1}{l^2-\mu_0^2+\mathrm{i}\varepsilon}\longrightarrow \text{收敛} \tag{7-7}$$

只要外动量是与内动量一起出现在分母中, 这都是成立的. 因此, 如果对 $\Gamma(p^2)$ 作 Taylor 展开

$$\Gamma(p^2)=a_0+a_1p^2+\cdots+\frac{1}{n!}a_n(p^2)^n+\cdots \tag{7-8}$$

其中, $a_n=\left.\dfrac{\partial^n}{\partial^n p^2}\Gamma(p^2)\right|_{p^2=0}$, 发散就只包含在展开式的前几项中. 因此, 可以用 Taylor 展开把发散的量与收敛的项分离开. 在这个简单的例子中, 得到

$$\Gamma(p^2)=\Gamma(0)+\tilde{\Gamma}(p^2) \tag{7-9}$$

只有第一项 $\Gamma(0)$ 是发散的, 第二项 $\tilde{\Gamma}(p^2)$ 包含所有更高阶的微分项, 是收敛的.

其他的一圈图要么是有限的, 要么包含上面的图作为子图. 例如, 图 7-6.

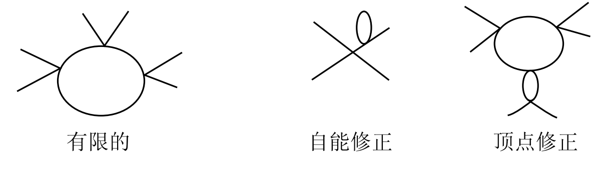


图 7-6 其他的一圈图

1. 质量和波函数重整化

在 1PI 自能中, 关于外动量 p 的展开会得到两个发散项, 因为它是二次发散的

$$\Sigma(p^2)=\Sigma(\mu^2)+(p^2-\mu^2)\Sigma'(\mu^2)+\tilde{\Sigma}(p^2) \tag{7-10}$$

其中, μ^2 是用来作 Taylor 展开的任意的一个参考点. 很显然, 第一项 $\Sigma(\mu^2)$ 是二次发散, 第二项 $\Sigma'(\mu^2)$ 是对数发散, 第三项 $\tilde{\Sigma}(p^2)$ 则是有限的, 且满足条件

$$\tilde{\Sigma}(\mu^2)=0,\quad \tilde{\Sigma}'(\mu^2)=0 \tag{7-11}$$

完整的传播子为

$$\mathrm{i}\Delta(p^2)=\frac{\mathrm{i}}{p^2-\mu_0^2-\Sigma(\mu^2)-(p^2-\mu^2)\Sigma'^2-\tilde{\Sigma}(p^2)} \tag{7-12}$$

假如选择 μ^2 满足下列关系

$$\mu_0^2-\Sigma(\mu^2)=\mu^2\quad(\text{质量重整化}) \tag{7-13}$$

那么 $\Delta(p^2)$ 在 $p^2=\mu^2$ 处有极点. 极点的位置 μ^2 可以被解释为物理质量, μ_0^2 则是出现在初始拉氏量中的裸质量. 注意, 式 (7-13) 中的 $\Sigma(\mu^2)$ 是发散的, 因此需要裸质量 μ_0^2 也以某种形式发散, 使得物理质量 $\mu_0^2-\Sigma(\mu^2)$ 是有限的. 换句话说, 我们将发散的贡献归给一个不可测量的量 μ_0^2. 它以某种形式发散, 使得它与由相互作用得出的项 $\Sigma(\mu^2)$ 的组合是有限的. 这个解释看起来很奇怪, 乍看之下很难接受. 但它在逻辑上是自洽的, 并且是切实可行的.

利用式 (7-13) 中的质量重整化条件, 可以将完整的传播子写成

$$\mathrm{i}\Delta(p^2)=\frac{\mathrm{i}}{(p^2-\mu^2)[1-\Sigma'(\mu^2)]-\tilde{\Sigma}(p^2)} \tag{7-14}$$

由于 $\Sigma'(\mu^2)$ 和 $\tilde{\Sigma}(p^2)$ 与 λ_0 同阶或更高阶, 可以作一个近似

$$\tilde{\Sigma}(p^2)\longrightarrow\left(1-\Sigma'(\mu^2)\right)\tilde{\Sigma}(p^2)+O\left(\lambda_0^2\right) \tag{7-15}$$

其中, 我们增加的这一项 $-\Sigma'\left(\mu^2\right)\tilde{\Sigma}(p^2)$ 是 λ_0^2 阶的项, 在对 λ_0 的微扰展开中可以忽略. 这样做目的是为了提取出因子 $\left(1-\Sigma'(\mu^2)\right)$, 将完整的传播子写成

$$\mathrm{i}\Delta(p^2)=\frac{\mathrm{i}Z_\phi}{p^2-\mu^2-\tilde{\Sigma}(p^2)+\mathrm{i}\varepsilon},\quad Z_\phi=\frac{1}{1-\Sigma'(\mu^2)}\approx1+\Sigma'(\mu^2) \tag{7-16}$$

这里将分母展开成了如下形式

$$\frac{1}{1-\Sigma'(\mu^2)}\approx1+\Sigma'(\mu^2)+O\left(\lambda_0^2\right) \tag{7-17}$$

现在这个发散被归到了一个乘积因子 Z_ϕ 中, 它可以通过对场算符作标度变换 (rescaling) 来消除:

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{Z_\phi}}\phi_0 \tag{7-18}$$

场算符 ϕ 的传播子为

$$\mathrm{i}\Delta_R(p)=\int\mathrm{d}^4x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\langle0|T\{\phi(x)\phi(0)\}|0\rangle=\frac{1}{Z_\phi}\mathrm{i}\Delta(p^2)=\frac{\mathrm{i}}{p^2-\mu^2-\tilde{\Sigma}(p^2)+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{7-19}$$

它已经没有发散了. Z_ϕ 通常称为**波函数重整化常数**. 新的场算符 ϕ 称为重整化的场算符. 又一次地, 我们将发散推脱给了裸的或者未重整化的场 ϕ_0, 重整化的场 ϕ 的矩阵元就是收敛的了. 对于更一般的 Green 函数, 用重整化的场来定义重整化的 Green 函数

$$\begin{aligned}G_R^{(n)}(x_1\cdots x_n)&=\langle0|T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\}|0\rangle\\&=Z_\phi^{-n/2}\langle0|T\{\phi_0(x_1)\cdots\phi_0(x_n)\}|0\rangle=Z_\phi^{-n/2}G_0^{(n)}(x_1\cdots x_n)\end{aligned} \tag{7-20}$$

使得重整化的 Green 函数免于发散.

消除关于某一点的 Taylor 展开中前几项的方法有时称为**减除方案**(subtraction scheme). 在这个例子中, 将自能函数 $\Sigma(p^2)$ 在 μ^2 处展开成式 (7-10) 中的样子, 减掉展开式中的前两项: $\Sigma(\mu^2)$ 和 $(p^2-\mu^2)\Sigma'(\mu^2)$. 剩下的这一项 $\tilde{\Sigma}(p^2)$ 满足条件

$$\tilde{\Sigma}(p^2)\Big|_{p^2=\mu^2}=0, \quad \frac{\partial\tilde{\Sigma}(p^2)}{\partial p^2}\Bigg|_{p^2=\mu^2}=0 \tag{7-21}$$

实际上, 方程 (7-21) 中的条件包含了展开点和要被消去的项的所有信息. 这些条件经常被用来具体规定重整化程序.

另外也可以注意到, 既然我们的目的是要消除发散, 不一定要像上面一样选物理质量 μ^2 为展开点. 假设用另外一点 μ_1^2 作 Taylor 展开

$$\Sigma(p^2)=\Sigma(\mu_1^2)+(p^2-\mu_1^2)\Sigma'(\mu_1^2)+\tilde{\Sigma}(p^2) \tag{7-22}$$

那么完全传播子就是

$$\mathrm{i}\Delta(p^2)=\frac{\mathrm{i}}{p^2-\mu_0^2-\Sigma(\mu_1^2)-(p^2-\mu_1^2)\Sigma'(\mu_1^2)-\tilde{\Sigma}(p^2)} \tag{7-23}$$

我们依然可以把物理质量 μ^2 定义为传播子 $\mathrm{i}\Delta(p^2)$ 的极点处 p^2 的值, 即

$$\mu^2-\mu_0^2-\Sigma(\mu_1^2)-(\mu^2-\mu_1^2)\Sigma'(\mu_1^2)-\tilde{\Sigma}(\mu^2)=0 \tag{7-24}$$

它是以一个复杂函数的形式给出物理质量 μ^2, 是裸质量 μ_0^2、发散量 $\Sigma(\mu_1^2),\Sigma'(\mu_1^2)$ 和收敛量 $\tilde{\Sigma}(\mu^2)$ 的一个函数. μ_1^2 现在是理论的一个参数, 所有的物理量都是它的函数. 它的值要通过比较某个物理量的理论计算和实验测量的结果来定. 这看起来会很烦琐, 但原则上是行得通的.

总而言之, 通过重新定义质量和场算符, 质量和波函数重整化消除了 1PI 自能图中的所有发散. 所有的发散都被归到不可观测的裸质量 μ_0^2 和裸的场算符 ϕ_0 中. $\lambda\phi^4$ 理论的重整化程序是为了展示这个程序是可以被一致地扩展到更高阶的. 这是一个艰巨的任务, 在此不作讨论. 稍后我们会用抵消项的方案来说明, 使得它看起来更可信.

2. 耦合常数重整化

对于 1PI 的四点函数 $\Gamma^{(4)}(p_1\cdots p_4)$, 有 3 个发散的一圈图 (图 7-5), 再加上最低阶的树图贡献, 得到

$$\Gamma_0^{(4)}(s,t,u)=-\mathrm{i}\lambda_0+\Gamma(s)+\Gamma(t)+\Gamma(u) \tag{7-25}$$

其中

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2, \quad s + t + u = 4\mu^2 \tag{7-26}$$

是通常用的 Mandelstam 变量. 由于这些项都是对数发散的, 只需要分离出 Taylor 展开中的第一项, 或者说只需要做一次减除就可以使它收敛. 为了消除四点函数中的发散, 需要在某个运动学的点对它做一次减除. 为了方便起见, 我们选择对称点 $s_0 = t_0 = u_0 = \dfrac{4\mu^2}{3}$, 那么有

$$\Gamma_0^{(4)}(s,t,u) = -\mathrm{i}\lambda_0 + 3\Gamma(s_0) + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u) \tag{7-27}$$

其中

$$\tilde{\Gamma}(s) = \Gamma(s) - \Gamma(s_0) \tag{7-28}$$

是有限的. 现在将发散的项合并到一块, 定义耦合常数重整化因子 Z_λ, 则有

$$-\mathrm{i}\lambda_0 + 3\Gamma(s_0) = -\mathrm{i}Z_\lambda^{-1}\lambda_0 \tag{7-29}$$

因此

$$\Gamma_0^{(4)}(s,t,u) = -\mathrm{i}Z_\lambda^{-1}\lambda_0 + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u) \tag{7-30}$$

在对称点可以看到

$$\Gamma_0^{(4)}(s_0,t_0,u_0) = -\mathrm{i}Z_\lambda^{-1}\lambda_0 \tag{7-31}$$

因为 $\tilde{\Gamma}(s_0) = \tilde{\Gamma}(t_0) = \tilde{\Gamma}(u_0) = 0$, 重整化后的 1PI 四点函数 $\Gamma_R^{(4)}$ 与 Green 函数由下式联系在一起

$$\Gamma_R^{(4)} = \prod_{j=1}^{4}[\mathrm{i}\Delta_R(p_j)]^{-1}G_R^{(4)} \tag{7-32}$$

所以重整化和未重整化的 1PI 四点函数的关系是

$$\Gamma_R^{(4)}(s,t,u) = Z_\phi^2\Gamma_0^{(4)}(s,t,u) \tag{7-33}$$

或

$$\Gamma_R^{(4)}(s,t,u) = Z_\phi^2[-\mathrm{i}Z_\lambda^{-1}\lambda_0 + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)] \tag{7-34}$$

由上式看到, 发散是被包含在第一项里的, 因此定义重整化的耦合常数 λ 为

$$\lambda = Z_\phi^2 Z_\lambda^{-1}\lambda_0 \tag{7-35}$$

我们要求裸的或未重整化的耦合常数 λ_0 以某种形式发散, 使得乘积 $Z_\phi^2 Z_\lambda^{-1}\lambda_0$ 是收敛的. 这样重整化的 1PI 四点函数就变成

$$\begin{aligned}\Gamma_R^{(4)}(p_1,\cdots,p_4) &= Z_\phi^2\Gamma_0^{(4)} = -\mathrm{i}Z_\phi^2 Z_\lambda^{-1}\lambda_0 + Z_\phi^2[\tilde\Gamma(s)+\tilde\Gamma(t)+\tilde\Gamma(u)]\\ &= -\mathrm{i}\lambda + Z_\phi^2[\tilde\Gamma(s)+\tilde\Gamma(t)+\tilde\Gamma(u)]\end{aligned} \tag{7-36}$$

由于 $Z_\phi = 1+O(\lambda_0)$, $\tilde\Gamma = O(\lambda_0^2)$, $\lambda=\lambda_0+O(\lambda_0^2)$, 近似到 λ^2 阶则有

$$\Gamma_R^{(4)}(p_1,\cdots,p_4) = -\mathrm{i}\lambda + \tilde\Gamma(s)+\tilde\Gamma(t)+\tilde\Gamma(u)+O(\lambda^3) \tag{7-37}$$

这些都是有限的.

由式 (7-35) 可知, 未重整化的耦合常数 λ_0 必须要以某种形式发散, 使得重整化的耦合常数 λ 是收敛的. 注意, λ 是在涉及 $\Gamma_R^{(4)}$ 的物理反应中测量的, 即

$$\Gamma_R^{(4)}(p_1,\cdots,p_4) = -\mathrm{i}\lambda, \quad 在对称点\ s_0=t_0=u_0=\frac{4\mu^2}{3}\ 处 \tag{7-38}$$

现在我们要以此为例来说明不同的重整化方案会给出相同的物理结果. 假设在另外一个点 $s=s_1, t=t_1, u=u_1$ 处作 Taylor 展开, 有 $s_1+t_1+u_1=4\mu^2$. 不难得到, 重整化的四点函数是

$$\Gamma_R'^{(4)}(p_1,\cdots,p_4) = -\mathrm{i}\lambda' + \tilde\Gamma'(s)+\tilde\Gamma'(t)+\tilde\Gamma'(u)+O(\lambda'^3) \tag{7-39}$$

其中

$$\tilde\Gamma'(s) = \Gamma(s)-\Gamma(s_1),\quad \tilde\Gamma'(t)=\Gamma(t)-\Gamma(t_1),\quad \tilde\Gamma'(u)=\Gamma(u)-\Gamma(u_1) \tag{7-40}$$

以及

$$-\mathrm{i}\lambda_0 + \Gamma(s_1)+\Gamma(t_1)+\Gamma(u_1) = -\mathrm{i}Z_\lambda'^{-1}\lambda_0,\quad \lambda_0 = Z_\phi^2 Z_\lambda'^{-1}\lambda_0 \tag{7-41}$$

注意, $\Gamma_R^{(4)}$ 和 $\Gamma_R'^{(4)}$ 是从 $\Gamma_0^{(4)}$ 中减去某些常数得到的. 因此, 如果考虑散射过程的角分布, 这两个函数 $\Gamma_R^{(4)}$ 和 $\Gamma_R'^{(4)}$ 应该有相同的形状, 只有可能相差一个常数. 假设把角分布写成

$$\Gamma_R^{(4)}(p_1,\cdots,p_4) = -\mathrm{i}\lambda + f_1(\theta),\quad \Gamma_R'^{(4)}(p_1,\cdots,p_4) = -\mathrm{i}\lambda' + f_1(\theta) + b \tag{7-42}$$

其中, b 是某个常数. 为了确定耦合常数 λ 和 λ', 要比较计算出来的振幅 $\Gamma_R^{(4)}, \Gamma_R'^{(4)}$ 和实验测量的结果. 例如, 在 $\theta=\theta_0$ 处, 有

$$-\mathrm{i}\lambda + f_1(\theta_0) = -\mathrm{i}\lambda' + f_1(\theta_0) + b\ 或\ -\mathrm{i}\lambda = -\mathrm{i}\lambda' + b \tag{7-43}$$

这说明由两个不同的重整化方案得到的这两个振幅 $\Gamma_R^{(4)}$ 和 $\Gamma_R'^{(4)}$ 是一样的.

在完成了质量、波函数和耦合常数重整化之后, 可以把初始的 (未重整化的) 拉氏量

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}[(\partial_\mu\phi_0)^2 - \mu_0^2\phi_0^2] - \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4 \tag{7-44}$$

用重整化的量重新写成

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L} \tag{7-45}$$

其中

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu\phi)^2 - \mu^2\phi^2] - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{7-46}$$

称为重整化的拉氏量 (renormalized Lagrangian),

$$\Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(Z_\phi - 1)[(\partial_\mu\phi)^2 - \mu^2\phi^2] + \frac{\delta\mu^2}{2}Z_\phi\phi^2 - \frac{\lambda(Z_\lambda - 1)}{4!}\phi^4 \tag{7-47}$$

称为抵消项 (counterterms). 这里使用了下列关系式

$$\mu^2 = \delta\mu^2 + \mu_0^2\ , \quad \phi = Z_\phi^{-1/2}\phi_0\ , \quad \lambda = Z_\lambda^{-1}Z_\phi^2\lambda_0 \tag{7-48}$$

7.1.2　BPH 重整化

一个等效的, 也许还更有条理的重整化方法是 BPH 重整化方案[7]. 核心的思想是利用抵消项 $\Delta\mathcal{L}$ 作为抵消发散的工具. 在这个方案中, 低阶发散和高阶发散的关系更加清晰. 另外, 它还提供了一个简单的标准来判定一个理论是否是可重整化的. 下面以 $\lambda\phi^4$ 理论为例简述它的步骤, 并讨论一些要点.

(a) 由重整化的拉氏量出发

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{7-49}$$

得到相应的自由传播子和顶点.

(b) 单圈 1PI 图中的发散部分由 Taylor 展开分离出来. 构造抵消项 $\Delta\mathcal{L}^{(1)}$ 来抵消这些发散的量.

(c) 得到的新的拉氏量 $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}^{(1)}$ 用来生成两圈图及相应的抵消项 $\Delta\mathcal{L}^{(2)}$, 来消除两圈的发散. 将这些步骤迭代地进行.

为了说明 BPH 方法的实用性, 先要介绍幂次计数 (power counting) 的方法.

1. 幂次计数

将一个 Feynman 图的表观发散度 (superficial degree of divergence) D 定义为

$$D = \text{分子中的动量数 (来自圈积分)} - \text{分母中的动量数 (来自传播子)} \tag{7-50}$$

为了计算 $\lambda\phi^4$ 理论中 Feynman 图的 D 值, 定义下面这些量:

(1) $B =$ 外线数;

(2) $IB =$ 内线数;

(3) $n =$ 顶点数.

计算图中所有线的数目, 得到

$$4n = 2(IB) + B \tag{7-51}$$

在计算 Feynman 图时, 需要对没有被动量守恒确定下来的内动量积分. 由于各个顶点处有四动量守恒, 但其中有一个总体的四动量守恒与内部动量无关, 所以圈数或不定的内动量数 L 满足

$$L = IB - n + 1 \tag{7-52}$$

表观发散度是

$$D = 4L - 2(IB) \tag{7-53}$$

消掉 n, L 和 IB, 得到

$$D = 4 - B \tag{7-54}$$

因此在 $B > 4$ 时有 $D < 0$. 注意在这种情形下, D 与微扰的阶数 n 无关, 而只与外线数 B 有关. 这意味着, 表观发散只存在于少数的 Green 函数中. $\lambda\phi^4$ 理论有 $\phi \longrightarrow -\phi$ 变换的分立对称性, 因此 B 为偶数, 只有 $B = 2, 4$ 的图是表观发散的.

分情况讨论如下:

(1) $B = 2 \Longrightarrow D = 2$, 两点函数 —— 自能图.

这是二次发散, 因而两函数需要的 Taylor 展开为

$$\Sigma\left(p^2\right) = \Sigma(0) + p^2\Sigma'(0) + \widetilde{\Sigma}\left(p^2\right) \tag{7-55}$$

其中, $\Sigma(0)$ 和 $\Sigma'(0)$ 发散, $\widetilde{\Sigma}\left(p^2\right)$ 没有发散. 这里为了方便, 是在 $p^2 = 0$ 处作 Taylor 展开. 为了抵消前两个发散项, 需要两个抵消项

$$\frac{1}{2}\Sigma(0)\,\phi^2 + \frac{1}{2}\Sigma'(0)\left(\partial_\mu\phi\right)^2 \tag{7-56}$$

它们对自能图的贡献是图 7-7(a) 和 (b).

(2) $B=4 \Longrightarrow D=0$, 四点函数 —— 顶点图.

它的 Taylor 展开为

$$\Gamma^{(4)}\left(p_i\right)=\Gamma^{(4)}(0)+\widetilde{\Gamma}^{(4)}\left(p_i\right) \tag{7-57}$$

其中, $\Gamma^{(4)}(0)$ 是对数发散, 抵消项为

$$\frac{\mathrm{i}}{4!}\Gamma^{(4)}(0)\,\phi^4 \tag{7-58}$$

它对应的 Feynman 规则是图 7-7(c).

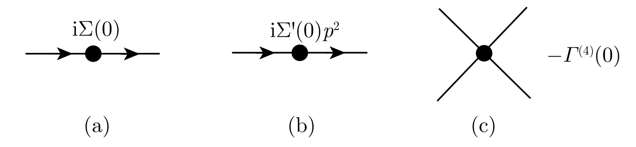


图 7-7 抵消项的 Feynman 规则

到这一阶, 这些抵消项加起来是

$$\Delta\mathcal{L}=\frac{1}{2}\Sigma(0)\,\phi^2+\frac{1}{2}\Sigma'(0)\left(\partial_\mu\phi\right)^2+\frac{\mathrm{i}}{4!}\Gamma^{(4)}(0)\,\phi^4 \tag{7-59}$$

注意, 加上这些抵消项之后拉氏量的形式是

$$\begin{aligned}\mathcal{L}+\Delta\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{\mu^2}{2}\phi^2-\frac{\lambda}{4!}\phi^4+\frac{1}{2}\Sigma(0)\,\phi^2+\frac{1}{2}\Sigma'(0)\left(\partial_\mu\phi\right)^2+\frac{\mathrm{i}}{4!}\Gamma^{(4)}(0)\,\phi^4\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\Sigma'(0)\right)(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}\left(\mu^2-\Sigma(0)\right)\phi^2-\frac{\lambda}{4!}\left(1-\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Gamma^{(4)}(0)\right)\phi^4\end{aligned}$$

这显然和未重整化的拉氏量有相同的结构. 更具体地说, 如果令

$$\begin{aligned}\phi_0 &= Z_\phi^{1/2}\phi\\ Z_\phi &= 1+\Sigma'(0)\\ \mu_0^2 &= \left(\mu^2-\Sigma(0)\right)Z_\phi^{-1}\\ \lambda_0 &= \lambda\left(1-\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Gamma^{(4)}(0)\right)Z_\phi^{-2}=Z_\lambda Z_\phi^{-2}\lambda\end{aligned} \tag{7-60}$$

就可以得到

$$\mathcal{L}+\Delta\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_0)^2-\frac{\mu_0^2}{2}\phi_0^2-\frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4 \tag{7-61}$$

正是未重整化的拉氏量. 因此 BPH 方案与传统的减除方案等价, 只是操作方式不相同.

2. 发散性分析

BPH 重整化方法看起来比较简单, 可以以它为基础来说明场论的一些特点. BPH 中有许多初看并不太明显的性质, 但它们可能对理解重整化程序很有用. 我们现在来讨论其中一些性质.

1) Feynman 图的收敛性

在之前的分析中, 我们关注的都是表观发散度 D. 对单圈图而言, 表观发散度就是真实的发散度. 但是在单圈以上时, 有总体的 $D<0$ 但子图发散的情形. 一个 Feynman 图实际的收敛性由 Weinberg 定理 [8] 来判断: 如果某个 Feynman 图以及它的每个子图的表观发散度都为负, 则它的 Feynman 积分收敛. 我们来考虑一个有 n 条外线和 l 圈的 Feynman 图. 在动量积分中引入截断 Λ 来估计发散度

$$\Gamma^{(n)}\left(p_1,\cdots,p_{n-1}\right)=\int_0^{\Lambda}\mathrm{d}^4q_1\cdots\mathrm{d}^4q_lI\left(p_1,\cdots,p_{n-1};q_1,\cdots,q_l\right) \tag{7-62}$$

取圈动量 $\{q_1,\cdots,q_l\}$ 中的一个子集 $S=\{q_1',q_2',\cdots,q_m'\}$, 让它们趋于无穷并保持其他动量不变. 设 $D(S)$ 为对该子集积分的表观发散度, 则有

$$\left|\int_0^{\Lambda}\mathrm{d}^4q_1'\cdots\mathrm{d}^4q_m'I\right|\leqslant\Lambda^{D(S)}\left\{\ln\Lambda\right\} \tag{7-63}$$

其中, $\{\ln\Lambda\}$ 为 $\ln\Lambda$ 的函数. 那么收敛性定理告诉我们, 如果任意集合 S 的 $D(S)s$ 为负, 则对 $\{q_1,\cdots,q_l\}$ 的积分收敛. 如图 7-8 所示为 $D=-2$ 的六点函数, 但方框内的积分 $D=0$, 因此为对数发散. 在 BPH 重整化中, 这个子发散实际上被图 7-9 中的低阶项抵消了.

这个例子说明一个 $D<0$ 的图可能包含发散的子图. 但是在 BPH 方案中, 这些发散会被低阶抵消项的贡献消除. 这就是为什么我们可以把注意力集中在这些 $D\geqslant0$ 的图上, 不需要担心来自子图的发散.

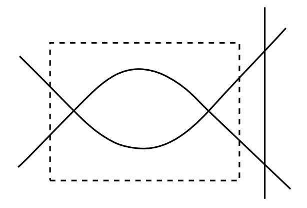


图 7-8 发散的六点函数

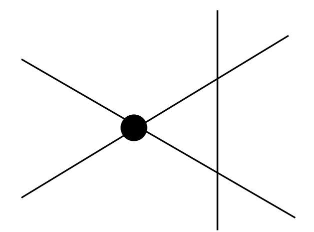


图 7-9　六点函数的抵消项

2) 原始发散图

原始发散图 (primitively divergent graph) 总的表观发散度非负, 但所有子图都收敛. 因此在这种图中唯一的发散来自于所有的动量同时增大. 也就是说, 当关于外线动量求导时, 至少有一个分母的幂次会增加, 因此图也更加收敛. 显然所有的发散都可以用 Taylor 展开分离出来. 换句话说, 如果一个图不是原始发散图, 那么在 Taylor 展开中, 对外动量的微分就不确定是否可以提高它的收敛性.

3) 分离的发散图

顾名思义, 分离的发散图 (disjointed divergent graphs) 包含一些分离的发散子图. 比如, 考虑一个如图 7-10 所示的双圈图. 它是两个发散积分的乘积, 显然对某个外线动量求导只能使其中一个积分更加收敛. 因此并非所有的发散都可以通过分离出 Taylor 展开的前几项来消除. 然而, BPH 方法中的低阶项会在此时发挥作用. 比如, 此例中的 Feynman 积分为

$$\Gamma_a^{(4)}(p) \propto \lambda^3 \left[\Gamma(p)\right]^2 \tag{7-64}$$

其中

$$\Gamma(p) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4 l \frac{1}{l^2-\mu^2+\mathrm{i}\varepsilon}\frac{1}{\left[(l-p)^2-\mu^2+\mathrm{i}\varepsilon\right]}\ , \quad p = p_1 + p_2 \tag{7-65}$$

由于 $\Gamma(p)$ 对数发散, 所以不管作多少次求导, $\Gamma_a^{(4)}(p)$ 都不可能收敛, 尽管总的表观发散度为 0. 但我们有更低阶的单圈图的抵消项 $-\lambda^2\Gamma(0)$, 它有如图 7-11 所示的额外的贡献, 这个贡献正比于 $-\lambda^3\Gamma(0)\Gamma(p)$. 加上这 3 项, 有

$$\lambda^3\left[\Gamma(p)\right]^2 - 2\lambda^3\Gamma(0)\,\Gamma(p) = \lambda^3\left[\Gamma(p)-\Gamma(0)\right]^2 - \lambda^3\left[\Gamma(0)\right]^2$$

由于第一个中括号中的项有限, 最后一项的发散可以由一次求导消除. 我们看到, 由于低阶抵消项的作用, 发散为外线动量的多项式. 因此, 对于分离的发散图, 需要低阶的抵消项来消除发散.

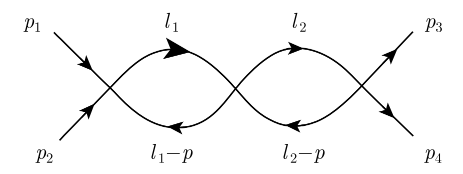


图 7-10 两圈的分离发散图

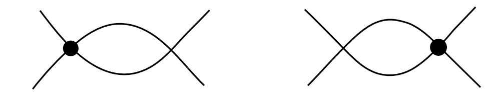


图 7-11 两圈图的抵消项

4) 嵌套的 (nested) 发散图

还有一种情况如图 7-12 所示, 一对发散的 1PI 图交织在一起, 其中一个被完全包含在另一个里面. 在子图的发散被低阶抵消项 (图 7-13) 消除之后, 总的发散被一个 λ^3 的抵消项重整化. 与前面的情况 (分离的发散) 一样, 需要计入低阶抵消项将发散聚集成外线动量的多项式的形式.

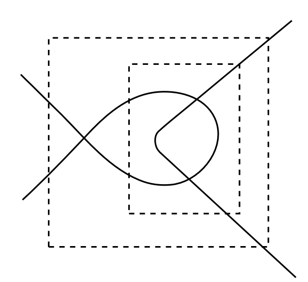


图 7-12 嵌套的发散图

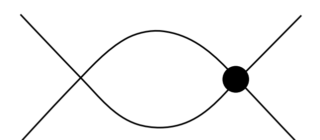


图 7-13 嵌套发散的抵消项

5) 重叠 (overlapping) 的发散图

这些图既非分离的也非嵌套的, 也是最困难的一类, 图 7-14 就是一个例子.

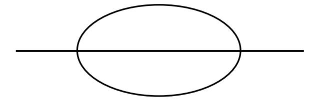


图 7-14 重叠的发散图

对这种纠缠的重叠发散图的讨论超出了本书的范围, 感兴趣的读者可以参阅文献 [9].

从这些讨论中可以看出, BPH 的重整化方法可以系统地通过抵消项来消除发散. 一个对重整化程序的一般性的分析由 Bogoliubov 等 [7] 给出, 结果被称为 BPH 定理, 它是说对一个可重整化的场论, 任意阶的发散都可以由相应的抵消项消除.

7.1.3　正规化

在进行重整化时, 首先需要设法将发散的积分变得收敛, 这样才能做一些数学上有意义的运算. 这个步骤称为正规化 (regularization). 有两种常用的方法, Pauli-Villars 正规化和维数正规化. 后一种常用于处理与对称性相关的理论, 因此广泛地用于规范场的计算中.

1. Pauli-Villars 正规化

在这种方法中, 从传播子中减去一个有着巨大质量的传播子

$$\frac{1}{k^2-\mu_0^2}\rightarrow\left(\frac{1}{k^2-\mu_0^2}-\frac{1}{k^2-\varLambda^2}\right)=\frac{\mu_0^2-\varLambda^2}{(k^2-\mu_0^2)(k^2-\varLambda^2)}\rightarrow\frac{1}{k^4}\ ,\quad \text{在 } k \text{ 很大时} \tag{7-66}$$

这就使得积分更加收敛. 相对于用某个大动量截断, 它的优点在于保持了协变性. 我们用图 7-5 中的四点函数 (a) 作为例子, 它等于

$$\varGamma\left(p^2\right)=\varGamma\left(s\right)=\frac{(-\mathrm{i}\lambda)^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{(l-p)^2-\mu^2}\frac{\mathrm{i}}{l^2-\mu^2}\ ,\quad s=p^2=(p_1+p_2)^2 \tag{7-67}$$

用 Pauli-Villars 方法可以得到

$$\varGamma\left(p^2\right)=\frac{-\lambda^2\varLambda^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{\left[(l-p)^2-\mu^2\right](l^2-\mu^2)(l^2-\varLambda^2)} \tag{7-68}$$

在 $p^2=0$ 处作 Taylor 展开

$$\varGamma\left(p^2\right)=\varGamma\left(0\right)+\widetilde{\varGamma}\left(p^2\right) \tag{7-69}$$

其中

$$\varGamma\left(0\right)=\frac{-\lambda^2\varLambda^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-\mu^2)^2(l^2-\varLambda^2)} \tag{7-70}$$

$$\widetilde{\varGamma}\left(p^2\right)=\frac{-\lambda^2\varLambda^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{2l\cdot p-p^2}{\left[(l-p)^2-\mu^2\right](l^2-\mu^2)^2(l^2-\varLambda^2)} \tag{7-71}$$

由于 $\widetilde{\Gamma}\left(p^2\right)$ 已经收敛, 可以在积分内取极限 $\Lambda^2\to\infty$ 得到

$$\widetilde{\Gamma}\left(p^2\right)=\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{2l\cdot p-p^2}{\left[(l-p)^2-\mu^2\right]\left(l^2-\mu^2\right)^2} \tag{7-72}$$

请注意, 之所以能在积分中取极限 $\Lambda^2\to\infty$, 是因为它是足够收敛的积分. 之后的标准步骤是利用下列恒等式将分母结合成一个

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=(n-1)!\int_0^1\frac{\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\cdots\mathrm{d}z_n}{\left(a_1z_1+\cdots+a_nz_n\right)^n}\delta\left(1-\sum_{i=1}^n z_i\right) \tag{7-73}$$

$$\frac{1}{a_1^2a_2\cdots a_n}=n!\int_0^1\frac{z_1\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\cdots\mathrm{d}z_n}{\left(a_1z_1+\cdots+a_nz_n\right)^{n+1}}\delta\left(1-\sum_{i=1}^n z_i\right) \tag{7-74}$$

其中, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 通常称为 Feynman 参数. 我们将推导过程说明如下. 首先验证 $n=2$ 的简单情况

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\delta(1-z_1-z_2)}{\left(a_1z_1+a_2z_2\right)^2}&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}z_1}{\left[a_1z_1+a_2\left(1-z_1\right)\right]^2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}z_1}{\left[(a_1-a_2)z_1+a_2\right]^2}\\&=\frac{1}{a_1-a_2}\left.\frac{-1}{(a_1-a_2)z_1+a_2}\right|_0^1=\frac{1}{a_1a_2}\end{aligned}$$

将上式对 a_1 求微分, 得到

$$\frac{1}{a_1^2a_2}=2\int_0^1\frac{z_1\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\delta(1-z_1-z_2)}{\left(a_1z_1+a_2z_2\right)^3} \tag{7-75}$$

此外还有

$$\frac{1}{a_1a_2a_3}=\frac{1}{a_3}\int_0^1\frac{\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\delta(1-z_1-z_2)}{\left(a_1z_1+a_2z_2\right)^2} \tag{7-76}$$

对上式中的 $\dfrac{1}{(a_1z_1+a_2z_2)^2}$ 和 $\dfrac{1}{a_3}$ 运用这个关系式写成一个分母, 得到

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\delta(1-z_1-z_2)}{\left(a_1z_1+a_2z_2\right)^2}\frac{1}{a_3}=2\int\frac{y_2\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\delta\left(1-y_1-y_2\right)}{\left[y_1a_3+y_2\left(a_1z_1+a_2z_2\right)\right]^3}\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\delta(1-z_1-z_2)\\&=2\int\frac{\left(1-y_1\right)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\delta(1-z_1-z_2)}{\left[y_1a_3+\left(1-y_1\right)\left(a_1z_1+a_2z_2\right)\right]^3}\end{aligned}$$

定义

$$\left(1-y_1\right)z_1=x_1,\quad\left(1-y_1\right)z_2=x_2 \tag{7-77}$$

得到

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int \frac{(1-y_1)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\delta\left(\dfrac{1-y_1-x_1-x_2}{1-y_1}\right)}{[y_1a_3+(a_1x_1+a_2x_2)]^3}\left(\frac{1}{1-y_1}\right)^2 \\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\delta\,(1-y_1-x_1-x_2)}{[y_1a_3+(a_1x_1+a_2x_2)]^3}
\end{aligned}
$$

即

$$
\frac{1}{a_1a_2a_3} = 2\int \frac{\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\delta\,(1-x_3-x_1-x_2)}{[x_3a_3+(a_1x_1+a_2x_2)]^3} \tag{7-78}
$$

其中, 已经将 y_1 改成了 x_3. 这样就验证了分母中有 3 个因子 $a_1a_2a_3$ 的情形. 由此, 我们可以看到怎样验证最一般的情况.

运用这些关系式可以得到

$$
\frac{1}{\left[(l-p)^2-\mu^2\right]\left(l^2-\mu^2\right)^2} = 2\int \frac{(1-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha}{A^3} \tag{7-79}
$$

其中

$$
A = (1-\alpha)\left(l^2-\mu^2\right)+\alpha\left[(l-p)^2-\mu^2\right] = (1-\alpha p)^2-a^2 \tag{7-80}
$$

以及

$$
a^2 = \mu^2-\alpha\,(1-\alpha)\,p^2 \tag{7-81}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}\left(p^2\right) &= \lambda^2\int_0^1 (1-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{2l\cdot p-p^2}{\left[(l-\alpha p)^2-a^2\right]^3} \\
&= \lambda^2\int_0^1 (1-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{(2\alpha-1)\,p^2}{\left(l^2-a^2+\mathrm{i}\varepsilon\right)^3}
\end{aligned}
$$

其中, 作了变量替换 $l\to l+\alpha p$ 并且丢掉了分子中 l 的线性项, 因为它关于原点对称, 积分是 0. 这个积分现在只依赖于 l^2 而与角度无关. 将这个积分从闵氏空间转换到欧氏空间中会更方便. 我们注意到被积函数在 l_0 的复平面上有极点

$$
l_0 = \pm\left[\sqrt{l^2+a^2}-\mathrm{i}\varepsilon\right] \tag{7-82}
$$

可以将积分轨道旋转 $90°$, 如图 7-15 所示.

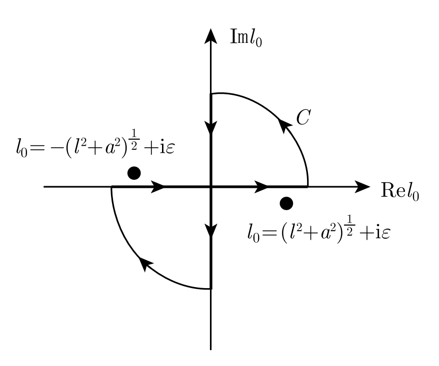


图 7-15 旋转 90° 的轨道积分

由 Cauchy 定理可知

$$\oint_C \mathrm{d}l_0 f(l_0) = 0 \tag{7-83}$$

其中

$$f(l_0) = \frac{1}{\left[l_0^2 - (\sqrt{\boldsymbol{l}^2 + a^2} - \mathrm{i}\varepsilon)^2\right]^3} \tag{7-84}$$

由于当 $l_0 \to \infty$ 时 $f(l_0) \to l_0^{-6}$, 大半径环形围道 C 的积分为 0, 因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}l_0 f(l_0) = \int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}l_0 f(l_0) \tag{7-85}$$

所以积分路径从实轴转到了虚轴, 这称为 Wick 转动 (Wick rotation). 作变量替换 $l_0 = \mathrm{i}l_4$, l_4 为实数, 有

$$\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}l_0 f(l_0) = \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}l_4 f(l_4) = -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}l_4}{(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + a^2 - \mathrm{i}\varepsilon)^3} \tag{7-86}$$

定义欧氏空间的动量为 $k_i = (l_1, l_2, l_3, l_4)$, 满足 $k^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2$. 积分可以写成

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - a^2 + \mathrm{i}\varepsilon)^3} = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + a^2 - \mathrm{i}\varepsilon)^3} \tag{7-87}$$

利用 4 维欧氏空间的球坐标得到

$$\int \mathrm{d}^4 k = \int_0^{\infty} k^3 \mathrm{d}k \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin^2\chi \mathrm{d}\chi \tag{7-88}$$

对角度积分有

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + a^2 - \mathrm{i}\varepsilon)^3} &= 2\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{k^3 \mathrm{d}k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + a^2 - \mathrm{i}\varepsilon)^3} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{k^2 \mathrm{d}k^2}{(k^2 + a^2 - \mathrm{i}\varepsilon)^3}\end{aligned}$$

圈积分中的许多积分可以由 Gamma 和 Beta 函数得到. Gamma 函数的标准定义是

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty u^{n-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \tag{7-89}$$

因此

$$\Gamma(m)\,\Gamma(n)=\int_0^\infty u^{n-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\int_0^\infty v^{m-1}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v \tag{7-90}$$

作变量替换, 令 $u=x^2, v=y^2$,

$$\Gamma(m)\,\Gamma(n)=4\int_0^\infty \mathrm{d}x\mathrm{d}y\;\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}x^{2n-1}y^{2m-1} \tag{7-91}$$

采用极坐标: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 得到

$$\begin{aligned}\Gamma(m)\,\Gamma(n)&=4\int_0^\infty \mathrm{d}r\;\mathrm{e}^{-r^2}r^{2(n+m)-1}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\,(\cos\theta)^{2n-1}(\sin\theta)^{2m-1}\\&=2\Gamma(m+n)\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\,(\cos\theta)^{2n-1}(\sin\theta)^{2m-1}\end{aligned}$$

因此得到了对如下三角函数的积分

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\,(\cos\theta)^{2n-1}(\sin\theta)^{2m-1}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}=\frac{1}{2}B(n,m) \tag{7-92}$$

或

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\,(\cos\theta)^{n}(\sin\theta)^{m}=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}\right) \tag{7-93}$$

其中, $B(n,m)$ 是通常的 Beta 函数. 设 $u=\cos^2\theta$, 得到

$$B(n,m)=\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u \tag{7-94}$$

再令 $u=x^2$,

$$B(n,m)=2\int_0^1 x^{2m-1}\left(1-x^2\right)^{n-1}\mathrm{d}x \tag{7-95}$$

设 $t=\dfrac{x^2}{1-x^2}$, 则

$$B(n,m)=\int_0^\infty \frac{t^{m-1}\mathrm{d}t}{(1+t)^{m+n}}=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{7-96}$$

这个公式可以用于计算 Feynman 积分.

利用式 (7-96) 可得

$$\int\frac{t^{m-1}\mathrm{d}t}{(t+a^2)^n}=\frac{1}{(a^2)^{n-m}}\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)} \tag{7-97}$$

运用到积分中结果是

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left(k^2+a^2-\mathrm{i}\varepsilon\right)^3} = \frac{1}{32\pi^2\left(a^2-\mathrm{i}\varepsilon\right)} \tag{7-98}$$

以及

$$\widetilde{\Gamma}\left(p^2\right) = \frac{-\mathrm{i}\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\alpha\,(1-\alpha)\,(2\alpha-1)\,p^2}{\mu^2-\alpha\,(1-\alpha)\,p^2-\mathrm{i}\varepsilon} \tag{7-99}$$

直接计算对 Feynman 参数 α 的积分得到

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}(p^2) = \tilde{\Gamma}(s) &= \frac{\mathrm{i}\lambda^2}{32\pi^2}\left\{2+\left(\frac{4\mu^2-s}{|s|}\right)^{\frac{1}{2}}\ln\left[\frac{(4\mu^2-s)^{\frac{1}{2}}-(|s|)^{\frac{1}{2}}}{(4\mu^2-s)^{\frac{1}{2}}+(|s|)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}, \quad s<0 \\
&= \frac{\mathrm{i}\lambda^2}{32\pi^2}\left\{2-2\left(\frac{4\mu^2-s}{s}\right)^{\frac{1}{2}}\arctan\left(\frac{s}{4\mu^2-s}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}, \qquad 0<s<4\mu^2 \\
&= \frac{\mathrm{i}\lambda^2}{32\pi^2}\left\{2+\left(\frac{s-4\mu^2}{s}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\ln\left[\frac{s^{\frac{1}{2}}-(s-4\mu^2)^{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}+(s-4\mu^2)^{\frac{1}{2}}}\right]+\mathrm{i}\pi\right)\right\}, s>4\mu^2
\end{aligned}$$

利用同样的方法可以求出发散项是

$$\Gamma\left(0\right) = \frac{\mathrm{i}\lambda^2\Lambda^2}{32\pi^2}\int \mathrm{d}\alpha \frac{\alpha}{\alpha(\mu^2-\Lambda^2)+\Lambda^2} \simeq \frac{\mathrm{i}\lambda^2}{32\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}, \quad \text{在 } \Lambda \text{ 很大时} \tag{7-100}$$

2. 维数正规化

维数正规化的基本构想是, 既然发散来自内部动量在四维空间的积分, 那么在低维空间中可以让积分变得收敛. 因此我们可以想办法将 Feynman 积分变成时空维数 n 的函数, 然后先在 n 值较小时进行重整化, 再进行解析延拓 (analytic continuation), 取极限让 $n \to 4$. 下面我们通过一个例子对其进行来具体说明.

考虑下列积分

$$I = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-\mu^2}\frac{1}{(k-p)^2-\mu^2} \tag{7-101}$$

它在 4 维空间中是发散的. 如果将它定义为 n 维空间上的积分

$$I\left(n\right) = \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-\mu^2}\frac{1}{(k-p)^2-\mu^2} \tag{7-102}$$

则它在 $n<4$ 时收敛. 为了对非整数的 n 值定义这个积分, 先用 Feynman 参数将分母结合成一个, 并对积分做 Wick 转动, 则有

$$\begin{aligned}
I\left(n\right) &= \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int \frac{\mathrm{d}^n k}{\left[\left(k-\alpha p\right)^2-a^2+\mathrm{i}\varepsilon\right]^2} \\
&= \mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \int \frac{\mathrm{d}^n k}{\left[k^2+a^2-\mathrm{i}\varepsilon\right]^2}
\end{aligned}$$

其中, $a^2=\mu^2-\alpha(1-\alpha)p^2$. 现在引入 n 维球坐标系, 并对角度分量做积分, 则有

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^n k &= \int_0^\infty k^{n-1}\mathrm{d}k \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1 \int_0^\pi \sin\theta_2 \mathrm{d}\theta_2 \int\cdots\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta_{n-1}\mathrm{d}\theta_{n-1} \\ &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty k^{n-1}\mathrm{d}k\end{aligned}$$

其中使用了公式

$$\int_0^\pi \sin^m\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \tag{7-103}$$

证明如下. Beta 函数的形式为

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{7-104}$$

作变量代换 $t=\sin^2\theta$, 可得

$$B(x,y)=2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\,\mathrm{d}\theta \tag{7-105}$$

取 $y=\dfrac{1}{2}, x=\dfrac{m+1}{2}$, 则

$$2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^m\,\mathrm{d}\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \tag{7-106}$$

进一步得到

$$\int_0^\pi \sin^m\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \tag{7-107}$$

这里使用了

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{7-108}$$

在球坐标中, 上述 n 维积分写成

$$I(n)=\frac{2\mathrm{i}\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1\mathrm{d}\alpha\int_0^\infty\frac{k^{n-1}\mathrm{d}k}{\left(k^2+a^2-\mathrm{i}\varepsilon\right)^2} \tag{7-109}$$

上式和 n 的关系很明确, 并且在 $0 < \mathrm{Re}\, n < 4$ 时积分是收敛的. 还可以通过分部积分扩展这个解析域

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty \frac{k^{n-1}\mathrm{d}k}{(k^2+a^2-\mathrm{i}\varepsilon)^2} = \frac{-2}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\int_0^\infty k^n \mathrm{d}k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{1}{(k^2+a^2-\mathrm{i}\varepsilon)^2}\right) \tag{7-110}$$

这里使用了等式

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1) \tag{7-111}$$

现在积分在 $-2 < \mathrm{Re}\, n < 4$ 的范围里有意义. 重复这个操作 m 次, 可以把解析域扩展成 $-2m < \mathrm{Re}\, n < 4$, 甚至最后可以扩展到 $\mathrm{Re}\, n \to -\infty$. 为了看清当 $n \to 4$ 的情形, 对 k 积分, 得到

$$I(n) = \mathrm{i}\pi^{n/2}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\alpha}{(a^2-\mathrm{i}\varepsilon)^{2-n/2}} \tag{7-112}$$

由公式

$$\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)}{2-\frac{n}{2}} \to \frac{2}{4-n}, \quad n \to 4 \tag{7-113}$$

可知, $n = 4$ 处是一阶极点 (simple pole). 将积分中有关项在 $n = 4$ 处展开, 得到

$$\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right) = \frac{2}{4-n} + \gamma_E + (n-4)B + \cdots \tag{7-114}$$

$$a^{n-4} = 1 + (n-4)\ln a + \cdots \tag{7-115}$$

其中, γ_E 是指 Euler 常数, B 也是某个常数. 令 $n \to 4$, 得到

$$I(n) \longrightarrow \frac{2\mathrm{i}\pi^2}{4-n} - \mathrm{i}\pi^2\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \ln[\mu^2 - \alpha(1-\alpha)p^2] + \mathrm{i}\pi^2 A \tag{7-116}$$

那么对四点函数的一圈贡献成为

$$\Gamma(p^2) = \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\left\{\frac{2\mathrm{i}}{4-n} - \mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \ln[\mu^2 - \alpha(1-\alpha)p^2] + \mathrm{i}A\right\} \tag{7-117}$$

将上式在 $p^2 = 0$ 处作 Taylor 展开可得

$$\Gamma(p^2) = \Gamma(0) - \tilde{\Gamma}(p^2) \tag{7-118}$$

其中

$$\Gamma(0) = \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\left(\frac{2\mathrm{i}}{4-\pi} - \mathrm{i}\ln\mu^2 + \mathrm{i}A\right) \simeq \frac{\mathrm{i}\lambda^2}{16\pi^2(4-n)} \tag{7-119}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(p^2) &= \frac{-\mathrm{i}\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}\alpha \ln\left[\frac{\mu^2-\alpha(1-\alpha)p^2}{\mu^2}\right] \\ &= \frac{-\mathrm{i}\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\alpha(1-\alpha)(2\alpha-1)p^2}{\mu^2-\alpha(1-\alpha)p^2}\end{aligned}$$

很明显这个有限值部分和协变正规化 (Pauli-Villars) 方法得到的结果完全相同.

前面我们说过, 减掉 Taylor 展开中前几项的方法通常被称为动量减除方案. 但是在维数正规化方案中, 所有的发散都出现在 $n=4$ 的极点处. 于是只需去掉 $n=4$ 处的极点, 就可以消除发散. 这通常被称为最小减除方案 (minimal subtraction, MS). 通常 $n=4$ 处这些极点都伴随着包含 Euler 常数和 $\log(4\pi)$ 的项, 也可以将这些项一起减去. 这就是修改的最小减除方案, 或简写为 $\overline{\mathrm{MS}}$.

二次发散的一圈自能在维数正规化方案中变成

$$-\mathrm{i}\Sigma(p^2) = \frac{\lambda}{2}\int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-\mu^2+\mathrm{i}\varepsilon} = \frac{-\mathrm{i}\lambda\pi^{n/2}\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)}{32\pi^4(\mu^2)^{1-n/2}} \tag{7-120}$$

由等式

$$\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)}{\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(2-\frac{n}{2}\right)} \tag{7-121}$$

可以看出二次发散的极点在 $n=4$ 和 $n=2$ 处. 对于 $n\to 4$ 有

$$-\mathrm{i}\Sigma(0) = \frac{\mathrm{i}\lambda\mu^2}{16\pi^2}\frac{1}{4-n} \tag{7-122}$$

7.2　幂次计算和可重整化性

我们现在开始讨论更一般的相互作用的重整化问题. 显然, 在这个讨论中, 使用 BPH 方案是比较方便的.

7.2.1　包含费米子和标量场的理论

先来讨论只包含费米场 ψ 和标量场 ϕ 的简单情形. 首先分析几个简单的例子.

(1) 四费米子相互作用. 相互作用拉氏量取为

$$\mathcal{L}_I = g\left(\bar{\psi}\psi\right)^2 \tag{7-123}$$

设

$$\begin{aligned} F &= \text{费米子外线的数目} \\ IF &= \text{费米子内线的数目}\end{aligned} \tag{7-124}$$

计算费米子线总数, 可得

$$F + 2\,(IF) = 4n \tag{7-125}$$

计算不受约束的动量数, 得到

$$L = (IF) - n + 1 \tag{7-126}$$

这里 n 为顶点个数. 表观发散度为

$$D = 4L - (IF) \tag{7-127}$$

将 L 和 IF 消去, 得到化简后的公式为

$$D = 4 - \frac{3}{2}F + 2n \tag{7-128}$$

这意味着, 当 n 足够大时, 对于任意 F 都有 $D > 0$, 因此需要无数种不同的抵消项. 这些抵消项如下:

$$F = 2 : \bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi, \quad \bar{\psi}\partial\!\!\!/\partial\!\!\!/\psi, \quad \bar{\psi}\partial\!\!\!/\partial\!\!\!/\partial\!\!\!/\psi, \ \cdots \tag{7-129}$$

$$F = 4 : \bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi\bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi, \quad \bar{\psi}\psi\bar{\psi}\partial\!\!\!/\partial\!\!\!/\psi, \ \bar{\psi}\partial\!\!\!/\partial\!\!\!/\partial\!\!\!/\psi\psi\psi, \cdots \tag{7-130}$$

$$\cdots\cdots \tag{7-131}$$

因此我们无法通过重新定义拉氏量中的参数来吸收这些无穷大.

(2) Yukawa 相互作用. 相互作用拉氏量取为

$$\mathcal{L}_I = f\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi \tag{7-132}$$

于是有

$$F + 2\,(IF) = 2n, \quad B + 2\,(IB) = n \tag{7-133}$$

以及

$$L = (IF) + (IB) - n + 1 \tag{7-134}$$

n 是顶点数. 表观发散度为

$$D = 4L - (IF) - 2(IB) \tag{7-135}$$

化简可得

$$D = 4 - B - \frac{3}{2}F \tag{7-136}$$

可以看到 D 和 n 无关. 因此只有在 B 和 F 较小时, 才可能有 $D \geqslant 0$. 所需要的抵消项是

$$B = 2, F = 0 : \phi^2, \quad (\partial_\mu\phi)^2\,; \quad B = 4, F = 0 : \phi^4 \tag{7-137}$$

$$F = 2, B = 0 : \bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi; \quad F = 2, B = 1 : \phi\bar{\psi}\psi \tag{7-138}$$

这些抵消项都可以通过重新定义拉氏量中的参数被吸收掉, 只要原先的拉氏量中有 ϕ^4 项.

现在可以开始研究最一般的情况. 将拉氏量密度写成如下的一般形式

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \sum_i \mathcal{L}_i \tag{7-139}$$

其中, $\mathcal{L}_0$ 是自由场拉氏量, 包含场的二次项. $\mathcal{L}_i$ 是相互作用项, 比如,

$$\mathcal{L}_i = g_1\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\phi, \quad g_2\left(\bar{\psi}\psi\right)^2, \quad g_3\left(\bar{\psi}\psi\right)\phi, \quad \cdots \tag{7-140}$$

其中, ψ 表示费米场, ϕ 表示标量场. 定义如下变量:

$n_i =$ 第 i 类顶点的个数;

$b_i =$ 与第 i 类顶点相连的标量场线的数目;

$f_i =$ 与第 i 类顶点相连的费米子线的数目;

$d_i =$ 第 i 类顶点中的微分次数;

$B =$ 标量场外线的数目;

$F =$ 费米场外线的数目;

$IB =$ 标量场内线的数目;

$IF =$ 费米场内线的数目.

计算总的标量线和费米子线数, 得到

$$B + 2\left(IB\right) = \sum_i n_i b_i \tag{7-141}$$

$$F + 2\left(IF\right) = \sum_i n_i f_i \tag{7-142}$$

根据各顶点处动量守恒, 可以计算圈积分 L 的数目, 得到

$$L = (IB) + (IF) - n + 1, \quad n = \sum_i n_i \tag{7-143}$$

上式右边的最后一项是因为圈积分不涉及整体的动量守恒. 表观发散度由下式给出

$$D = 4L - 2\left(IB\right) - \left(IF\right) + \sum_i n_i d_i \tag{7-144}$$

代入方程 (7-141) 和 (7-142) 可得

$$D = 4 - B - \frac{3}{2}F + \sum_i n_i \delta_i \tag{7-145}$$

其中

$$\delta_i = b_i + \frac{3}{2}f_i + d_i - 4 \tag{7-146}$$

称为相互作用的**发散指标**(index of divergence). 因为拉氏量密度 $\mathcal{L}$ 的量纲是 4, 标量场、费米场和导数算符的量纲分别是 1、$\frac{3}{2}$ 和 1, 所以可以计算出耦合常数 g_i 的量纲

$$\dim(g_i) = 4 - b_i - \frac{3}{2}f_i - d_i = -\delta_i \tag{7-147}$$

因此每个相互作用项的发散指标与各自耦合常数的量纲有关. 依据 δ_i 的大小, 分 3 种情况进行讨论.

(1) $\delta_i < 0$, 在这种情况下, D 随着第 i 类顶点数的增加而减小. 这种相互作用被称为**超可重整化**(super-renormalizable) 的相互作用, 发散只出现在低阶的图中. 只有一种理论符合这种情形, 即 ϕ^3 相互作用.

(2) $\delta_i = 0$, 在这种情况下, D 与第 i 类顶点的数目无关, 相互作用被称为**可重整化**的相互作用. 发散只出现在少数的一些 Green 函数中. 这种类型的相互作用是 $g\phi^4$, $f\bar{\psi}\psi\phi$.

(3) $\delta_i > 0$, 此时 D 随着第 i 类顶点数的增加而增大. 当 n_i 足够大时, 所有的 Green 函数都会发散. 这种理论称为**不可重整化**的相互作用. 这种情况有许多例子, 如 $g_1\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\phi$, $g_2\left(\bar{\psi}\psi\right)^2$, $g_3\phi^5, \cdots$.

发散指标 δ_i 也可以和算符的**正则量纲**(canonical dimension) 相联系. 正则量纲是基于自由场论中传播子的高能行为来定义的. 更具体地说, 对于任意算符 A, 两点函数写成

$$D_A\left(p^2\right) = \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \langle 0 \left| T\left(A(x)A(0)\right) \right| 0 \rangle \tag{7-148}$$

如果上式有如下渐近行为

$$D_A\left(p^2\right) \to \left(p^2\right)^{-\omega_A/2}, \quad \text{当} \quad p^2 \to \infty \text{时} \tag{7-149}$$

那么可将正则量纲定义为

$$d(A) = (4 - \omega_A)/2 \tag{7-150}$$

因此, 对于费米场和标量场有

$$d(\phi) = 1, \quad d(\partial^n \phi) = 1 + n \tag{7-151}$$

$$d\left(\psi\right)=\frac{3}{2},\quad d\left(\partial^{n}\psi\right)=\frac{3}{2}+n \tag{7-152}$$

注意, 这几个简单的例子里的正则量纲和用量纲分析得到的**简单量纲**(naive dimension) 相同. 而我们在后面矢量场的部分将会看到, 正则量纲未必等于简单量纲.

对于由标量场或费米场的多项式构成的复合算符, 很难得知它们的渐近行为. 因此, 将它们的正则量纲定义为它们的组分场的正则量纲的代数和. 例如,

$$d\left(\phi^{2}\right)=2,\quad d\left(\bar{\psi}\psi\right)=3 \tag{7-153}$$

对于之前遇到过的作用量中出现的一般的复合算符, 有

$$d\left(\mathcal{L}_{i}\right)=b_{i}+\frac{3}{2}f_{i}+d_{i} \tag{7-154}$$

代入等式 (7-146), 得到它与发散指标的关系为

$$\delta_{i}=d\left(\mathcal{L}_{i}\right)-4 \tag{7-155}$$

可以看到, 量纲是 4 的相互作用是可重整化的, 而量纲大于 4 的相互作用则不可重整化. 因此, 如果要求理论是可重整化的, 那么这对可能的相互作用是很大的限制. 基本上, 对于包含标量场和费米场的理论, 可能的相互作用就是 $\phi^{3},\phi^{4},\left(\bar{\psi}\psi\right)\phi$ 以及它们的包含内部对称性指标的推广形式.

抵消项

回顾之前通过加入抵消项来消除表观发散度 $D\geqslant 0$ 的 Green 函数中的所有发散. 为方便起见, 在外动量 $p_{i}=0$ 处进行 Taylor 展开. 很容易看出, 对于一个一般的给定了 F 和 B 的 $D\geqslant 0$ 的 Feynman 图, 抵消项的形式是

$$O_{\mathrm{ct}}=\left(\partial_{\mu}\right)^{\alpha}\left(\psi\right)^{F}\left(\phi\right)^{B},\quad \alpha=0,1,2,\cdots,D \tag{7-156}$$

例如, 在 Yukawa 理论中, $F=2$ 的图, 即有 2 条费米子线的图的表观发散度 $D=1$. 因此需要 $\alpha=0,1$ 的抵消项, 形式如下

$$\bar{\psi}\psi,\quad \bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi \tag{7-157}$$

方程 (7-156) 中给出的抵消项的正则量纲为

$$d_{\mathrm{ct}}=\frac{3}{2}F+B+\alpha \tag{7-158}$$

发散指标为

$$\delta_{\mathrm{ct}}=d_{\mathrm{ct}}-4 \tag{7-159}$$

代入方程 (7-145) 得

$$\delta_{\text{ct}} = (\alpha - D) + \sum_i n_i \delta_i \tag{7-160}$$

因为 $\alpha \leqslant D$, 所以有

$$\delta_{\text{ct}} \leqslant \sum_i n_i \delta_i \tag{7-161}$$

这意味着, 一个 Feynman 图的抵消项的发散指标小于等于图中出现的所有相互作用的发散指标 δ_i 的和.

于是可以得到一个非常有用的结果: $\delta_i = 0$ 的可重整化的相互作用会生成 $\delta_{\text{ct}} \leqslant 0$ 的抵消项. 因此, 如果所有 $\delta_i \leqslant 0$ 的项都包含在初始的拉氏量中, 那么抵消项将会与初始拉氏量中的相互作用有相同的结构, 这样它们就可以被看成用来重新定义理论中参数, 如质量和耦合常数. 另外, $\delta_i > 0$ 的不可重整化的相互作用中, 在足够高的阶数, 会出现 δ_{ct} 任意大的抵消项, 它们显然是不能通过重新定义参数来被吸收进初始的拉氏量中的, 因此不可重整化的理论未必会是无穷大的; 但是, 在微扰论的框架下中, 它生成的无限多个抵消项会使它缺乏预测能力, 因而用处不大.

下面我们要采用一个更严格的可重整化性的定义: 如果重整化过程带来的抵消项都能够通过重新定义拉氏量中的参数被吸收掉, 那么根据幂次计算, 这个拉氏量就被称为是可重整化的. 在这个定义下, 只包含 Yukawa 相互作用 $\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$ 的理论是不可重整化的, 即使它的耦合常数是无量纲的. 这是因为, 如图 7-16 所示的一圈图是对数发散的, 它需要一个 ϕ^4 形式的抵消项, 而这样的项并没有出现在初始拉氏量中. 因此 Yukawa 相互作用加上 ϕ^4 相互作用才是可重整化的.

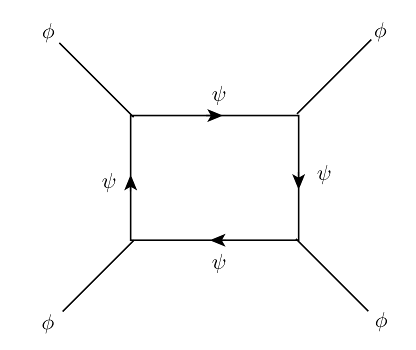


图 7-16　Yukawa 作用的框图 (box diagram)

7.2.2　包含矢量场的理论

这里我们区别无质量矢量场和有质量矢量场这两种情况, 因为它们的自由场传播子的渐近行为非常不同.

1. 无质量矢量场

无质量矢量场通常和局域规范不变性有关, 如 QED. 这样的矢量场的自由场传播子的渐近行为与标量场非常类似. 比如, 在 Feynman 规范中有

$$\Delta_{\mu\nu}(k)=\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\longrightarrow O\left(k^{-2}\right),\quad 当\ k^2\ 很大时 \tag{7-162}$$

这与标量场的渐近行为相同. 那么它的正则量纲就是

$$\mathrm{d}\left(A_\mu\right)=1 \tag{7-163}$$

与标量场的相同. 因此无质量矢量场与费米场、标量场相互作用的理论的幂次计算同之前的一样.

这类可重整化的相互作用的形式为

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu,\quad \phi^2A_\mu A^\mu,\quad \left(\partial_\mu\phi\right)\phi A^\mu \tag{7-164}$$

这里 A^μ 是零质量的矢量场, ψ 是费米场, ϕ 是标量场.

注意, 对于零质量矢量场的理论, 在构造抵消项时需要考虑规范不变性. 以 QED 为例, 拉氏量是

$$\mathcal{L}=\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\left(\mathrm{i}\partial_\mu-eA_\mu\right)\psi(x)-m\overline{\psi}(x)\psi(x)-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{7-165}$$

它对如下的规范变换保持不变

$$A^\mu\longrightarrow A'^\mu=A^\mu-\partial^\mu\alpha,\quad \psi(x)\longrightarrow\psi'(x)=e^{\mathrm{i}e\alpha}\psi \tag{7-166}$$

在这个理论中表观发散度是

$$D=4-B-\frac{3}{2}F \tag{7-167}$$

因此有如下几种 $D\geqslant 0$ 的情形:

(1) $B=2, F=0\Longrightarrow D=2$.

这说明光子场的 1PI 两点 Green 函数

$$\pi_{\mu\nu}(q)=\int\mathrm{d}^4x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle 0\left|T\left\{J_\mu(x)J_\nu(0)\right\}\right|0\right\rangle \tag{7-168}$$

是二次发散的. 其中 $J_\mu(x)$ 是电磁流. 由流守恒可得

$$q^\mu\pi_{\mu\nu}(q)=0,\quad q^\nu\pi_{\mu\nu}(q)=0 \tag{7-169}$$

这意味着 $\pi_{\mu\nu}(q)$ 有如下结构

$$\pi_{\mu\nu}(q)=\left(g_{\mu\nu}q^2-q_\mu q_\nu\right)\pi\left(q^2\right) \tag{7-170}$$

因此只有 $\pi(0)$ 是对数发散, 抵消项是 $\pi(0)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. 换句话说, 由于规范对称性的结果, 这里不需要 $A_\mu A^\mu$ 形式的抵消项.

举例来说, 考虑费米子圈对光子自能的贡献 (图 7-17), 通常称为真空极化 (vacuum polarization).

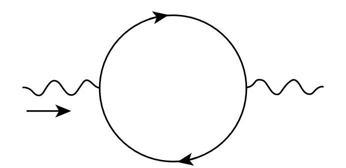


图 7-17 一圈真空极化

根据 Feynman 规则有

$$\pi_{\mu\nu}(q) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left(\frac{1}{\not{k}-m}\gamma_\mu \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m}\gamma_\nu\right) \tag{7-171}$$

那么

$$q^\mu \pi_{\mu\nu}(q) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left(\frac{1}{\not{k}-m}\not{q} \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m}\gamma_\nu\right) \tag{7-172}$$

将 $\not{q}$ 写成这样的形式

$$\not{q} = (\not{k}+\not{q}-m) - (\not{k}-m) \tag{7-173}$$

得到

$$q^\mu \pi_{\mu\nu}(q) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} tr\left[\left(\frac{1}{\not{k}-m} - \frac{1}{\not{k}+\not{q}-m}\right)\gamma_\nu\right] \tag{7-174}$$

如果可以在第二项中对积分变量作代换: $k \to k-q$, 那么它就可以和第一项抵消, 得到

$$q^\mu \pi_{\mu\nu}(q) = 0 \tag{7-175}$$

然而这个积分是高度发散的, 不可以这样平移积分变量. 但是, 如果对它进行维数正规化: $\mathrm{d}^4k \to \mathrm{d}^nk$, 那么它在 n 足够小时是收敛的, 就可以平移积分变量得到我们想要的结果. 这个例子说明, 顶点函数和传播子的关系 —— 通常体现为 Ward 恒等式, 是与维数无关的, 因而维数正规化对它们是最有用的.

(2) $B=1, F=2 \Longrightarrow D=0$.

此时顶点函数是对数发散的, 需要的抵消项的形式是 $\overline{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu \psi(x)$, 和初始拉氏量中相互作用项的形式相同.

(3) $B=4, F=0 \Longrightarrow D=0$.

这个似乎会对两个光子的散射图 (图 7-18) 有一个对数发散的贡献, 需要一个抵消项 A^4. 但是规范不变性又一次改变了发散的情形. 为了看明白这一点, 写出光

子–光子散射振幅

$$
\begin{aligned}
T=&\int \prod_{i=1}^{4}\left[\mathrm{d}^4 x_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i} q_i\cdot x_i}\right]\varepsilon^{\mu}(q_1)\,\varepsilon^{\nu}(q_2)\,\varepsilon^{\alpha}(q_3)\,\varepsilon^{\beta}(q_4)\langle 0\left|T\left[J_\mu(x_1)J_\nu(x_2)J_\alpha(x_3)J_\beta(x_4)\right]\right|0\rangle\\
=&\,\varepsilon^{\mu}(q_1)\,\varepsilon^{\nu}(q_2)\,\varepsilon^{\alpha}(q_3)\,\varepsilon^{\beta}(q_4)\,T_{\mu\nu\alpha\beta}(q_1,q_2,q_3,q_4)
\end{aligned}
$$

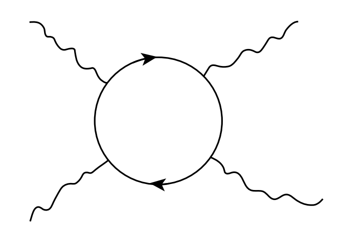


图 7-18　双光子散射图

很容易看出来, 由规范对称性可得

$$
q_1^{\mu}T_{\mu\nu\alpha\beta}(q_1,q_2,q_3,q_4)=0,\ q_2^{\nu}T_{\mu\nu\alpha\beta}(q_1,q_2,q_3,q_4)=0,\cdots \tag{7-176}
$$

这就意味着, 在 $T_{\mu\nu\alpha\beta}(q_1,q_2,q_3,q_4)$ 的 Taylor 展开中, 常数项即没有微分的项是 0, 不需要抵消项.

2. 有质量的矢量场

这里的自由场拉氏量的形式如下

$$
\mathcal{L}_0=-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu V_\nu-\partial_\nu V_\mu\right)^2+\frac{1}{2}M_V^2 V_\mu^2 \tag{7-177}
$$

其中, V_μ 是一个有质量的矢量场, M_V 是场的质量. 动量空间的传播子形式为

$$
D_{\mu\nu}(k)=\frac{-\mathrm{i}\left(g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu/M_V^2\right)}{k^2-M_V^2+\mathrm{i}\varepsilon}\to O(1),\quad \text{当 } k\to\infty \text{ 时} \tag{7-178}
$$

要得到上式, 首先有

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^4 x\mathcal{L}_0&=\int \mathrm{d}^4 x\frac{1}{2}\left[V_\mu\partial^2 V^\mu-V_\mu\partial^\mu\partial^\nu V_\nu+M_V^2 V_\mu V^\mu\right]\\
&=\int \mathrm{d}^4 x\frac{1}{2}V_\mu[\left(\partial^2+M_V^2\right)g^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu]V_\nu
\end{aligned} \tag{7-179}
$$

传播子定义为

$$
[\left(\partial^2+M_V^2\right)g^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu]G_{\nu\beta}(x-y)=g^{\mu}_{\beta}\delta^4(x-y) \tag{7-180}
$$

简单来讲, 传播子是 V_μ 二次项中的算子的逆. 可以用 Fourier 变换来解这个方程. 设

$$G_{\nu\beta}(x-y)=\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}D_{\nu\beta}\left(k\right) \tag{7-181}$$

代入方程可得

$$[\left(-k^2+M_V^2\right)g^{\mu\nu}+k^\mu k^\nu]D_{\nu\beta}=g^\mu_\beta \tag{7-182}$$

利用 $D_{\nu\beta}$ 的张量性质可以将它分解为

$$D_{\nu\beta}=ag_{\nu\beta}+bk_\beta k_\nu \tag{7-183}$$

于是有

$$a\left[\left(-k^2+M_V^2\right)g^\mu_\beta+k^\mu k_\beta\right]+b\left[\left(-k^2+M_V^2\right)k^\mu k_\beta+k^2k^\mu k_\beta\right]=g^\mu_\beta \tag{7-184}$$

整理对应项系数, 得到

$$a=-\frac{1}{k^2-M_V^2},\quad b=\frac{1}{M_V^2}\frac{1}{k^2-M_V^2} \tag{7-185}$$

所以

$$D_{\mu\nu}\left(k\right)=\frac{-\mathrm{i}\left(g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu/M_V^2\right)}{k^2-M_V^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{7-186}$$

这意味着有质量矢量场的正则量纲是 2, 不是 1. 幂次计算随表观发散度修改为

$$D=4-B-\frac{3}{2}F-V+\sum_i n_i\left(\varDelta_i-4\right) \tag{7-187}$$

其中

$$\varDelta_i=b_i+\frac{3}{2}f_i+2v_i+d_i \tag{7-188}$$

这里 V 是矢量场外线的数目, v_i 是第 i 类顶点中的矢量场的数目, $\varDelta_i$ 是 $\mathcal{L}$ 中相互作用项的正则量纲. 从上面 $\varDelta_i$ 的公式可以看出, 包含有质量矢量场的唯一的可重整化的相互作用, 即 $\varDelta_i\leqslant 4$ 的相互作用形式是 ϕ^2A_μ, 但它不是 Lorentz 不变的. 所以有质量矢量场没有可用的可重整化的相互作用. 但是有两个重要的例外应当注意:

(1) 在一个可自发对称破缺的规范理论中, 规范玻色子可以在保持理论可重整化的情况下获得质量 [10].

(2) 一个中性的有质量的矢量玻色子耦合到一个守恒流上的理论也是可重整化的. 我们可以这样来启发式地理解这一点. 方程 (7-178) 中的传播子通常出现在守恒流 $J^\mu\left(k\right)$ 和 $J^\nu\left(k\right)$ 之间, 又因为流守恒 $k^\mu J_\mu\left(k\right)=0$, 即坐标空间中的 $\partial^\mu J_\mu\left(x\right)=0$, 所以 $k_\mu k_\nu/M_V^2$ 项不会有贡献. 这样它的幂次计数实质上与无质量矢量场的情形相同.

7.2.3 复合算符

有时需要考虑包含复合算符 (composite operator) 的 Green 函数. 复合算符是指由同一时空点的多个场及它们的导数构成的多项式. 现在通过一个例子来对其进行具体说明. 考虑 $\lambda\phi^4$ 理论中的一个简单的复合算符 $\Omega(x)=\frac{1}{2}\phi^2(x)$. 插入一个 Ω 的 Green 函数的形式为

$$G_{\Omega}^{(n)}(x;x_1,x_2,\cdots,x_n)=\langle 0|T\left\{\frac{1}{2}\phi^2(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\right\}|0\rangle \tag{7-189}$$

在动量空间中有

$$\begin{aligned}&(2\pi)^4\delta^4(p+p_1+\cdots+p_n)G_{\Omega}^{(n)}(p;p_1,\cdots,p_n)\\&=\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\int\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}^4x_i\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_ix_i}G_{\Omega}^{(n)}(x;x_1,\cdots,x_n)\end{aligned} \tag{7-190}$$

在微扰论中, 可以用 Wick 定理由 Feynman 图算出这些 Green 函数. 比如, 使用 Wick 定理, 取 λ 的最低阶, 包含一个复合算符 $\Omega(x)=\frac{1}{2}\phi^2(x)$ 的两点函数是

$$G_{\phi^2}^{(2)}(x;x_1,x_2)=\frac{1}{2}\left\langle 0|T\{\phi^2(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\}|0\right\rangle=\mathrm{i}\Delta(x-x_1)\mathrm{i}\Delta(x-x_2) \tag{7-191}$$

在动量空间中的形式为

$$G_{\phi^2}^{(2)}(p;p_1,p_2)=\mathrm{i}\Delta(p_1)\mathrm{i}\Delta(p+p_1) \tag{7-192}$$

它对应于图 7-19(a). 去掉外部传播子, 可以得到

$$\Gamma_{\phi^2}^{(2)}(p,p_1,-p_1-p)=1 \tag{7-193}$$

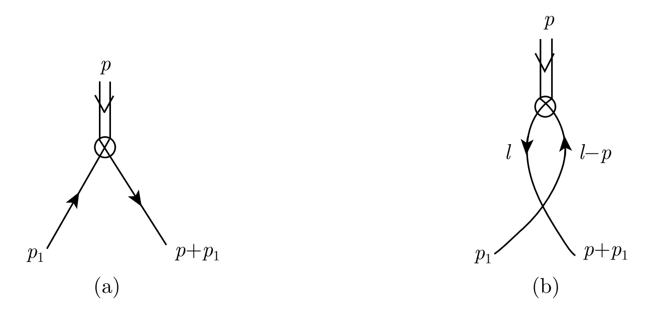


图 7-19 复合算符的 Feynman 图

同样地, Green 函数取到 λ 的第一阶, 有

$$\begin{aligned}G_{\phi^2}^{(2)}(x,x_1,x_2)&=\int\langle 0|T\left\{\frac{1}{2}\phi^2(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\frac{(-\mathrm{i}\lambda)}{4!}\phi^4(y)\right\}|0\rangle\mathrm{d}^4y\\&=\int \mathrm{d}^4y\frac{-\mathrm{i}\lambda}{2}[\mathrm{i}\Delta(x-y)]^2\mathrm{i}\Delta(x_1-y)\mathrm{i}\Delta(x_2-y)\end{aligned}$$

它对应于图 7-19(b). 去掉外线的 1PI 动量空间 Green 函数是

$$\Gamma_{\phi^2}^{(2)}(p;p_1,-p-p_1)=\frac{-\mathrm{i}\lambda}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{l^2-\mu^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{(l-p)^2-\mu^2+\mathrm{i}\epsilon} \tag{7-194}$$

为了系统且有条理地计算这一类 Green 函数, 可以将一个 $\chi(x)\Omega(x)$ 项加到 $\mathcal{L}$ 中

$$\mathcal{L}[\chi]=\mathcal{L}[0]+\chi(x)\Omega(x) \tag{7-195}$$

这里的 $\chi(x)$ 是一个 c 数的源函数. 可以用这个外源构造生成泛函 $W[\chi]$. 将 $\ln W[\chi]$ 对 χ 作微分后再设 χ 为 0, 就可以得到连通的 Green 函数.

复合算符的重整化

有一个复合算符的 Green 函数的表观发散度是

$$D_\Omega=D+\delta_\Omega=D+(d_\Omega-4) \tag{7-196}$$

其中, d_Ω 是 Ω 的正则量纲. 对于 $\Omega(x)=\frac{1}{2}\phi^2(x)$, 有 $d_{\phi^2}=2$ 以及 $D_{\phi^2}=2-n$, 所以只有两点函数 $\Gamma_{\phi^2}^{(2)}$ 是对数发散的. 它的 Taylor 展开的形式为

$$\Gamma_{\phi^2}^{(2)}(p;p_1,-p-p_1)=\Gamma_{\phi^2}^{(2)}(0;0,0)+\Gamma_{\phi^2R}^{(2)}(p;p_1,-p-p_1) \tag{7-197}$$

可以将抵消项

$$\frac{-\mathrm{i}}{2}\Gamma_{\phi^2}^{(2)}(0;0,0)\chi(x)\phi^2(x) \tag{7-198}$$

和初始项相结合写出

$$\frac{-\mathrm{i}}{2}\chi\phi-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{\phi^2}^{(2)}(0;0,0)\chi\phi^2=-\frac{\mathrm{i}}{2}Z_{\phi^2}\chi\phi^2 \tag{7-199}$$

这里的 Z_{ϕ^2} 是 ϕ^2 算符的重整化常数. 通常需要将抵消项 $\Delta\Omega$ 插入初始的相加项中

$$L\longrightarrow L+\chi(\Omega+\Delta\Omega) \tag{7-200}$$

如果 $\Delta\Omega=C\Omega$, 就像 $\Omega=\dfrac{1}{2}\phi^2$ 的情形, 有

$$L[\chi]=L[0]+\chi Z_\Omega\Omega=L[0]+\chi\Omega_0 \tag{7-201}$$

其中

$$\Omega_0=Z_\Omega\Omega=(1+C)\Omega \tag{7-202}$$

这样的复合算符被称为**乘积可重整化的**(multiplicative renormalizable). 那么未重整化的算符 Ω_0 的 Green 函数和重整化的算符 Ω 的 Green 函数的关系是

$$\begin{aligned}G_{\Omega_0}^{(n)}(x;x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\langle 0|T\{\Omega_0(x)\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\cdots\phi_0(x_n)\}|0\rangle\\&=Z_\Omega Z_\phi^{n/2}G_{\Omega R}^{(n)}(x;x_1,\cdots,x_n)\end{aligned} \tag{7-203}$$

在更一般的情况中, 抵消项中的算符可能与原来的算符不一样, 即 $\Delta\Omega \neq C\Omega$. 此时一个复合算符的重整化可能需要正比于其他复合算符的抵消项. 这种情况可能需要引进复合算符间的混合 (mixing). 下面我们举例说明.

考虑两个复合算符 A 和 B. 用 ΔA 和 ΔB 表示它们的抵消项. 计入抵消项, 可以将拉氏量写为

$$L[\chi] = L[0] + \chi_A(A + \Delta A) + \chi_B(B + \Delta B) \tag{7-204}$$

一种很常见的情况是, 抵消项 ΔA 和 ΔB 是 A 和 B 的线性组合, 即

$$\Delta A = C_{AA}A + C_{AB}B \tag{7-205}$$

$$\Delta B = C_{BA}A + C_{BB}B \tag{7-206}$$

我们称这种情况为 A 和 B 之间有算符混合 (operator mixing). 于是有

$$L[\chi] = L[0] + (\chi_A\ \chi_B)\{C\}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 + C_{AA} & C_{AB} \\ C_{BA} & 1 + C_{BB} \end{pmatrix} \tag{7-207}$$

通过双幺正变换 (bi-unitary transformation) 将 $\{C\}$ 对角化 (这个方法在电弱理论中会有更详细的描述)

$$U\{C\}V^{+} = \begin{pmatrix} Z_{A'} & 0 \\ 0 & Z_{B'} \end{pmatrix} \tag{7-208}$$

其中, U, V 是两个 2×2 的幺正矩阵. 那么

$$L[\chi] = L[0] + Z_{A'}\chi_{A'}A' + Z_{B'}\chi_{B'}B' \tag{7-209}$$

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad (\chi_{A'}\ \chi_{B'}) = (\chi_A\ \ \chi_B)U \tag{7-210}$$

所以新的组合 A' 和 B' 是乘法可重整化的.

7.3 重整化群

下面简要地讨论一下重整化群的相关概念. 重整化方案需要选定减除点, 这样会引入新的能量标度. 下面我们将看到, 这里引入了与能量相关的“耦合常数”的概念, 如

$$\lambda = \lambda(s) \tag{7-211}$$

尽管初始拉氏量中的耦合常数和能量无关.

重整化群方程

一般来说, 重整化方案 (或减除点) 的选择有一定的任意性, 然而物理结果应该是不受这种任意性影响的, 它和重整化方案的选择无关 —— 本质上这就是重整化群方程的物理内涵. 假设有 R 和 R' 两套不同的重整化方案. 从 BPH 重整化的观点来看 (式 (7-61)), 可以将裸拉氏量写成

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_R(R\text{- 量})=\mathcal{L}_{R'}(R'\text{- 量}) \tag{7-212}$$

回顾之前的内容, 有如下的关系

$$\phi_R=Z_{\varphi R}^{-\frac{1}{2}}\phi_0,\quad \lambda_R=Z_{\lambda R}^{-1}Z_{\phi R}^2\lambda_0,\quad \mu_R^2=\mu_0^2+\delta\mu_R^2 \tag{7-213}$$

同样地,

$$\phi_{R'}=Z_{\varphi R'}^{-\frac{1}{2}}\phi_0,\quad \lambda_{R'}=Z_{\lambda R'}^{-1}Z_{\phi R'}^2\lambda_0,\quad \mu_{R'}^2=\mu_0^2+\delta\mu_{R'}^2 \tag{7-214}$$

既然 ϕ_0, λ_0 和 μ_0 是相同的, 那么可以找出 R- 量和 R'- 量之间的关系.

为了与标准符号相统一, 需要改变一下之前使用的符号. 下面用 m_0 和 m 代替 μ_0 和 μ 来表示裸质量和物理质量, 参数 μ 现在用来表示减除点. 一般来说, 重整化的 1PI Green 函数与裸的 1PI Green 函数的关系是

$$Z_\phi^{-\frac{n}{2}}\mathit{\Gamma}_R^{(n)}(p_i,\lambda,m,\mu)=\mathit{\Gamma}^{(n)}(p_i,\lambda_0,m_0) \tag{7-215}$$

重整化的函数 $\mathit{\Gamma}_R^{(n)}(p_i,\lambda,m,\mu)$ 和减除点 μ 有关, 而未重整化的 $\mathit{\Gamma}^{(n)}(p_i,\lambda_0,m_0)$ 则与它无关, 所以

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\mathit{\Gamma}^{(n)}(p_i,\lambda_0\mu_0^2)=0\Longrightarrow\mu\frac{\partial}{\partial\mu}[Z_\phi^{-\frac{n}{2}}\mathit{\Gamma}_R^{(n)}(p_i,\lambda,m,\mu)]=0 \tag{7-216}$$

使用复合函数求导的链式法则, 得到

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\left(\lambda\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}+m\left(\lambda\right)\frac{\partial}{\partial m}-n\gamma\left(\lambda\right)\right]\mathit{\Gamma}_R^{(n)}=0 \tag{7-217}$$

其中

$$\beta\left(\lambda\right)=\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu},\quad m\left(\lambda\right)=\mu\frac{\partial m}{\partial\mu},\quad \gamma\left(\lambda\right)=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_\phi \tag{7-218}$$

上式就是所谓的 **Callan-Symanzik 方程**, 又称为重整化群方程 [11].

现在来讨论 Green 函数随减除能标 μ 变化时的行为, 特别是在高能区的渐近行为. 根据量纲分析, 定义一个如下的量纲为一的物理量 $\bar{\mathit{\Gamma}}$:

$$\mathit{\Gamma}_R^{(n)}(p_i,\lambda,m,\mu)=\mu^{4-n}\bar{\mathit{\Gamma}}_R^{(n)}\left(\frac{p_i}{\mu},\lambda,m\right) \tag{7-219}$$

这样就可以用参数 μ 来度量 (scale) 所有其他的有量纲的量, 如动量 p_i. 为了简单起见, 我们只讨论 $m=0$ 的理论. 因为 $\bar{\Gamma}$ 是量纲为一的, 所以当按比例增加动量时, 有

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\bar{\Gamma}_R^{(n)}\left(\frac{\sigma p_i}{\mu},\lambda\right)=0 \tag{7-220}$$

因此

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}+(n-4)\right]\Gamma_R^{(n)}\left(\frac{\sigma p_i}{\mu},\lambda\right)=0 \tag{7-221}$$

上式结合 Callan-Symanzik 方程, 可以得到

$$\left[\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}-\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}+n\gamma(\lambda)+(n-4)\right]\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=0 \tag{7-222}$$

为了求解这个方程, 可以通过如下变换去掉非导数项

$$\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=\sigma^{4-n}\exp\left[n\int_0^\lambda\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\mathrm{d}x\right]F^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu) \tag{7-223}$$

函数 $F^{(n)}$ 满足的方程是

$$\left[\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}-\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]F^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=0 \tag{7-224}$$

或

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]F^{(n)}(\mathrm{e}^t p_i,\lambda,\mu)=0,\quad t=\ln\sigma \tag{7-225}$$

引入有效常数 $\bar{\lambda}$ (又称跑动常数), 它满足方程

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}(t,\lambda)}{\mathrm{d}t}=\beta(\bar{\lambda}),\quad \text{初始条件为 } \bar{\lambda}(0,\lambda)=\lambda \tag{7-226}$$

上式的解为

$$t=\int_\lambda^{\bar{\lambda}(t,\lambda)}\frac{\mathrm{d}x}{\beta(x)} \tag{7-227}$$

容易得到

$$\frac{1}{\beta(\bar{\lambda})}\frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}}{\mathrm{d}\lambda}=\beta(\lambda)\quad\text{以及}\quad\left[\frac{\partial}{\partial t}-\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]\bar{\lambda}(t,\lambda)=0 \tag{7-228}$$

这意味着, 任何通过 $\bar{\lambda}(t,\lambda)$ 的形式依赖于 t 和 λ 的函数 $F^{(n)}$ 都会满足式 (7-225) 中的重整化群方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]F^{(n)}(p_i,\bar{\lambda}(t,\lambda),\mu)=0 \tag{7-229}$$

至于重整化群方程解的另一个因子, 可以用有效耦合常数将它写成

$$\begin{aligned}\exp\left[n\int_0^{\lambda}\frac{\gamma(\lambda)}{\beta(\lambda)}\mathrm{d}\lambda\right] &\sim \exp\left[n\int_0^{\bar{\lambda}}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\mathrm{d}x+n\int_{\bar{\lambda}}^{\lambda}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\mathrm{d}x\right]\\ &=H(\bar{\lambda})\exp\left[-n\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\mathrm{d}x\right]\\ &=H(\bar{\lambda})\exp\left[-n\int_0^{t}\gamma(\bar{\lambda}(t',\lambda))\mathrm{d}t'\right]\end{aligned}$$

其中

$$H(\bar{\lambda})=\exp\left[n\int_0^{\bar{\lambda}}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\mathrm{d}x\right] \tag{7-230}$$

那么, 解可以写成

$$\varGamma_R^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=\sigma^{4-n}\exp\left[-n\int_0^{t}\gamma(\bar{\lambda}(x',\lambda))\mathrm{d}x'\right]H(\bar{\lambda})F^{(n)}(p_i,\bar{\lambda}(t,\lambda),\mu) \tag{7-231}$$

如果令 $t=0$(或 $\sigma=1$), 看到

$$\varGamma_R^{(n)}(p_i,\lambda,\mu)=H(\lambda)F^{(n)}(p_i,\lambda,\mu) \tag{7-232}$$

因此可以将解化成更简单的形式

$$\varGamma_R^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=\sigma^{4-n}\exp\left[-n\int_0^{t}\gamma(\bar{\lambda}(x',\lambda))\mathrm{d}x'\right]\varGamma_R^{(n)}(p_i,\bar{\lambda}(t,\lambda),\mu) \tag{7-233}$$

我们来讨论一下这个解的性质. 它的第一个因子 σ^{4-n} 来自于 Green 函数 $\varGamma_R^{(n)}(p_i,\bar{\lambda}(t,\lambda),\mu)$ 的简单量纲, 因为我们是通过增加 σ 来按比例增加动量的. 第二个因子给出除了简单量纲部分以外的, 它对 $t=\ln\sigma$ 的依赖关系通常称为反常量纲 (anomalous dimension). 最后一个因子是初始的未定标的 (unscaled) Green 函数, 只是其中的耦合常数已被替换为有效耦合常数 $\bar{\lambda}(t,\lambda)$.

有效耦合常数 $\bar{\lambda}$

为了理解 Green 函数的渐近行为, 现在讨论有效耦合常数 $\bar{\lambda}(t,\lambda)$ 的渐近行为. 支配 $\bar{\lambda}(t,\lambda)$ 行为的微分方程是一个一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}(t,\lambda)}{\mathrm{d}t}=\beta(\bar{\lambda}),\quad \text{初始条件为 } \bar{\lambda}(0,\lambda)=\lambda \tag{7-234}$$

考虑 $\beta(\lambda)$ 有如图 7-20 所示的简单行为的情况.

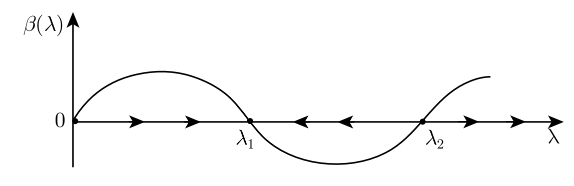


图 7-20 $\beta(\lambda)$ 的函数图像

假设 $0 < \lambda < \lambda_1$, 由方程 (7-234) 可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} > 0 \tag{7-235}$$

因此在 $t \geqslant 0$ 处, $\bar{\lambda}$ 随着 t 的增大而增大, 直到它达到 λ_1, 此时 $\frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}}{\mathrm{d}t} = 0$, $\bar{\lambda}$ 不会再变. 另外, 如果一开始 $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, 那么

$$\left.\frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} < 0 \tag{7-236}$$

$\bar{\lambda}$ 会减小, 直到减至 λ_1. 因此, 当 $t \to \infty$ 时, 得到

$$\lim_{t\to\infty} \bar{\lambda}(t,\lambda) = \lambda_1, \quad \lambda_1\text{称为紫外稳定的不动点 (ultraviolet stable fixed point)} \tag{7-237}$$

以及

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t,\lambda), \mu) \xrightarrow{t\to\infty} \Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda_1, \mu) \tag{7-238}$$

我们以一个例子来进行说明. 假设 $\beta(x)$ 在 $\lambda = \lambda_1$ 处有一个一阶零点

$$\beta(\lambda) \simeq a(\lambda_1 - \lambda), \quad a > 0 \tag{7-239}$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}}{\mathrm{d}t} = a(\lambda_1 - \lambda) \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda_1 + (\lambda - \lambda_1)\mathrm{e}^{-at} \tag{7-240}$$

也就是说, $\bar{\lambda}$ 是以 $t = \ln\sigma$ 的指数形式趋近于不动点 λ_1. 另外, 前因子也能被化简

$$\begin{aligned}
\int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(x,\lambda))\mathrm{d}x &= \int_\lambda^{\bar{\lambda}} \frac{\gamma(y)\mathrm{d}y}{\beta(y)} \\
&\approx \frac{-\gamma(\lambda_1)}{a} \int_\lambda^{\bar{\lambda}} \frac{\mathrm{d}\lambda'}{\lambda' - \lambda_1} \\
&= \frac{-\gamma(\lambda_1)}{a} \ln\left(\frac{\bar{\lambda} - \lambda_1}{\lambda - \lambda_1}\right) \\
&= \gamma(\lambda_1)t = \gamma(\lambda_1)\ln\sigma
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{\sigma\to\infty}\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i,\lambda,\mu)=\sigma^{4-n[1+\gamma(\lambda_1)]}\Gamma_R^{(n)}(p_i,\lambda_1,\mu) \tag{7-241}$$

这说明场论中的渐近行为是被不动点 λ_1 和反常量纲 $\gamma(\lambda_1)$ 所控制的.

7.4　附录: n 维积分

7.4.1　n 维“球”坐标

在 n 维空间中, 笛卡儿坐标可以用如下的“球”坐标进行参数化:

$$\begin{aligned}
x_1&=r_n\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1\\
x_2&=r_n\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1\\
x_3&=r_n\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\cdots\sin\theta_3\cos\theta_2\\
&\cdots\cdots\\
x_n&=r_n\cos\theta_{n-1}
\end{aligned} \tag{7-242}$$

其中

$$0\leqslant\theta_1\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant\theta_2,\theta_3,\cdots,\theta_{n-1}\leqslant\pi \tag{7-243}$$

并且有

$$r_n^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \tag{7-244}$$

下面我们要说明 n 维无穷小体积元可以写成

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n\\
&=r_n^{n-1}(\sin\theta_{n-1})^{n-2}(\sin\theta_{n-2})^{n-3}\cdots(\sin\theta_2)(\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1})\mathrm{d}r_n
\end{aligned} \tag{7-245}$$

我们的方法是找出 n 和 $n-1$ 维体积因子之间的关系. 也就是说, 我们会从最简单的 $n=2$ 例子出发, 逐步推广到更高维的情况.

$$n=2\to n=3\to n=4\to \text{任意的}n \tag{7-246}$$

1. $n=2$

此时两个笛卡儿坐标 (x_1,x_2) 可以用我们熟悉的极坐标 (r_2,θ_1) 表示

$$x_1=r_2\sin\theta_1,\quad x_2=r_2\cos\theta_1,\quad 0\leqslant\theta_1\leqslant2\pi,\quad r_2^2=x_1^2+x_2^2 \tag{7-247}$$

邻近两点的距离 $\mathrm{d}s_2$ 为

$$(\mathrm{d}s_2)^2=(\mathrm{d}x_1)^2+(\mathrm{d}x_2)^2=(\mathrm{d}r_2)^2+r_2^2(\mathrm{d}\theta_1)^2 \tag{7-248}$$

那么“体积元”就是相互正交的方向上的每个小段的乘积 —— 即坐标微分的乘积再加上合适的系数, 系数可以从 (二次的) 距离关系上看出来

$$\mathrm{d}V_2 = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = (\mathrm{d}r_2)(r_2\mathrm{d}\theta_1) = r_2\mathrm{d}r_2\mathrm{d}\theta_1 \tag{7-249}$$

实际上, 距离公式中 $(\mathrm{d}r_2)^2$ 和 $(\mathrm{d}\theta_1)^2$ 的系数就是二维极坐标的度规. 它们的乘积开平方根后就是“体积元”在新坐标中的系数.

2. $n=3$

考虑一个三维球体. 如果用一个垂直于 x_3 轴的平面切割这个球体, 就会得到一系列的圆盘. 这些圆位于笛卡儿坐标 (x_1, x_2) 张成的平面. 如上文所述, 坐标 (x_1, x_2) 和极坐标 (r_2, θ_1) 的关系如下

$$x_1 = r_2\sin\theta_1, \quad x_2 = r_2\cos\theta_1, \quad 0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi, \quad r_2^2 = x_1^2 + x_2^2 \tag{7-250}$$

因此这个平面上的无穷小距离元可以用这两种坐标系表示为

$$(\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 = (\mathrm{d}r_2)^2 + r_2^2(\mathrm{d}\theta_1)^2 \tag{7-251}$$

还可以用包含 x_3 轴的平面来切割球体, 得到一系列“垂直的圆”. 在这些二维子空间中, 笛卡儿坐标是 (r_2, x_3), 对应于极坐标 (r_3, θ_2):

$$r_2 = r_3\sin\theta_2, \quad x_3 = r_3\cos\theta_2, \quad 0 \leqslant \theta_2 \leqslant \pi \tag{7-252}$$

$$r_3^2 = r_2^2 + x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{7-253}$$

可以看出, θ_2 就是通常所说的极角. 就像等式 (7-251), 此时无穷小的距离元也可以表示成两种等价的形式

$$(\mathrm{d}r_2)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2 = (\mathrm{d}r_3)^2 + r_3^2(\mathrm{d}\theta_2)^2 \tag{7-254}$$

结合式 (7-250) 和式 (7-252) 中的这两组坐标, 就可以得到通常的球坐标关系

$$\begin{aligned} x_1 &= r_3\sin\theta_2\sin\theta_1 \\ x_2 &= r_3\sin\theta_2\cos\theta_1 \\ x_3 &= r_3\cos\theta_2 \end{aligned} \tag{7-255}$$

用式 (7-251), 可以将 3 维的距离公式

$$(\mathrm{d}s_3)^2 = (\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2 \tag{7-256}$$

写成

$$(\mathrm{d}s_3)^2 = (\mathrm{d}r_2)^2 + r_2^2(\mathrm{d}\theta_1)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2 \tag{7-257}$$

再结合等式 (7-254) 和式 (7-252), 它可以进一步被化成球坐标的形式

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s_3)^2 &= (\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2 \\ &= (\mathrm{d}r_3)^2 + r_2^2 (\mathrm{d}\theta_1)^2 + r_3^2 (\mathrm{d}\theta_2)^2 \\ &= (\mathrm{d}r_3)^2 + r_3^2 \sin\theta_2^2 (\mathrm{d}\theta_1)^2 + r_3^2 (\mathrm{d}\theta_2)^2 \end{aligned} \tag{7-258}$$

将这三项相乘再开根号就可以得到体积元

$$\mathrm{d}V_3 = (\mathrm{d}r_3)(r_3 \sin\theta_2 \mathrm{d}\theta_1)(r_3 \mathrm{d}\theta_2) = r_3^2 \sin\theta_2 (\mathrm{d}r_3 \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\theta_2) \tag{7-259}$$

3. $n = 4$

我们也可以想象用流形 (x_4 = 常数) 来切割四维“球体”, 得到半径为 $r_3 = r_4 \sin\theta_3$ 的三维球. 在这些三维球中, 可以引入式 (7-255) 中的三维球坐标 $(r_3, \theta_1, \theta_2)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_3 \sin\theta_2 \sin\theta_1 = (r_4 \sin\theta_3) \sin\theta_2 \sin\theta_1 \\ x_2 &= r_3 \sin\theta_2 \cos\theta_1 = (r_4 \sin\theta_3) \sin\theta_2 \cos\theta_1 \\ x_3 &= r_3 \cos\theta_2 = (r_4 \sin\theta_3) \cos\theta_2 \end{aligned} \tag{7-260}$$

它的距离公式是式 (7-258):

$$(\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2 = (\mathrm{d}r_3)^2 + r_3^2 (\mathrm{d}\theta_2)^2 + r_3^2 \sin^2\theta_2 (\mathrm{d}\theta_1)^2 \tag{7-261}$$

然后再引入 (r_3, x_4) 平面中的 2 维极坐标 (r_4, θ_3):

$$r_3 = r_4 \sin\theta_3, \quad x_4 = r_4 \cos\theta_3 \tag{7-262}$$

其中的距离公式是

$$(\mathrm{d}r_3)^2 + (\mathrm{d}x_4)^2 = (\mathrm{d}r_4)^2 + r_4^2 (\mathrm{d}\theta_3)^2 \tag{7-263}$$

这样, 利用等式 (7-261) 和 (7-263), 可以把 4 维空间中的无穷小距离写成

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s_4)^2 &= \left[(\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2\right] + (\mathrm{d}x_4)^2 \qquad (7\text{-}264) \\ &= \left[(\mathrm{d}r_3)^2 + r_3^2 (\mathrm{d}\theta_2)^2 + r_3^2 \sin^2\theta_2 (\mathrm{d}\theta_1)^2\right] + (\mathrm{d}x_4)^2 \\ &= \left[(\mathrm{d}r_3)^2 + (\mathrm{d}x_4)^2\right] + r_3^2 (\mathrm{d}\theta_2)^2 + r_3^2 \sin^2\theta_2 (\mathrm{d}\theta_1)^2 \\ &= (\mathrm{d}r_4)^2 + r_4^2 (\mathrm{d}\theta_3)^2 + r_3^2 (\mathrm{d}\theta_2)^2 + r_3^2 \sin^2\theta_2 (\mathrm{d}\theta_1)^2 \end{aligned}$$

于是无穷小体积元就是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v_4 &= (\mathrm{d}r_4)(r_4 \mathrm{d}\theta_3)(r_3 \mathrm{d}\theta_2)(r_3 \sin\theta_2 \mathrm{d}\theta_1) \\ &= r_4^3 \sin^2\theta_3 \sin\theta_2 (\mathrm{d}r_4 \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\theta_2 \mathrm{d}\theta_3) \end{aligned} \tag{7-265}$$

其中在最后一步使用了等式 (7-262).

4. 任意的 n

与前面的分析相类比可以得到, 对于一般的 n 有

$$\begin{aligned} x_1 &= r_n \sin\theta_{n-1} \sin\theta_{n-2} \cdots \sin\theta_2 \sin\theta_1 \\ x_2 &= r_n \sin\theta_{n-1} \sin\theta_{n-2} \cdots \sin\theta_2 \cos\theta_1 \\ x_3 &= r_n \sin\theta_{n-1} \sin\theta_{n-2} \cdots \sin\theta_3 \cos\theta_2 \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= r_n \cos\theta_{n-1} \end{aligned} \tag{7-266}$$

其中

$$r_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \quad 0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_{n-1} \leqslant \pi \tag{7-267}$$

无穷小距离元是

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}s_n)^2 &= (\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x_n)^2 \\ &= (\mathrm{d}r_n)^2 + r_n^2 (\mathrm{d}\theta_{n-1})^2 + r_n^2 \sin^2\theta_{n-1} (\mathrm{d}\theta_{n-2})^2 \\ &\quad + r_n^2 \sin^2\theta_{n-1} \sin^2\theta_{n-2} (\mathrm{d}\theta_{n-3})^2 + \cdots \\ &\quad + r_n^2 \sin^2\theta_{n-1} \sin^2\theta_{n-2} \cdots \sin^2\theta_2 (\mathrm{d}\theta_1)^2 \end{aligned} \tag{7-268}$$

体积元是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V_n &= \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \\ &= (r_n)^{n-1} (\sin\theta_{n-1})^{n-2} (\sin\theta_{n-2})^{n-3} \cdots \sin\theta_2 (\mathrm{d}r_n \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\theta_2 \cdots \mathrm{d}\theta_{n-1}) \end{aligned} \tag{7-269}$$

7.4.2 维数正规化中的一些积分

在维数正规化中, 可以推导出分母幂次是 α 的 n 维 Feynman 积分的如下结果.

(1)

$$\begin{aligned} I_0(\alpha, n) &= \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + 2p \cdot k + M^2 + \mathrm{i}\varepsilon)^\alpha} \\ &= \mathrm{i} \frac{(-\pi)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(M^2 - p^2 + \mathrm{i}\varepsilon)^{\alpha - \frac{n}{2}}} \end{aligned} \tag{7-270}$$

(2)

$$\begin{aligned} I_\mu(\alpha, n) &= \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2p \cdot k + M^2 + \mathrm{i}\varepsilon)^\alpha} \\ &= -p_\mu I_0(\alpha, n) \end{aligned} \tag{7-271}$$

(3)

$$I_{\mu\nu}(\alpha,n)=\int\frac{\mathrm{d}^nk}{(2\pi)^n}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+2p\cdot k+M^2+\mathrm{i}\varepsilon)^\alpha}$$
$$=I_0(\alpha,n)\left[p_\mu p_\nu+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{M^2-p^2}{\alpha-\frac{n}{2}-1}\right] \tag{7-272}$$

(4)

$$I_{\mu\nu\rho}(\alpha,n)=\int\frac{\mathrm{d}^nk}{(2\pi)^n}\frac{k_\mu k_\nu k_\rho}{(k^2+2p\cdot k+M^2+\mathrm{i}\varepsilon)^\alpha}$$
$$=-I_0(\alpha,n)\left[4p_\mu p_\nu p_\rho+\frac{1}{2}(g_{\mu\nu}p_\rho+g_{\mu\rho}p_\nu+g_{\nu\rho}p_\mu)\frac{M^2-p^2}{\alpha-\frac{n}{2}-1}\right] \tag{7-273}$$

下面我们逐个推导这些积分.

(1) 在 Feynman 积分

$$I_0(\alpha,n)=\int\frac{\mathrm{d}^nk}{(2\pi)^n}\frac{1}{(k^2+2p\cdot k+M^2+\mathrm{i}\varepsilon)^\alpha} \tag{7-274}$$

中, 分母可以被写成

$$D=k^2+2p\cdot k+M^2+\mathrm{i}\varepsilon=(p+k)^2+\left(M^2-p^2\right)+\mathrm{i}\varepsilon$$
$$=k'^2+\left(M^2-p^2\right)+\mathrm{i}\varepsilon \tag{7-275}$$

其中, $k'=k+p$. 如果 $p^2\geqslant M^2$, 可以做 Wick 转动, 得到

$$D=-\bar{k}^2+M^2-p^2+\mathrm{i}\varepsilon=-(\bar{k}^2+a^2) \tag{7-276}$$

其中, $a^2=p^2-M^2-\mathrm{i}\epsilon$. 此时积分可以写成

$$I_0(\alpha,n)=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^nk}{(2\pi)^n}\frac{1}{(-1)^\alpha}\frac{1}{(k^2+a^2)^\alpha} \tag{7-277}$$

这个积分是欧氏空间中的积分. 同样地, n 维角度积分的结果是

$$\int\mathrm{d}\Omega_n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \tag{7-278}$$

于是有

$$
\begin{aligned}
I_0(\alpha,n) &= \frac{\mathrm{i}(-1)^\alpha}{(2\pi)^n}\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{k^{n-1}\mathrm{d}k}{(k^2+a^2)^\alpha} \\
&= \frac{\mathrm{i}(-1)^\alpha}{(2\pi)^n}\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{d}t}{(t+a^2)^\alpha} \\
&= \frac{\mathrm{i}(-1)^\alpha}{(2\pi)^n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{(a^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \\
&= \mathrm{i}\frac{(-\pi)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(M^2-p^2+\mathrm{i}\varepsilon)^{\alpha-\frac{n}{2}}}
\end{aligned}
\tag{7-279}
$$

最常见的收敛的 Feynman 积分有 $\alpha=3$:

$$
\begin{aligned}
I_0(3,n) &= \int\frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n}\frac{1}{(k^2+2p\cdot k+M^2+\mathrm{i}\varepsilon)^3} \\
&= \mathrm{i}\frac{(-\pi)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n}\frac{\Gamma\left(3-\dfrac{n}{2}\right)}{\Gamma(3)}\frac{1}{(M^2-p^2+\mathrm{i}\varepsilon)^{3-\frac{n}{2}}}
\end{aligned}
\tag{7-280}
$$

那么当 $n=4$ 时有

$$
\begin{aligned}
I_0(3,4) &= \int\frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2+2p\cdot k+M^2+\mathrm{i}\varepsilon)^3} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{32\pi^2}\frac{1}{M^2-p^2+\mathrm{i}\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{7-281}
$$

(2)

$$
I_\mu(\alpha,n) = \int\frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n}\frac{k_\mu}{(k^2+2p\cdot k+M^2+\mathrm{i}\varepsilon)^\alpha}
\tag{7-282}
$$

和前面一样, 令 $k'=k+p$, 得到

$$
I_\mu(\alpha,n) = \int\frac{\mathrm{d}^n k'}{(2\pi)^n}\frac{k'_\mu-p_\mu}{(k'^2+a^2)^\alpha}
\tag{7-283}
$$

因为积分是关于原点对称的, 所以 k'_μ 的线性项积分是 0. 那么上式的结果就是

$$
I_\mu(\alpha,n) = -p_\mu I_0(\alpha,n)
\tag{7-284}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(\alpha,n) &= \int\frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+2p\cdot k+M^2+\mathrm{i}\varepsilon)^\alpha} \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n}\frac{(k_\mu-p_\mu)(k_\nu-p_\nu)}{(k^2+a^2)^\alpha} \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+a^2)^\alpha}+p_\mu p_\nu\int\frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n}\frac{1}{(k^2+a^2)^\alpha}
\end{aligned}
\tag{7-285}
$$

在第一项中, 可以作代换 $k_\mu k_\nu \longrightarrow \dfrac{1}{n}k^2 g_{\mu\nu}$, 得到

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+a^2)^\alpha} &= \frac{g_{\mu\nu}}{n}\int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n}\frac{k^2}{(k^2+a^2)^\alpha} \\ &= \frac{g_{\mu\nu}}{n}\int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n}\frac{k^2+a^2-a^2}{(k^2+a^2)^\alpha} \\ &= \frac{g_{\mu\nu}}{n}\left[I_0(\alpha-1,n)-a^2 I_0(\alpha,n)\right]\end{aligned} \tag{7-286}$$

利用等式 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, 得到

$$I_0(\alpha-1,n)=\frac{(\alpha-1)a^2}{\alpha-1-\dfrac{n}{2}}I_0(\alpha,n) \tag{7-287}$$

所以有

$$I_{\mu\nu}(\alpha,n)=\left[p_\mu p_\nu+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(M^2-p^2)\frac{1}{\alpha-\dfrac{n}{2}-1}\right]I_0(\alpha,n) \tag{7-288}$$

当 $\alpha=4$ 时, 有

$$\begin{aligned}I_{\mu\nu}(4,n) &= \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+2p\cdot k+M^2+\mathrm{i}\varepsilon)^4} \\ &= \left[p_\mu p_\nu+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(M^2-p^2)\frac{1}{3-\dfrac{n}{2}}\right]I_0(4,n)\end{aligned} \tag{7-289}$$

再令 $n=4$, 得到

$$I_{\mu\nu}(4,4)=\left[p_\mu p_\nu+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(M^2-p^2)\right]\frac{\mathrm{i}}{96\pi^2}\frac{1}{M^2-p^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{7-290}$$

(4)

$$\begin{aligned}I_{\mu\nu\rho}(\alpha,n) &= \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n}\frac{k_\mu k_\nu k_\rho}{(k^2+2p\cdot k+M^2+\mathrm{i}\varepsilon)^\alpha} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^n k'}{(2\pi)^n}\frac{(k'_\mu-p_\mu)(k'_\nu-p_\nu)(k'_\rho-p_\rho)}{(k'^2+a^2)^\alpha}\end{aligned} \tag{7-291}$$

丢掉 k' 的奇次项, 得到

$$\begin{aligned}I_{\mu\nu\rho}(\alpha,n) &= \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n}\frac{1}{(k^2+a^2)^\alpha}\left[-(k_\mu k_\nu p_\rho+k_\mu p_\nu k_\rho+p_\mu k_\nu k_\rho)-p_\mu p_\nu p_\rho\right] \\ &= -p_\mu p_\nu p_\rho I_0(\alpha,n)-(p_\rho I_{\mu\nu}+p_\mu I_{\nu\rho}+p_\nu I_{\mu\rho}) \\ &= -I_0(\alpha,n)\left[4p_\mu p_\nu p_\rho+\frac{1}{2}(g_{\mu\nu}p_\rho+g_{\mu\rho}p_\nu+g_{\nu\rho}p_\mu)\frac{M^2-p^2}{\alpha-\dfrac{n}{2}-1}\right]\end{aligned}$$

第 8 章　整体与局域对称性

在高能物理的理论框架的构建中, 对称性有至关重要的作用. 起初, 我们只了解电磁相互作用, 并不知道其他各种相互作用的机制. 整体对称性 (global symmetry) 可被用来联系有相似性质的粒子. 另外, 它也是理解守恒律的基础. 上述这些关系都是静态的约束, 并不能告诉我们粒子之间是如何进行相互作用的. 后来, 局域对称性 (local symmetry) 的理论被发展出来, 作为基本原理来确定粒子之间如何进行相互作用. 这为我们理解各种相互作用的本质提供了非常有价值的信息. 到目前为止, 大部分已知的相互作用, 包括电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用, 都是基于某种形式的局域对称性的理论来构建的, 如 $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$.

8.1　整体对称性

首先讨论具有整体对称性的理论. 整体对称性的变换参数与时空坐标无关. 许多精确的或近似的守恒律, 如重子数守恒、轻子数守恒等, 都可用这种对称性来描述. 我们将在实例中讨论这种对称性, 借此来说明一些重要特征. 描述对称性的一个重要工具是群论, 在附录中对它会有一个回顾.

8.1.1　Abel 对称性

例 8-1　具有 $O(2)$ 对称性的相互作用标量场.

考虑如下拉氏量

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi_1)^2+(\partial_\mu\phi_2)^2\right]-\frac{\mu^2}{2}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)-\frac{\lambda}{4}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)^2 \tag{8-1}$$

它在 (ϕ_1,ϕ_2) 平面中的旋转变换下是不变的, 即具有 $O(2)$ 对称性:

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\phi_1'\\ \phi_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \tag{8-2}$$

其中 θ 与坐标 x^μ 无关, 在每一个时空点旋转的角度都相同, 因此上述变换称为**整体变换**(global transformation). 注意, 这个对称性是由于在拉氏量中, 场只以组合 $\phi_1^2+\phi_2^2$ 的形式出现. 这是可以构造出来的唯一一种 $O(2)$ 不变的组合, 有如下性质.

(1) 质量简并. 这里 ϕ_1^2, ϕ_2^2 的系数, 也就是粒子质量, 是相同的. 这个性质是很容易用实验来验证的. 反过来说, 在任何时候, 只要有某些粒子被观测到拥有相同或大致相同的质量, 就可以用整体对称性或近似的整体对称性来描述这些特征.

(2) 耦合常数之间的关联. 一般来说, 四次项 $\phi_1^4, \phi_2^4, \phi_1^2\phi_2^2$ 可以有不同的系数. 而对称性则使它们产生联系, 来形成 $\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)^2$ 这样的组合.

这些都是由拉氏量的对称性所产生的典型的结果, 也就是说, 对称性会使得拉氏量中参数的数目减少. 反过来, 如果实验中观测到质量简并或不同的耦合常数之间发生关联, 我们可以尝试去找某种对称性来解释这种关系. 实际上, 这种质量简并或近似简并在实验上也是比较容易观测到.

现在来讨论对称性的理论其他的一些有趣的性质. 正如我们先前谈到过的, 通过 Noether 定理, 对称性和守恒律密切相关. 为了找到 Noether 流, 作无穷小变换, 取 $\theta \ll 1$, 则

$$\delta\phi_1=-\theta\phi_2, \quad \delta\phi_2=\theta\phi_1 \tag{8-3}$$

守恒流满足下式

$$\theta J_\mu \sim \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\delta\phi_i=-\theta\left[\left(\partial_\mu\phi_1\right)\phi_2-\left(\partial_\mu\phi_2\right)\phi_1\right] \tag{8-4}$$

以及

$$\partial_\mu J^\mu=0 \tag{8-5}$$

守恒荷定义为

$$Q=\int \mathrm{d}^3x J^0=-\mathrm{i}\int\left[\left(\partial_0\phi_1\right)\phi_2-\left(\partial_0\phi_2\right)\phi_1\right]\mathrm{d}^3x \tag{8-6}$$

满足守恒律

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\int \mathrm{d}^3x\frac{\partial J^0}{\partial t}=-\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}=-\int \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J}=0 \tag{8-7}$$

可以计算出守恒荷与场算符的对易关系为

$$\begin{aligned}\left[Q,\phi_1(x)\right]&=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3y\left[\left(\partial_0\phi_1(y)\right)\phi_2(y)-\left(\partial_0\phi_2(y)\right)\phi_1(y),\ \phi_1(x)\right]\\&=-\int \mathrm{d}^3y\phi_2(y)\,\delta^3(x-y)=-\phi_2(x)\end{aligned}$$

这里所使用的是正则对易式

$$\left[\partial_0\phi_i(y),\phi_j(x)\right]_{x_0=y_0}=-\mathrm{i}\delta_{ij}\delta^3(x-y) \tag{8-8}$$

注意, 在上面的推导中令时间分量 $y_0=x_0$, 这是因为 Q 守恒, 与时间无关. 同理, 有

$$\left[Q,\phi_2(x)\right]=\phi_1(x) \tag{8-9}$$

我们看到这些对易关系与式 (8-3) 中的对称变换相对应, 即

$$\delta\phi_1(x) = [Q, \phi_1(x)] = -\phi_2(x), \quad \delta\phi_2(x) = [Q, \phi_2(x)] = \phi_1(x) \tag{8-10}$$

这是对称性理论的一个普遍特征 —— 守恒荷与场的对易关系给出场在无穷小对称变换下的变化量.

这里顺便指出, 在对包含对称性的理论进行重整化时, 显然抵消项也应当遵守这个对称性. 例如, 在式 (8-1) 给出的例子中, 抵消项应该有如下形式

$$\Delta\mathcal{L} = A\left[(\partial_\mu\phi_1)^2 + (\partial_\mu\phi_2)^2\right] - B\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - C\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 \tag{8-11}$$

也就是说, $O(2)$ 对称性要求 ϕ_1^2 和 ϕ_2^2 的抵消项也有相同的系数. 同样地, $(\partial_\mu\phi_1)^2$, $(\partial_\mu\phi_2)^2$ 等的抵消项也应如此.

另外一个描述这种对称性的方法是, 将标量场 ϕ_1 和 ϕ_2 合为一体, 成为一个复数场

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) \tag{8-12}$$

拉氏量变成

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda\left(\phi^\dagger\phi\right)^2 \tag{8-13}$$

此时, 对称变换就是一个相位的变换

$$\phi \longrightarrow \phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\phi \tag{8-14}$$

这就是 $U(1)$ 对称性. 此时 Noether 流是

$$j_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)}\delta\phi^\dagger = \mathrm{i}\left[\left(\partial_\mu\phi^\dagger\right)\phi - (\partial_\mu\phi)\phi^\dagger\right] \tag{8-15}$$

因而电荷守恒就是一个可以用 $U(1)$ 对称性来描述的例子.

我们很容易就可以将拉氏量推广到具有 $O(n)$ 对称性的情况

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi_1)^2 + \cdots + (\partial_\mu\phi_n)^2\right] - \frac{\mu^2}{2}\left(\phi_1^2 + \cdots + \phi_n^2\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\phi_1^2 + \cdots + \phi_n^2\right)^2 \tag{8-16}$$

可以简写成

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i - \frac{\mu^2}{2}\phi_i\phi_i - \frac{\lambda}{4}(\phi_i\phi_i)^2 \tag{8-17}$$

它在如下的 $O(n)$ 旋转变换中保持不变

$$\phi_i \longrightarrow \phi_i' = R_{ij}\phi_j, \quad R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk}, \quad R_{ij}R_{kj} = \delta_{ik} \tag{8-18}$$

对于无穷小变换有

$$R_{ij} \approx \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad |\varepsilon_{ij}| \ll 1 \tag{8-19}$$

由 R_{ij} 的正交性可得

$$\delta_{jk} = (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij})(\delta_{ik} + \varepsilon_{ik}) = \delta_{jk} + \varepsilon_{kj} + \varepsilon_{jk} \tag{8-20}$$

因此

$$\varepsilon_{kj} = -\varepsilon_{jk} \tag{8-21}$$

Noether 流可以写成

$$\varepsilon_{ij} j_{\mu ij} = (\partial_\mu \phi_i)\, \varepsilon_{ij} \phi_j \tag{8-22}$$

或者是

$$j_{\mu ij} = \frac{\mathrm{i}}{2}[(\partial_\mu \phi_i)\, \phi_j - (\partial_\mu \phi_j)\, \phi_i] \tag{8-23}$$

注意, n 维空间中的旋转应当定义在某个面内, 而不是围绕某个轴. 正如上文中所述, 旋转变换用两个指标 i, j 来表征, 表示旋转所在的平面. 而在 $n=3$ 的情形, 平面与垂直于它的轴之间正好有一一对应, 因而用轴来描述旋转会更方便. 所以可将三维情形下的守恒流重新定义为

$$j_{\mu k} = \varepsilon_{ijk} j_{\mu ij} \tag{8-24}$$

对应的守恒荷为

$$J_k = \int \mathrm{d}^3 x j_{0k} \tag{8-25}$$

这就是角动量算符. 这是三维空间所特有的. 在一般的空间中, 无穷小旋转则对应一个二阶张量

$$J_{ij} = \int \mathrm{d}^3 x j_{0ij} \tag{8-26}$$

例 8-2 Yukawa 相互作用 —— 标量场与费米场.

Yukawa 作用的拉氏量为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 + g\bar{\psi}\gamma_5 \psi \phi \tag{8-27}$$

耦合项中有个 γ_5 是因为, 假设 ϕ 是像 π 介子那样的赝标量. 这个拉氏量在如下 $U(1)$ 变换下保持不变

$$\psi \to \psi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi, \quad \phi \to \phi' = \phi \tag{8-28}$$

对应的 Noether 流和守恒荷分别是

$$j_\mu \sim \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^\dagger)}\delta\psi^\dagger \sim \bar{\psi}\gamma_\mu \psi \tag{8-29}$$

$$Q = \int \mathrm{d}^3 x \; j_0(x) = \int \mathrm{d}^3 x \psi^\dagger \psi \tag{8-30}$$

而守恒荷正是费米子数算符. 它与场算符的对易关系是

$$[Q, \psi(x)] = \int \mathrm{d}^3 y [\psi^\dagger(y)\psi(y), \psi(x)]_{x_0 = y_0} = -\psi(x) \tag{8-31}$$

这里使用了等式

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\} B \tag{8-32}$$

同理,

$$\left[Q, \psi^\dagger(x)\right]_{x_0 = y_0} = \psi^\dagger(x) \tag{8-33}$$

注意, 如果有两个这样的费米子 ψ_1, ψ_2, 遵循相同的变换, 那么 Yukawa 作用变成

$$\mathcal{L}_Y = g_1 \bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_1 \phi + g_2 \bar{\psi}_2 \gamma_5 \psi_2 \phi \tag{8-34}$$

这样就有了两个独立的耦合常数 g_1, g_2, 每个费米子一个. 也就是说, 不同的 Yukawa 耦合之间没有任何关系, 只要它们自身都满足对称性的要求. 相反地, 正如我们稍后会讨论到的, 规范玻色子与其他粒子的耦合都是用同一个常数来描述的. 这一性质有时被称为规范耦合的普遍性 (universality).

从重整化的观点, 也可以论述这两个 Yukawa 耦合是相互独立的. 因为 ψ_1 与 ψ_2 之间没有联系, 所以 $\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_1\phi$ 和 $\bar{\psi}_2\gamma_5\psi_2\phi$ 的抵消项的系数一般来说是不同的. 因此需要两个不同的耦合常数 g_1 和 g_2 来吸收发散量. 换句话说, 不能在令 $g_1 = g_2$ 的同时还保持它的可重整化.

8.1.2 非 Abel 对称性

例 8-3 整体的非 Abel 对称性.

现在我们来研究一下推广到非 Abel 对称性的情况. 考虑一个简单的情形, 即有一个 $SU(2)$ 变换的二重态 ψ 和一个单态 ϕ:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{8-35}$$

在 $SU(2)$ 变换下有

$$\psi \to \psi' = \exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{2}\right)\right]\psi, \quad \phi \to \phi' = \phi \tag{8-36}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是实参数, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ 是标准的 Pauli 矩阵. 拉氏量

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 + g\bar{\psi}\psi\phi \tag{8-37}$$

是 $SU(2)$ 不变的. 为了验证这一点, 得到 $\psi^\dagger$ 按下式变换

$$\psi^\dagger \longrightarrow \psi^{\dagger\prime} = \psi^\dagger \exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{2}\right)\right] \tag{8-38}$$

由此可以得到

$$\bar{\psi}\psi \longrightarrow \bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{2}\right)\right]\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{2}\right)\right]\psi = \bar{\psi}\psi \tag{8-39}$$

$$\bar{\psi}'(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu)\psi' = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu)\psi \tag{8-40}$$

另外, 式 (8-37) 的拉氏量也可以由例 8-2 最后提到的两个费米子的情形得到, 只要将质量 m_1, m_2 和耦合参数 g_1, g_2 设为相等.

此时的 Noether 流和守恒荷分别是

$$\boldsymbol{J}_\mu = \bar{\psi}(\gamma_\mu\frac{\boldsymbol{\tau}}{2})\psi \tag{8-41}$$

$$Q^i = \int \mathrm{d}^3x\ \psi^\dagger(\frac{\tau_i}{2})\psi \tag{8-42}$$

守恒荷与场的对易关系是

$$\left[Q^i, \psi\left(x\right)\right] = \int \mathrm{d}^3y[\psi^\dagger\left(y\right)(\frac{\tau_i}{2})\psi\left(y\right),\ \psi\left(x\right)]_{x_0=y_0} = -\frac{\tau_i}{2}\psi\left(x\right) \tag{8-43}$$

以及

$$\left[Q^i, \psi^\dagger\left(x\right)\right] = \psi^\dagger\left(x\right)\frac{\tau_i}{2} \tag{8-44}$$

同样地, 这些对易子也重现出了费米场在对称变换下的变换性质. 现在有不止一个荷, 可以计算一下这些荷的对易关系

$$\begin{aligned}\left[Q^i, Q^j\right] &= \int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y[\ \psi^\dagger\left(x\right)\frac{\tau_i}{2}\psi\left(x\right),\ \ \psi^\dagger\left(y\right)\frac{\tau_j}{2}\psi\left(y\right)]_{x_0=y_0} \\ &= \int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\ \delta^3\left(x-y\right)\left[\psi^\dagger\left(x\right)\frac{\tau_i}{2}\frac{\tau_j}{2}\psi\left(y\right) - \psi^\dagger\left(y\right)\frac{\tau_j}{2}\frac{\tau_i}{2}\psi\left(x\right)\right] \\ &= \int \mathrm{d}^3x\psi^\dagger\left(x\right)\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}\right]\psi\left(x\right) = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}Q^k\end{aligned}$$

这正是 $SU(2)$ 代数. 这里使用了等式

$$[AB, CD] = A\left\{B, C\right\}D - C\left\{A, D\right\}B, \quad \text{如果}\left\{A, C\right\} = \left\{B, D\right\} = 0 \tag{8-45}$$

我们看到守恒荷的对易关系重现了对称群的代数, 这也是一个普遍的规律.

可以将这个理论推广到标量场是一个三重态 $\boldsymbol{\phi}$ 的情况, 它以 $SU(2)$ 群三维表示的形式变换. 为了方便起见, 可以用旋转群 $R(3)$ 来描述 $\boldsymbol{\phi}$ 的变换

$$\phi_i \longrightarrow \phi_i' = R_{ij}\phi_j, \quad RR^{\mathrm{T}} = R^{\mathrm{T}}R = 1 \tag{8-46}$$

考虑无穷小变换

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji} \tag{8-47}$$

则有

$$\phi_i' = \phi_i + \varepsilon_{ij}\phi_j = \phi_i + \varepsilon_{ijk}\alpha_k\phi_k, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ijk}\alpha_k \tag{8-48}$$

或

$$\boldsymbol{\phi} \to \boldsymbol{\phi}' = \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\phi} \tag{8-49}$$

现在我们来证明, 这样的项

$$\bar{\psi}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi}\psi \tag{8-50}$$

在 $R(3)$ 旋转变换下是不变的

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi}\psi \to \bar{\psi}\left(1 + i\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{2}\right)\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\phi})\left(1 - i\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{2}\right)\psi \\ = \bar{\psi}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}(i[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}] + 2\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\phi})\psi\end{aligned}$$

由 Pauli 矩阵的对易关系

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\left(\frac{\sigma_k}{2}\right) \tag{8-51}$$

得到

$$i[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}] + 2\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\phi} = -2\varepsilon_{ijk}\alpha_i\phi_j\sigma_k + 2\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\phi} = 0 \tag{8-52}$$

因此 $\bar{\psi}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}\psi$ 在 $R(3)$ 或 $SU(2)$ 旋转变换下保持不变. $R(3)$ 或 $SU(2)$ 变换不变的拉氏量是

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{\phi})^2 - \frac{\mu^2}{2}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi} - \frac{\lambda}{4}(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi})^2 + g\bar{\psi}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}\psi \tag{8-53}$$

可以看到 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 和 ψ_1, ψ_2 的耦合都被对称性联系起来了.

8.1.3 对称性破缺和重整化

事实上, 大部分整体对称性都有轻微的破缺, 并不是绝对的对称不变. 例如, 我们一开始就知道强相互作用的同位旋对称性是破缺的. 为了容纳对称性破缺的效应, 可以直接在拉氏量中引入一些耦合常数很小的破坏对称性的项. 比如, 在式 (8-53) 的拉氏量中, 可以引入一个对称性破缺的项

$$\mathcal{L}_{SB} = f\left(\phi_1^2 - \phi_2^2\right) \tag{8-54}$$

使得 ϕ_1 和 ϕ_2 有不同的质量, 对称性被明显地破缺.

既然拉氏量的对称性被破坏了, 那么抵消项也不再满足对称性. 这是否意味着为了吸收所有可能的对称性破缺的抵消项, 需要在拉氏量中引入所有可能的对称性破缺项? 实际情况比我们设想的要简单一些. 在前面我们讨论过, 抵消项 δ_{ct} 的发散指数满足关系式

$$\delta_{ct} \leqslant \sum_i n_i \delta_i \tag{8-55}$$

其中, δ_i 是相互作用项 $\mathcal{L}_i$ 的发散指数, n_i 是 $\mathcal{L}_i$ 对应的顶点在某个图中出现的次数. 显然对称性破缺的抵消项 $\Delta\mathcal{L}_{SB}$ 来自于包含 $\mathcal{L}_{SB}$ 的图. 设 $\delta_{ct}(SB), \delta(SB)$ 分别是抵消项和 $\mathcal{L}_{SB}$ 的发散指数. 假定所有保持对称性的相互作用都有 $\delta_i = 0$, 这样就有

$$\delta_{ct}(SB) \leqslant n\delta\,(SB) \tag{8-56}$$

对于式 (8-54) 给出的对称性破缺的相互作用, 它的量纲是 2, $\delta(SB) = -2$, 得到

$$\delta_{ct}(SB) \leqslant -2n \tag{8-57}$$

因此 $\delta_{ct}(SB)$ 最多等于 -2, 和式 (8-54) 中的形式相同. 这意味着没有必要增加除式 (8-54) 以外的任何其他相互作用.

这个简单的例子说明了一个普遍的性质 —— 如果对称性破缺是来自于某个量纲小于 4 的算符, 那么只需要包含量纲相同或者更小的相互作用. 这种由量纲小于 4 的算符引起的对称性破缺通常称为软破缺 (soft breaking).

8.2 局域对称性

局域对称性是指对称变换的参数依赖于时空坐标 x^μ 的对称性. 换句话说, 可以在不同的时空点 x_μ 进行不同的对称变换. 局域对称性在建构描述自然界基本相互作用的理论中扮演非常重要的角色. 比如, 强相互作用就是被一个基于 $SU(3)$ 局域对称性的理论所描述, 而描述弱相互作用的理论则基于局域的 $SU(2)\times U(1)$ 对称群. 在后面的章节对它们会有详细的讨论.

8.2.1 电磁相互作用的局域对称性

局域对称性起源于电磁相互作用, 在 Maxwell 方程中有很好的描述

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, && \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \\ &\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, && \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \end{aligned}$$

通常引入标势 ϕ 和矢势 $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{8-58}$$

来解 Maxwell 方程。这样的解并不是唯一的, 因为可以作一个**规范变换**

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\alpha \tag{8-59}$$

而得到相同的电磁场

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\alpha) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \tag{8-60}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}' &= -\boldsymbol{\nabla}\phi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\left(\phi - \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\alpha) \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{E} \end{aligned}$$

上面的这个规范变换可以用 4 矢量的形式写成

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu - \partial^\mu \alpha, \quad A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A}), \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = (\partial_t, -\boldsymbol{\nabla}) \tag{8-61}$$

现在我们在量子力学的框架中讨论带电粒子在电磁场中的运动. 我们会证明, 此时 Schrödinger 方程的形式是

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{A}\right)^2 - e\phi\right]\psi = \mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{8-62}$$

其中已经令 $\hbar = 1$. 为了得到量子力学的描述, 首先证明由如下的拉氏量

$$L = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + e\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} - eA_0 \tag{8-63}$$

会得到正确的运动方程. 从 Euler-Lagrange 运动方程出发

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} \tag{8-64}$$

计算出各种偏导数

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = e\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i} \cdot \boldsymbol{v} - e\frac{\partial A_0}{\partial x_i} \tag{8-65}$$

以及

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i + eA_i \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) = m\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} + e\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial x_j}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) \tag{8-66}$$

代入 Euler-Lagrange 方程得到

$$m\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = -e\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\ \frac{\partial x_j}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + e\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{v} - e\frac{\partial A_0}{\partial x_i}$$
$$= e[E_i + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_i]$$

利用

$$E_i = -\frac{\partial A_0}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \tag{8-67}$$

和

$$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_i = \varepsilon_{ijk}v_jB_k = \varepsilon_{ijk}v_j\varepsilon_{klm}\partial_l A_m = (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})v_j\partial_l A_m = (v_j\partial_i A_j - v_j\partial_j A_i) \tag{8-68}$$

可以将上式写成

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = e[\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})] \tag{8-69}$$

这表示式 (8-63) 中的拉氏量会给出带电粒子在电磁场中正确的运动方程.

在规范变换

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\alpha, \quad A_0 \to A_0' = A_0 + \frac{\partial A_0}{\partial t} \tag{8-70}$$

下, 得到

$$L' = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + e\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{v} - eA_0'$$
$$= \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + e(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\alpha)\cdot\boldsymbol{v} - e\left(A_0 + \frac{\partial A_0}{\partial t}\right)$$
$$= L + e\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$

拉氏量变化了一个全微商, 而作用量则不会改变.

共轭动量是

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} = mv_i + eA_i \tag{8-71}$$

可以得到哈密顿量

$$H = \boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{v} - L = \boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{v} - \left[\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} - eA_0\right]$$
$$= \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + eA_0$$

用 π_i 代替 v_i, 则有

$$mv_i = \pi_i - eA_i \tag{8-72}$$

得到哈密顿量的形式为

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{\pi} - e\boldsymbol{A})^2 + eA_0 \tag{8-73}$$

因此, Schrödinger 方程就是

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{A}\right)^2 - e\phi\right]\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{8-74}$$

注意, 这里是电磁势 $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$ 在决定量子行为, 而不是电磁场. 那么电磁势 A^μ 的规范依赖将会使得 Schrödinger 方程的解与规范有关, 这显然是不合理的. 但是, 如果我们在电磁势作规范变换的同时也对波函数作一个局域变换:

$$\psi \longrightarrow \psi' = \exp\left[\mathrm{i}e\alpha\left(x\right)\right]\psi \tag{8-75}$$

那么就可以得到相同的 Schrödinger 方程和相同的物理. 这可由如下推导看出

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{A}'\right)\psi' &= \left[\frac{1}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla} - e(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\alpha)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}e\alpha}\psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}e\alpha}\left[\frac{1}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla} - \boldsymbol{\nabla}\alpha - e(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\alpha)\right]\psi \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}e\alpha}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{A}\right)\psi\end{aligned}$$

因此 $(\boldsymbol{\nabla} - \mathrm{i}e\boldsymbol{A})\psi$ 组合称为**协变微商**(covariant derivative), 与 ψ 以相同的方式变换. 同理, 再来一个协变微商也会以相同的方式变换, 即

$$\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{A}'\right)^2\psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}e\alpha}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{A}\right)^2\psi \tag{8-76}$$

同样对于时间微商, 得到

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} + e\phi'\right)\psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}e\alpha}\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} + e\frac{\partial\alpha}{\partial t} + e\phi - e\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}e\alpha}\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)\psi \tag{8-77}$$

消掉等式两边的相位, 就得到原来的 Schrödinger 方程和相同的物理.

这就是规范理论的出发点. 它的对称变换参数 $\alpha(x)$ 与时空有关, 通常被称为局域的对称变换. 这样, 规范变换就与 (局域的)**对称变换**相联系. 组合 $(\boldsymbol{\nabla} - \mathrm{i}e\boldsymbol{A})\psi$, $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \mathrm{i}e\phi\right)\psi$ 与波函数 ψ 一样改变一个相位, 通常被称为协变微商.

我们现在想要将这种局域对称性推广到场论中. 结果表明, 局域的 Abel 对称性和非 Abel 对称性非常不同, 将分别讨论它们.

8.2.2 Abel 局域对称性

这里 (将局域对称性推广到场论) 的策略是从整体对称性出发, 然后引入规范场来构成协变微商. 从 Abel 对称性入手. 首先写下有 $U(1)$ 对称性, 即相位变换对称的拉氏量

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial^\mu\phi) + \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda\left(\phi^\dagger\phi\right)^2 \tag{8-78}$$

$$\phi \longrightarrow \phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}g\alpha}\phi \tag{8-79}$$

其中, α 是与时空坐标 x_μ 无关的常数, 因此这是个整体的变换.

现在假设相位变换与时空坐标 x^μ 有关

$$\phi \to \phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}g\alpha(x)}\phi \tag{8-80}$$

不含导数的项依然保持不变, 但是导数项却变换为

$$\partial^\mu\phi \to \partial^\mu\phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(x)}\left[\partial^\mu\phi - \mathrm{i}g\left(\partial^\mu\alpha\right)\phi\right] \tag{8-81}$$

因而这不是一个对称变换. 类比于 Maxwell 理论, 引入规范场 A^μ, 按如下方式变换

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\alpha \tag{8-82}$$

来构成协变微商的组合

$$D^\mu\phi \equiv \left(\partial^\mu - \mathrm{i}gA^\mu\right)\phi \tag{8-83}$$

协变微商按与场相同的方式来变换

$$\begin{aligned}(D^\mu\phi)' =& \left(\partial^\mu - \mathrm{i}gA'^\mu\right)\phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}g\alpha(x)}[\partial_\mu - \mathrm{i}g\partial_\mu\alpha - \mathrm{i}g\left(A^\mu - \partial^\mu\alpha\right)]\phi \\ =& \mathrm{e}^{-\mathrm{i}g\alpha(x)}\left(\partial^\mu - \mathrm{i}gA^\mu\right)\phi\end{aligned} \tag{8-84}$$

于是组合

$$(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) \tag{8-85}$$

在局域的相位变换下保持不变.

为了描述规范场的传播, 需要构造包含规范场微商的项, 且它在局域对称变换下要有简单的变换性质. 而协变微商的局域对称变换就比较简单, 所以可以用它来为规范场构造一个反对称张量, 即

$$\left(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu\right)\phi = gF_{\mu\nu}\phi, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{8-86}$$

更明确地讲,

$$D_\mu D_\nu\phi = (\partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu)(\partial_\nu - \mathrm{i}gA_\nu)\phi = [\partial_\mu\partial_\nu - \mathrm{i}g(A_\mu\partial_\nu + A_\nu\partial_\mu) - \mathrm{i}g\left(\partial_\mu A_\nu\right) - g^2A_\mu A_\nu]\phi \tag{8-87}$$

反对称化得到

$$\left(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu\right)\phi = -\mathrm{i}g\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) \tag{8-88}$$

于是

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{8-89}$$

根据协变微商的性质可以看到

$$\left(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu\right)\phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}g\alpha(x)}\left(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu\right)\phi \tag{8-90}$$

即

$$gF'_{\mu\nu}\phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}g\alpha(x)}gF_{\mu\nu}\phi \tag{8-91}$$

所以

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \tag{8-92}$$

现在我们可以写下描述标量场与规范场相互作用的完整的拉氏量

$$\mathcal{L}=(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\phi) \tag{8-93}$$

这里的 $V(\phi)$ 不包含 ϕ 的微商. 这个拉氏量在如下局域对称变换下保持不变

$$\phi \longrightarrow \phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}g\alpha(x)}\phi, \quad A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\alpha \tag{8-94}$$

可以看到局域对称性的理论有这样两个特点:

(1) 质量项 $A^\mu A_\mu$ 不是规范不变的. 因此规范场对应一个无质量粒子, 传播的是长程力. 这一特点使得我们很难将这种理论应用于现实世界. 因为除了量子电动力学中有无质量的光子外, 没有其他无质量的粒子.

(2) 规范场与其他场的耦合通过协变微商来实现, 由同一个耦合常数所控制. 这就导致了这样一个特点, 即所有的规范相互作用都是同一个强度 —— 普遍性 (universality).

8.2.3 非 Abel 对称性——Yang-Mills 场

1954 年, 杨振宁和 R. Mills 将 Maxwell 理论中 Abel 的 $U(1)$ 局域对称性推广为同位旋的非 Abel 的 $SU(2)$ 局域对称性 [12], 得到的理论与 Abel 的情形有很大的不同. 为了说明这一点, 我们考虑一个 $SU(2)$ 的二重态 $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$. 在 $SU(2)$ 变换下, 有

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}}{2}\right\}\psi(x) \tag{8-95}$$

其中, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ 是 Pauli 矩阵,

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8-96}$$

于是有

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}\right] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\frac{\tau_k}{2} \tag{8-97}$$

首先写下自由场拉氏量

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \tag{8-98}$$

它在整体 $SU(2)$ 变换下保持不变. 此时参数 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 与坐标 x_μ 无关. 对于局域对称变换, 则有

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = U(\theta)\psi(x) , \qquad U(\theta) = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}(x)}{2}\right\} \tag{8-99}$$

同样地, 导数项有

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow \partial_\mu\psi'(x) = U\partial_\mu\psi + (\partial_\mu U)\psi \tag{8-100}$$

不是简单的变换形式. 引入规范场 $\boldsymbol{A}_\mu$ 来构造协变微商

$$D_\mu\psi(x) \equiv \left(\partial_\mu - \mathrm{i}g\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu}{2}\right)\psi \tag{8-101}$$

并要求它和 ψ 遵循相同的变换, 即

$$(D_\mu\psi)' = U(D_\mu\psi) \tag{8-102}$$

这决定了规范场 $\boldsymbol{A}_\mu$ 的变换性质

$$\left(\partial_\mu - \mathrm{i}g\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu{}'}{2}\right)(U\psi) = U\left(\partial_\mu - \mathrm{i}g\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu}{2}\right)\psi \tag{8-103}$$

由此得到规范场的变换为

$$\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}'_\mu}{2} = U\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu}{2}\right)U^{-1} - \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \tag{8-104}$$

可以使用协变微商来构造场张量. 有两个协变微商的项可写为

$$\begin{aligned}
D_\mu D_\nu\psi =& \left(\partial_\mu - \mathrm{i}g\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu}{2}\right)\left(\partial_\nu - \mathrm{i}g\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\nu}{2}\right)\psi \\
=&\partial_\mu\partial_\nu\psi - \mathrm{i}g\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu}{2}\partial_\nu\psi + \frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\nu}{2}\partial_\mu\psi\right) \\
&- \mathrm{i}g\partial_\mu\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\nu}{2}\right)\psi + (-\mathrm{i}g)^2\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu}{2}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\nu}{2}\right)\psi
\end{aligned} \tag{8-105}$$

将指标取反, 得到反对称的场张量

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi \equiv \mathrm{i}g\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu}}{2}\right)\psi \tag{8-106}$$

那么

$$\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu}}{2} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot(\partial_\mu\boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu\boldsymbol{A}_\mu) - \mathrm{i}g\left[\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu}{2}, \frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\nu}{2}\right] \tag{8-107}$$

写成分量形式为

$$F_{\mu\nu}^{i}=\partial_{\mu}A_{\nu}^{i}-\partial_{\nu}A_{\mu}^{i}+g\epsilon^{ijk}A_{\mu}^{i}A_{\nu}^{k} \tag{8-108}$$

A 的二次项是在非 Abel 对称中新的项, 这是非 Abel 对称与 Abel 对称最大的不同. 在规范变换下, 有

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu}^{\prime}=U(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu})U^{-1} \tag{8-109}$$

我们看到, 由式 (8-104) 和式 (8-107) 给出的规范场和对应的场强张量的变换性质似乎是与式 (8-99) 中的物质场表示矩阵 τ 矩阵有关的. 我们现在来说明规范场和场强张量的变换性质与使用的物质场无关. 假设我们使用某些其他的物质场, 表示矩阵为 $\boldsymbol{t}$, 则

$$\psi(x)\rightarrow\psi^{\prime}(x)=V(\theta)\psi(x)\ ,\quad V(\theta)=\exp\left\{-\frac{i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\theta}(x)}{2}\right\} \tag{8-110}$$

其中有

$$\left[\frac{t_i}{2},\frac{t_j}{2}\right]=\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\left(\frac{t_k}{2}\right) \tag{8-111}$$

那么它的协变微分就是

$$D_{\mu}\psi(x)\equiv\left(\partial_{\mu}-\mathrm{i}g\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{A}_{\mu}}{2}\right)\psi \tag{8-112}$$

重复同样的计算可以得到规范场的变换为

$$\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{A}_{\mu}^{\prime}}{2}=V\left(\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{A}_{\mu}}{2}\right)V^{-1}-\frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_{\mu}V)V^{-1} \tag{8-113}$$

考虑无穷小变换, 即 $\theta(x)\ll 1$, 则有

$$V(\theta)\approx 1-\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\theta}(x)}{2} \tag{8-114}$$

那么

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{A}_{\mu}^{\prime}}{2}&\approx\left(1-\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\theta}(x)}{2}\right)\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{A}_{\mu}}{2}\left(1+\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\theta}(x)}{2}\right)-\frac{\mathrm{i}}{g}\left(-\mathrm{i}\right)\left[\frac{\boldsymbol{t}\cdot\partial_{\mu}\boldsymbol{\theta}(x)}{2}\right]\left(1+\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\theta}(x)}{2}\right)\\&=\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{A}_{\mu}}{2}-\mathrm{i}\left[\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\theta}(x)}{2},\ \frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{A}_{\mu}}{2}\right]-\frac{1}{g}\left[\frac{\boldsymbol{t}\cdot\partial_{\mu}\boldsymbol{\theta}(x)}{2}\right]\\&=\frac{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{A}_{\mu}}{2}+\varepsilon_{ijk}\theta_{j}A_{\mu k}t_{i}\frac{1}{2}-\frac{1}{g}\frac{\boldsymbol{t}\cdot\partial_{\mu}\boldsymbol{\theta}(x)}{2}\end{aligned}$$

即

$$A_{i\mu}^{\prime}=A_{i\mu}+\varepsilon_{ijk}\theta_{j}A_{\mu k}-\frac{1}{g}\partial_{\mu}\theta_{i} \tag{8-115}$$

在这种形式下, 可以明显地看出来, 规范场的变换律不依赖于所使用的物质场. 同样地, 也能得到场强张量的无穷小变换是

$$F'^{i}_{\mu\nu} = F^i_{\mu\nu} + \epsilon^{ijk}\theta^j F^k_{\mu\nu} \tag{8-116}$$

非 Abel 局域对称性理论的完整拉氏量是

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} + \bar{\psi}(x)(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \tag{8-117}$$

其中

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\epsilon^{ijk}A^i_\mu A^k_\nu, \quad D_\mu\psi \equiv \left(\partial_\mu - \mathrm{i}g\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu}{2}\right)\psi \tag{8-118}$$

它在如下局域对称变换下保持不变

$$A^i_\mu \longrightarrow A^{i\,\prime}_\mu = A^i_\mu + \epsilon^{ijk}\theta^j A^k_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^i, \quad \psi(x) \to \psi'(x) = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}}{2}\right\}\psi(x) \tag{8-119}$$

现在对上面的推导作如下总结.

(1) 和 Abel 对称一样, $A^a_\mu A^{a\mu}$ 不是规范不变的, 规范玻色子质量为零, 传播长程力. 这与实验现象不相符, 因为除了电磁作用, 没有其他的长程力了.

(2) 光子不带电荷. 而规范玻色子 A^a_μ 不像光子, 它携带守恒荷 ——$SU(2)$ 荷.

(3) 场强张量 $F^{a\mu\nu} \sim \partial A - \partial A + gAA$ 中的二次项只存在于非 Abel 对称性中. 这一特征会带来非常特殊的性质, 如渐近自由.

(4) 通过如下步骤, 可以将这个理论推广到除 $SU(2)$ 之外的其他对称群 G 中.

(a) 写出有整体对称性的拉氏量.

(b) 用协变微商 $D_\mu\phi \sim \left(\partial_\mu - \mathrm{i}gA^a_\mu T^a\right)\phi$ 代替通常的微商项 $\partial_\mu\phi$, 其中 A^a_μ 是规范场, $a = 1, 2, \cdots, n$, n 是生成元的总数. T^a 是 ϕ 所属的群表示矩阵, 满足李代数

$$\left[T^a, T^b\right] = \mathrm{i}f^{abc}T^c, \quad f^{abc} \text{ 为群 } G \text{ 的结构常数} \tag{8-120}$$

(c) 用反对称的组合 $(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\phi \sim F^a_{\mu\nu}\phi$ 来构造场强张量 $F^a_{\mu\nu}$, 得到的形式是

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu, \tag{8-121}$$

(d) 总的拉氏量形式是

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\phi D^\mu\phi + V(\phi) \tag{8-122}$$

其中, $V(\phi)$ 是场 ϕ 的整体对称不变的函数, 不包含任何微商.

8.3 规范理论的路径积分量子化

规范理论的正则量子化是相当困难的, 因为规范不变性意味着不是规范场的所有分量都是真正的物理自由度. 比如, 在 Maxwell 理论中, 电磁场由四分量的矢势 A_μ 来描述. 但是根据电磁波的传播可知, 它只有两个真实的自由度, 即两个横向极化. 没有好的方法可以帮我们选择某种特殊规范, 来消除足够多的分量而只留下物理的自由度. 而且, 在这个过程中还需要考虑 Lorentz 不变性 ——Lorentz 变换涉及所有的四分量. 在具有 Abel 局域对称性的 QED 简单的例子中, 有许多可供选择的规范. 大部分情况下, 规范的选择都会破坏 Lorentz 不变性, 因而需要在计算的最后用规范不变性来恢复 Lorentz 不变性. 但是, 对于非 Abel 局域对称性, 情况则更加复杂, 简单的规范选择总是出现问题. 直到 20 世纪 60 年代末, Faddeev 和 Popov 才找到一种方法 [13], 在路径积分的体系中系统地处理这些理论. 简单说来就是, 在局域对称性理论的路径积分体系中, 可以通过对场变量上的路径积分施加某些限制, 来设定规范条件. 这比通常的正则量子化程序更加直观和容易理解. 它提供了一个更简单的方式来研究非 Abel 的规范理论, 冲过了阻碍高能物理理论框架发展的瓶颈.

我们首先讨论一下规范理论量子化的困难之处. 为简单起见, 考虑 $SU(2)$ 的 Yang-Mills 场, 拉氏量为

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu},\quad a=1,2,3 \tag{8-123}$$

其中

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+g\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{8-124}$$

可以将生成泛函写为

$$W[J]=\int[\mathrm{d}A_\mu]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\mathcal{L}+\boldsymbol{J}_\mu\cdot\boldsymbol{A}^\mu]} \tag{8-125}$$

这里 $\boldsymbol{J}_\mu$ 是规范场的经典源函数. 那么自由场的部分就是

$$W_0[J]=\int[\mathrm{d}A_\mu]\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[\mathcal{L}_0+\boldsymbol{J}_\mu\boldsymbol{A}^\mu]\right\} \tag{8-126}$$

其中, 自由场拉氏量是

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}^4x\mathcal{L}_o(x)&=-\frac{1}{4}\int\mathrm{d}^4x(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu}-\partial^\nu A^{a\mu})\\&=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4xA^a_\mu(x)(g^{\mu\nu}\partial^2-\partial^\mu\partial^\nu)A^a_\nu(x)\end{aligned}$$

这里我们已经进行了分部积分. Gauss 积分的一般公式为

$$\int [\mathrm{d}\phi] \exp[-\frac{1}{2}\langle\phi K\phi\rangle + \langle J\,\phi\rangle] \sim \frac{1}{\sqrt{\det K}} \exp\left\langle JK^{-1}J\right\rangle \tag{8-127}$$

然而, 这里的算符 K

$$K_{\nu\mu}(x-y) = (g^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu)\delta^4(x-y) \tag{8-128}$$

具有投影算符的性质, 会投影出横向分量, 即

$$\int \mathrm{d}^4y K_{\mu\nu}(x-y)\, K^{\nu}{}_{\lambda}(y-z) \propto K_{\nu\lambda}(x-z) \tag{8-129}$$

因而它没有逆. 这可由如下推导得出

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4y K_{\mu\nu}(x-y)\, K^{\nu}{}_{\lambda}(y-z)\\
=&\int \mathrm{d}^4y \delta^4(x-y)(g_{\mu\nu}\partial_x^2 - \partial_{x\mu}\partial_{x\nu})\left(g_\lambda^\nu\partial_y^2 - \partial_y^\nu\partial_{y\lambda}\right)\delta^4\left(y-z\right)\\
=&(g_{\mu\nu}\partial_x^2 - \partial_{x\mu}\partial_{x\nu})\left(g_\lambda^\nu\partial_x^2 - \partial_x^\nu\partial_{x\lambda}\right)\delta^4\left(x-z\right)\\
=&\left(g_{\mu\lambda}\partial_x^2\partial_x^2 - \partial_{x\mu}\partial_{x\lambda}\partial_x^2 + \partial_{x\mu}\partial_{x\lambda}\partial_x^2 - \partial_x^2\partial_{x\mu}\partial_{x\lambda}\right)\delta^4\left(x-z\right)\\
=&\partial_x^2\left(g_{\mu\lambda}\partial_x^2 - \partial_{x\mu}\partial_{x\lambda}\right)\delta^4\left(x-z\right) = \partial_x^2 K_{\mu\lambda}(x-z)
\end{aligned}$$

这意味着 Gauss 积分会发散. 换句话说, 规范场横向分量上的积分是收敛的, 但纵向分量上却没有 Gauss 衰减. $W_0(J)$ 会是奇异的, 是因为规范不变性投影出横向规范场, 导致 $W_0(J)$ 不依赖于纵向分量和时间分量. 在 $W_0(J)$ 的路径积分中, 对所有的场构型 (field configuration) 求和, 其中就包括被规范变换相联系的那些“轨道”. 这种重复计算是导致积分发散的根源. 因此, 我们的策略是消除轨道的“体积”因子, 以避免在量子化后得到一个发散的结果.

8.3.1　规范理论的体积因子

一个简单的例子

下面我们先通过一个二重积分来说明分解体积因子的概念, 然后考虑更加复杂的规范理论的情况. 取如下一个简单的二重积分

$$W = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(x,y)} = \int \mathrm{d}^2 r \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(\boldsymbol{r})} \tag{8-130}$$

$\boldsymbol{r} = (r,\theta)$ 是极坐标. 假设 $S(\boldsymbol{r})$ 在旋转变换下是不变的

$$S(\boldsymbol{r}) = S(\boldsymbol{r}_\phi), \quad \boldsymbol{r}_\phi = (r, \theta+\phi) \tag{8-131}$$

也就是说 $S(\boldsymbol{r})$ 在由旋转生成的圆轨道上是一个常量, 因而积分 W 正比于轨道的长度. 如果只想要对不等价的 $S(\boldsymbol{r})'s$ 的贡献求和, 只需除去体积因子, 也就是对极角的积分 $\int \mathrm{d}\theta = 2\pi$. 我们会用一个更复杂一点的程序来完成这个步骤, 它可以被推广到更普遍的情形. 将恒等式

$$1 = \int \mathrm{d}\phi \delta\left(\theta - \phi\right) \tag{8-132}$$

插入式 (8-130) 的 W 中,

$$W = \int \mathrm{d}\phi \int \mathrm{d}^2 r \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(\boldsymbol{r})} \delta\left(\theta - \phi\right) = \int \mathrm{d}\phi W_\phi \tag{8-133}$$

其中

$$W_\phi = \int \mathrm{d}^2 r \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(\boldsymbol{r})} \delta\left(\theta - \phi\right) \tag{8-134}$$

它是只沿着某个特定角度 ϕ 的积分 (图 8-1(a)). 根据不变性 $S(\boldsymbol{r}) = S(\boldsymbol{r}_\phi)$, 可以看到

$$W_\phi = W_{\phi'} \quad \Longrightarrow \quad W_\phi \text{ 不依赖于 } \phi \tag{8-135}$$

因此

$$W = \int \mathrm{d}\phi W_\phi = W_\phi \int \mathrm{d}\phi = 2\pi W_\phi \tag{8-136}$$

这样就可以分解出多余的因子 2π, 得到积分 W_ϕ. 还可以施加更复杂的约束条件, 如

$$g(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{8-137}$$

只要它与每个 (圆) 轨道只相交一次, 如图 8-1(b) 所示. 约束条件通过 $\delta\left[g(\boldsymbol{r}_\phi)\right]$ 的形式来实现. 首先需要计算满足下式定义的 $\left[\Delta_g\left(\boldsymbol{r}\right)\right]$

$$1 = \int \mathrm{d}\phi \ \left[\Delta_g\left(\boldsymbol{r}\right)\right] \delta\left[g(\boldsymbol{r}_\phi)\right], \quad \boldsymbol{r} = (r, \theta) \tag{8-138}$$

容易得到

$$\left[\Delta_g\left(\boldsymbol{r}\right)\right]^{-1} = \int \mathrm{d}\phi \ \delta\left[g(\boldsymbol{r}_\phi)\right] \tag{8-139}$$

因为 $\left[\Delta_g\left(\boldsymbol{r}\right)\right]$ 依赖于 θ 而不是 ϕ, 所以可以拿到积分外. 可以证明 $\Delta_g\left(\boldsymbol{r}\right)$ 是旋转不变的, 即它与 $\boldsymbol{r}$ 的方向无关. 将 $\boldsymbol{r}$ 旋转 ϕ' 角, 得到

$$\left[\Delta_g\left(\boldsymbol{r}_{\phi'}\right)\right]^{-1} = \int \mathrm{d}\phi \ \delta\left[g(\boldsymbol{r}_{\phi+\phi'})\right] = \int \mathrm{d}\phi'' \ \delta\left[g(\boldsymbol{r}_{\phi''})\right] = \left[\Delta_g\left(\boldsymbol{r}\right)\right]^{-1} \tag{8-140}$$

其中 $\phi'' = \phi + \phi'$.

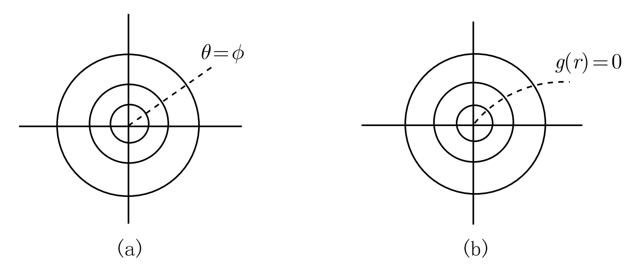


图 8-1　沿着特定角度 ϕ 的积分

回忆对复杂宗量的 δ 函数的积分, 有

$$\int \mathrm{d}x\delta\left(g\left(x\right)\right)=\frac{1}{\left.\dfrac{\partial g(x)}{\partial x}\right|_{g=0}} \tag{8-141}$$

将它应用到对 ϕ 积分中, 得到

$$\Delta_g\left(\boldsymbol{r}\right)=\left.\frac{\partial g(\boldsymbol{r})}{\partial\theta}\right|_{g=0} \tag{8-142}$$

于是 W 的积分可以变为

$$W=\int \mathrm{d}\phi W_\phi\ ,\quad W_\phi=\int \mathrm{d}^2r\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(\boldsymbol{r})}\delta\left[g(\boldsymbol{r}_\phi)\right]\Delta_g\left(\boldsymbol{r}\right) \tag{8-143}$$

同样, W_ϕ 是旋转不变的, 可以通过丢掉对 ϕ 的积分来除去式 (8-143) 中的体积因子

$$\begin{aligned}W_{\phi'}&=\int \mathrm{d}^2r\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(\boldsymbol{r})}\delta\left[g(\boldsymbol{r}_{\phi'})\right]\Delta_g\left(\boldsymbol{r}\right)\\&=\int \mathrm{d}^2r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(\boldsymbol{r}')}\delta\left[g(\boldsymbol{r}_{\phi'})\right]\Delta_g(\boldsymbol{r}')\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{r}'=(r,\phi')$. 因此, 除了用来施加约束条件 $g(\boldsymbol{r})=0$ 的 δ 函数, 还要有 $\Delta_g\left(\boldsymbol{r}\right)$ 来补偿 δ 函数的出现.

规范理论的体积因子

对于规范理论, 情况则更加复杂, 但是原理是相同的. 因而将局域规范对称看成上文讨论的旋转对称性的推广是有助于理解的. 这里我们会略掉一些细节.

在规范变换下, 有 $\boldsymbol{A}_\mu\to\boldsymbol{A}_\mu^\theta$:

$$\boldsymbol{A}_\mu^\theta\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}=U(\theta)\left[\boldsymbol{A}_\mu\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}+\frac{1}{\mathrm{i}g}U^{-1}(\theta)\partial_\mu U(\theta)\right]U^{-1}(\theta) \tag{8-144}$$

这里局限到 $SU(2)$ 局域对称性的情况, 所以

$$U(\theta)=\exp\left(\frac{-\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau}}{2}\right) \tag{8-145}$$

这可以类比于式 (8-131) 中的旋转变换. 我们要把路径积分限制在超曲面 (hypersurface) 上, 这就相当于前面简单例子中的圆轨道约束条件 $g(\boldsymbol{r})$, 它与每个“圆轨道”只相交一次. 如果将超曲面选为

$$f_a(\boldsymbol{A}_\mu)=0,\quad a=1,2,3 \tag{8-146}$$

那么方程

$$f_a(\boldsymbol{A}_\mu^\theta)=0 \tag{8-147}$$

对于给定的 $\boldsymbol{A}_\mu$ 有唯一的 θ 解. 这里假设这个超曲面与每个规范轨道只相交一次, 这就类似于式 (8-137) . 在单位元附近, 可以将上面的幺正变换写成

$$U(\theta)=1+\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau}}{2}+O(\theta^2) \tag{8-148}$$

群空间上的积分可以写成对群参数 $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ 的积分

$$[\mathrm{d}\theta]=\prod_{a=1}^{3}\mathrm{d}\theta_a \tag{8-149}$$

定义泛函

$$\Delta_f^{-1}[\boldsymbol{A}_\mu]=\int[\mathrm{d}\theta(x)]\delta[f_a(\boldsymbol{A}_\mu^\theta)] \tag{8-150}$$

那么有

$$\Delta_f[\boldsymbol{A}_\mu]=\det M_f,\quad (M_f)_{ab}=\left.\frac{\partial f_a}{\partial\theta_b}\right|_{f_a=0} \tag{8-151}$$

这是对复杂宗量的 δ 函数的积分, 是对下式的推广

$$\int\mathrm{d}x\ \delta[f(x)]=\left.\frac{1}{\mathrm{d}f/\mathrm{d}x}\right|_{f=0} \tag{8-152}$$

为了看明白这一点, 我们从上式的一维积分出发, 变换积分变量

$$y=f\left(x\right)\Longrightarrow\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{8-153}$$

可以得到

$$\int\mathrm{d}x\,\delta\left(f\left(x\right)\right)=\int\mathrm{d}y\delta\left(y\right)\frac{1}{\mathrm{d}f/\mathrm{d}x}=\left.\frac{1}{\mathrm{d}f/\mathrm{d}x}\right|_{f=0} \tag{8-154}$$

再考虑 2 维的情况

$$I_2 = \int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \delta\left(f_1\left(x_1, x_2\right)\right) \delta\left(f_2\left(x_1, x_2\right)\right) \tag{8-155}$$

同样地, 变换积分变量

$$y_i = f_i\left(x_1, x_2\right), \quad \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \frac{1}{J} \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \tag{8-156}$$

其中

$$J = \frac{\partial\left(y_1, y_2\right)}{\partial\left(x_1, x_2\right)} = \det\left|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{array}\right| \tag{8-157}$$

是通常的变换积分变量的 Jacobi 行列式. 那么

$$I_2 = \int \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \frac{1}{J} \delta\left(y_1\right) \delta\left(y_2\right) = \frac{1}{\det\left|\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right|_{y_i=0}} \tag{8-158}$$

即

$$I_2 = \int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \delta\left(f_1\left(x_1, x_2\right)\right) \delta\left(f_2\left(x_1, x_2\right)\right) = \frac{1}{\det\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{f_i=0}} \tag{8-159}$$

因此可以看到, 推广到 n 维积分的结果是

$$I_2 = \int \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \delta\left(f_1\left(x_1, \cdots, x_n\right)\right) \cdots \delta\left(f_n\left(x_1, \cdots, x_n\right)\right) = \frac{1}{\det\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{f_i=0}} \tag{8-160}$$

由此不难看出式 (8-151) 给出的结果.

注意, 要插到路径积分中的等式是

$$1 = \int [\mathrm{d}\theta(x)] \delta[f_a(\boldsymbol{A}_\mu^\theta)] \Delta_f[\boldsymbol{A}_\mu] \tag{8-161}$$

$\boldsymbol{A}_\mu$ 的无穷小规范变换是

$$A_\mu^{\theta a} = A_\mu^a + \epsilon^{abc} \theta^b A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a \tag{8-162}$$

那么函数 f 在无穷小规范变换下变成

$$f_a(\boldsymbol{A}_\mu^\theta) = f_a(\boldsymbol{A}_\mu) + \int \mathrm{d}^4 y [M_f(x, y)]_{ab} \theta_b(y) + O(\theta^2) \tag{8-163}$$

其中, $[M_f(x,y)]_{ab}$ 是函数 f_a 对参数 $\theta_b(y)$ 的微商, 表示 f_a 相对于参数 $\theta_b(y)$ 的无穷小变换. 同样地, $\Delta_f[\boldsymbol{A}_\mu]$ 是规范不变的, 这可以通过下面的简单计算来说明.

根据等式

$$\Delta_f^{-1}[\boldsymbol{A}_\mu] = \int [\mathrm{d}\theta'(x)]\delta[f_a(\boldsymbol{A}_\mu^{\theta'})] \tag{8-164}$$

得到

$$\Delta_f^{-1}[\boldsymbol{A}_\mu^\theta] = \int [\mathrm{d}\theta'(x)]\delta[f_a(\boldsymbol{A}_\mu^{\theta\theta'})] = \int [\mathrm{d}(\theta(x)\theta'(x))]\delta[f_a(\boldsymbol{A}_\mu^{\theta\theta'})]$$
$$= \int [\mathrm{d}\theta''(x)]\delta[f_a(\boldsymbol{A}_\mu^{\theta''})] = \Delta_f^{-1}[\boldsymbol{A}_\mu]$$

将等式 (8-161) 插入到路径积分中, 得到

$$\int [\mathrm{d}\boldsymbol{A}_\mu] \exp\{\mathrm{i}\int \mathcal{L}(x)\mathrm{d}^4x\} = \int [\mathrm{d}\theta(x)]\,[\mathrm{d}\boldsymbol{A}_\mu]\,\Delta_f(\boldsymbol{A}_\mu)\delta[f_a(\boldsymbol{A}_\mu^\theta)] \exp\{\mathrm{i}\int \mathcal{L}(x)\mathrm{d}^4x\}$$
$$= \int [\mathrm{d}\theta(x)]\,[\mathrm{d}\boldsymbol{A}_\mu]\,\Delta_f(\boldsymbol{A}_\mu)\delta[f_a(\boldsymbol{A}_\mu)] \exp\{\mathrm{i}\int \mathcal{L}(x)\mathrm{d}^4x\}$$

现在可以丢掉“体积因子”$\int[\mathrm{d}\theta(x)]$, 将生成泛函写成

$$W_f[\boldsymbol{J}] = \int [\mathrm{d}\boldsymbol{A}_\mu](\det M_f)\delta[f_a(\boldsymbol{A}_\mu)] \exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\mathcal{L}(x) + \boldsymbol{J}_\mu \cdot \boldsymbol{A}^\mu]\} \tag{8-165}$$

这就是 **Faddeev-Popov 拟设**(ansatz), $\det M_f$ 称为 **Faddeev-Popov 行列式**. 这样的路径积分可以用来进行量子化.

8.3.2 Faddeev-Popov 鬼场

Faddeev-Popov 行列式的形式不便于我们进行场论中的计算. 我们曾经在第 6 章讨论过 Grassmann 变量的 Gauss 积分和行列式之间的关系. 现在我们要用这个关系把 Faddeev-Popov 行列式转换成类似于场论的拉氏量的形式.

行列式 $\det M_f$ 可以被写成对 Grassmann 变量的积分

$$\det M_f \sim \int [\mathrm{d}c][\mathrm{d}c^\dagger] \exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y \sum c_a^\dagger(x)[M_f(x,y)]_{ab}c_b(y)\} \tag{8-166}$$

其中, $c_a, c_b^\dagger$ 是我们引入的 Grassmann 场, 用来表示 $\det M_f$, 称为 **Faddeev-Popov 鬼场**, 因为它们并不是真正的物理自由度. 在转换成这种形式之后, 可以将 Faddeev-Popov 行列式当成拉氏量中的附加项, 这样就可以用来做微扰计算了. 我们也要将 $\delta[f_a(A_\mu)]$ 转换成某个有效拉氏量的形式. 假设取如下的规范固定项, 而不是式 (8-146)

$$[f_a(\boldsymbol{A}_\mu)] = B_a(x) \tag{8-167}$$

其中, $B_a(x)$ 是某个任意函数. 那么积分式

$$\int [\mathrm{d}\theta(x)]\Delta_f[\boldsymbol{A}_\mu]\delta[f_a(\boldsymbol{A}_\mu^\theta) - B_a(x)] = 1 \tag{8-168}$$

还会给出与之前相同的 $\Delta_f[A_\mu]$. 注意到

$$\int [\mathrm{d}B_a(x)] \exp\{-\frac{\mathrm{i}}{2\xi}\boldsymbol{B}^2(x)\} \sim \text{常数}, \quad \xi \text{ 是任意参数} \tag{8-169}$$

于是可以将生成泛函写成

$$\begin{aligned} W[J] =& \int [\mathrm{d}A_\mu^a][\mathrm{d}B_a(x)](\det M_f)\delta[f_a(\boldsymbol{A}_\mu)-B_a]\exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\mathcal{L}(x)-\boldsymbol{J}^\mu\cdot\boldsymbol{A}_\mu-\frac{1}{2\xi}\boldsymbol{B}^2(x)]\} \\ =& \int [\mathrm{d}A_\mu^a](\det M_f)\exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\mathcal{L}(x)-\boldsymbol{J}^\mu\cdot\boldsymbol{A}_\mu-\frac{1}{2\xi}[f^a(A_\mu)]^2]\} \end{aligned}$$

这里已经丢掉了积分前面与场无关的常数项, 因为它们不会影响由生成泛函计算 Green 函数的结果. 把所有这些放在一起, 得到

$$W[J] = \int [\mathrm{d}A_\mu^a][\mathrm{d}c(x)][\mathrm{d}c^\dagger(x)]\exp\{\mathrm{i}S_{\text{eff}}[\boldsymbol{J}]\} \tag{8-170}$$

其中有效作用量为

$$S_{\text{eff}}[\boldsymbol{J}] = S[\boldsymbol{J}] + S_{\text{gf}} + S_{\text{FPG}} \tag{8-171}$$

S_{gf} 来自于规范固定项

$$S_{\text{gf}} = \frac{1}{2\xi}\int \mathrm{d}^4x\{f_a[A_\mu(x)]\}^2 \tag{8-172}$$

S_{FPG} 是 Faddev-Popov 鬼项

$$S_{\text{FPG}} = \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\sum_{a,b}c_a^\dagger(x)[M_f(x,y)]_{ab}c_b(y) \tag{8-173}$$

总结一下: 在路径积分量子化中, 需要在有效作用量中增加额外的两项: S_{gf} 对应于规范固定项, S_{FPG} 来自于 Faddeev-Popov 行列式. 特别地, Faddeev-Popov 行列式是通过 Grassmann 变量 ——Faddeev-Popov 鬼场的泛函积分来实现的.

8.3.3 协变规范

最常见的规范固定项之一就是协变规范 (covariant gauge) 的条件

$$f^a(A_\mu) = \partial^\mu A_\mu^a = 0 \tag{8-174}$$

协变规范的一个好处是, 在计算 Feynman 图的每一步中, 矩阵元都显然是协变的 (Lorentz covariant). 可以通过如下的方法来计算 Faddeev-Popov 行列式. 对于无穷小规范变换

$$U(\theta(x)) = 1 + \frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau}}{2} + O(\theta^2) \tag{8-175}$$

有

$$A_\mu^{a\theta} = A_\mu^a + \epsilon^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a \tag{8-176}$$

那么

$$\begin{aligned} f^a(A_\mu^\theta) =& f^a(A_\mu) + \partial^\mu\left[\epsilon^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)\right] \\ =& f^a(A_\mu) + \int \mathrm{d}^4y[M_f(x,y)]_{ab}\theta^b(y) \end{aligned} \tag{8-177}$$

其中

$$[M_f(x,y)]_{ab} = -\frac{1}{g}\partial^\mu[\delta_{ab}\partial_\mu - g\epsilon_{abc}A_\mu^c]\delta^4(x-y) \tag{8-178}$$

于是有

$$S_{\mathrm{gf}} = -\frac{1}{2\xi}\int \mathrm{d}^4x(\partial^\mu A_\mu)^2 \tag{8-179}$$

$$S_{\mathrm{FPG}} = \frac{1}{g}\int \mathrm{d}^4x\sum_{a,b}c_a^\dagger(x)\partial^\mu[\delta_{ab}\partial_\mu - g\epsilon_{abc}A_\mu^c]c_b(x) \tag{8-180}$$

这样, 我们就可以得到 Feynman 规则并做微扰计算. 我们看到, 鬼场只与规范场相耦合.

注意, 规范固定项中有一个任意参数 ξ, 明显没有什么物理意义. 但是它可以成为一个有用的检验工具 —— 在所有的计算中, 依赖于这个参数的项都应当被消掉.

最终我们得到的有效拉氏量是

$$S_{\mathrm{eff}} = \int \mathrm{d}^4x\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^aF^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \sum_{a,b}c_a^\dagger(x)\partial^\mu[\delta_{ab}\partial_\mu - g\epsilon_{abc}A_\mu^c]c_b(x)\} \tag{8-181}$$

这里重新定义了 c 和 $c^\dagger$ 来吸收 $1/g$ 因子. 为了做微扰展开, 首先将 S_{eff} 分解为 $S_{\mathrm{eff}} = S_0 + S_I$, 其中自由场作用量是场的二次项

$$\begin{aligned} S_0 =& \int \mathrm{d}^4x\bigg[-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\right)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \\ &+ J_\mu^a A^{a\mu} + c_a^\dagger\partial^2 c_a + \eta^{a\dagger}c^a + \eta^a c^{a\dagger}\bigg] \end{aligned} \tag{8-182}$$

而剩下的就是相互作用项

$$\begin{aligned} S_I[A_\mu, c, c^\dagger] =& \int \mathrm{d}^4x\bigg[-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\right)g\varepsilon^{abc}A^{\mu b}A^{\nu c} \\ &+ \frac{1}{4}g^2\varepsilon^{abc}\varepsilon^{ade}A_\mu^bA_\nu^cA^{d\mu}A^{e\nu} - \mathrm{i}gc^{a\dagger}\partial^\mu\varepsilon_{abc}A_\mu^cc^b\bigg] \end{aligned} \tag{8-183}$$

自由场生成泛函则是

$$W_0[J,\eta,\eta^\dagger] = W_A^0[J]W_c^0[\eta,\eta^\dagger] \tag{8-184}$$

其中

$$W_A^0[J]=\int[\mathrm{d}A_\mu]\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a\right)^2-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2+J_\mu^aA^{a\mu}\right]\right\} \tag{8-185}$$

而

$$W_c^0[\eta,\eta^\dagger]=\int[\mathrm{d}c][\mathrm{d}c^\dagger]\exp\left\{i\int\mathrm{d}^4x[c_a^\dagger(x)\partial^2c_a(x)-\eta^{a\dagger}c^a-\eta^ac^{a\dagger}]\right\} \tag{8-186}$$

传播子

为了计算规范场的传播子, 将 W_A^0 写成

$$\begin{aligned}W_A^0[J]&=\int[\mathrm{d}A_\mu]\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{2}A_\mu^a(x)(g^{\mu\nu}\partial^2-\partial^\mu\partial^\nu)A_\nu^a(x)-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2+J_\mu^aA^{a\mu}\right]\right\}\\&=\int[\mathrm{d}A_\mu]\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{2}A_\mu^a(x)\left[\left(1-\frac{1}{\xi}\right)g^{\mu\nu}\partial^2-\partial^\mu\partial^\nu\right]\delta_{ab}A_\nu^b(x)+J_\mu^aA^{a\mu}\right]\right\}\\&=\int[\mathrm{d}A_\mu]\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{2}A_\mu^a(x)K_{ab}^{\mu\nu}A_\nu^b(x)+J_\mu^aA^{a\mu}\right]\right\}\end{aligned}$$

其中

$$K_{ab}^{\mu\nu}=\left[\left(1-\frac{1}{\xi}\right)g^{\mu\nu}\partial^2-\partial^\mu\partial^\nu\right]\delta_{ab} \tag{8-187}$$

它有逆, 满足

$$K_{ab}^{\mu\nu}G_{\nu\lambda}^{bc}(x-y)=\left[g^{\mu\nu}\partial^2-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]\delta_{ab}G_{\nu\lambda}^{bc}(x-y)=\delta_a^c\ g_\lambda^\mu\ \delta^4(x-y) \tag{8-188}$$

引入 $G_{\nu\lambda}^{bc}$ 的 Fourier 变换

$$G_{\nu\lambda}^{bc}(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}F_{\nu\lambda}^{bc}(k) \tag{8-189}$$

代入上式可以得到

$$\left[-g^{\mu\nu}k^2+\left(1-\frac{1}{\xi}\right)k^\mu k^\nu\right]F_{\nu\lambda}^{bc}(k)=\delta^{bc}g_\lambda^\mu \tag{8-190}$$

因为 $F_{\nu\lambda}(k)$ 是一个对称的 2 阶张量, 因此可以将其写为

$$F_{\nu\lambda}^{bc}(k)=(f_1g_{\nu\lambda}+f_2k_\nu k_\lambda)\delta^{bc} \tag{8-191}$$

其中, f_1,f_2 是 k^2 的函数. 于是有

$$\left[-g^{\mu\nu}k^2+\left(1-\frac{1}{\xi}\right)k^\mu k^\nu\right](f_1g_{\nu\lambda}+f_2k_\nu k_\lambda)=g_\lambda^\mu \tag{8-192}$$

解出 f_1, f_2 后得到

$$F_{\mu\nu}^{ab}(k)=\delta^{ab}\left[-\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)-\xi\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]\frac{1}{k^2} \tag{8-193}$$

进而有

$$G_{\mu\nu}^{ab}(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}\delta^{ab}\left[-\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)-\xi\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]\frac{1}{k^2} \tag{8-194}$$

对规范场作积分之后得到

$$W_A^0[J]=\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yJ_\mu^a(x)G_{ab}^{\mu\nu}(x-y)J_\nu^a(y)\right\} \tag{8-195}$$

同样地, 对于鬼场的传播子, 可以得到

$$G^{ab}(x-y)=-\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}\delta^{ab}\frac{1}{k^2} \tag{8-196}$$

以及

$$W_c^0\left[\eta,\eta^\dagger\right]=\exp\left\{-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\eta^{\dagger a}(x)G_{ab}(x-y)\eta^b(y)\right\} \tag{8-197}$$

因此得到如下的 Feynman 规则:

(1) 矢量玻色子的传播子, 如图 8-2 所示.

$$\mathrm{i}\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k)=-\mathrm{i}\delta^{ab}\left[g_{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]\frac{1}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}$$

图 8-2 矢量玻色子的传播子

(2) 鬼场传播子, 如图 8-3 所示.

$$\mathrm{i}\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k)=-\mathrm{i}\delta^{ab}\frac{1}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}$$

图 8-3 鬼场传播子

规范场的耦合

非 Abel 的理论中, 极化矢量为 $\varepsilon^\mu(k)$ 的规范场之间有自耦合

$$\varepsilon^\mu(k_1)\varepsilon^\nu(k_2)\varepsilon^\lambda(k_3)\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1,k_2,k_3) \tag{8-198}$$

以及

$$\varepsilon^{\mu}(k_1)\,\varepsilon^{\nu}(k_2)\,\varepsilon^{\lambda}(k_3)\,\varepsilon^{\rho}(k_4)\,\Gamma^{abcd}_{\mu\nu\lambda\rho}(k_1,k_2,k_3,k_4) \tag{8-199}$$

使用第 4 章中讲过的方法, 可以从规范场拉氏量中的三次项和四次项直接得到这些顶角 Γ 的 Feynman 规则. 但是根据它们对交换规范场所表现的对称性质, 也可以同样简单地看出这些规则. S_I 的第一项在动量空间中的形式如下

$$\frac{1}{3!}\tilde{A}^{a\mu}(k_1)\,\tilde{A}^{b\nu}\left(k^2\right)\tilde{A}^{c\lambda}(k_3)\,\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3) \tag{8-200}$$

其中, $\tilde{A}^{a\mu}(k)$ 是规范场的 Fourier 变换. $\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)$ 对于交换规范场 $A's$ 必须是完全对称的. $SU(2)$ 结构是已经固定的

$$\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)=\varepsilon^{abc}\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3) \tag{8-201}$$

因此 Lorentz 结构也可以被推导出来. 根据 S_I 的结构很容易可以看出来, $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ (k_1,k_2,k_3) 是由诸如 $k_{2\mu}g_{\lambda\nu}$ 这样的项构成. 而具体的组合则可以根据下面这个条件来确定, 即 $\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)$ 对于交换 $\mu\leftrightarrow\nu, 1\leftrightarrow 2,\cdots$ 必须是反对称的, 因为 ε^{abc} 是完全反对称的. 这样可以得到:

(3)

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}=&\mathrm{i}\varepsilon^{abc}[(k_1-k_2)_\lambda\,g_{\mu\nu}\\&+(k_2-k_3)_\mu\,g_{\lambda\nu}+(k_3-k_1)_\nu\,g_{\mu\lambda}]\end{aligned}$$

其中

$$k_1+k_2+k_3=0$$

如图 8-4 所示, 同理也可以得到四次规范耦合项的 Feynman 规则.

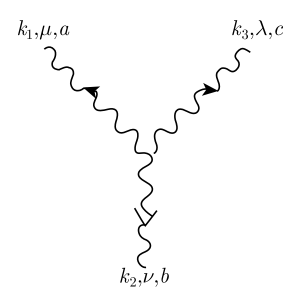


图 8-4 三次规范耦合项

(4)

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\Gamma^{abcd}_{\mu\nu\lambda\rho} =&\mathrm{i}g^2[\varepsilon^{abe}\varepsilon^{cde}\left(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}\right)\\&+\varepsilon^{ace}\varepsilon^{bde}\left(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}\right)\\&+\varepsilon^{ade}\varepsilon^{cbe}\left(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\rho\lambda}g_{\mu\nu}\right)]\end{aligned}$$

其中

$$k_1+k_2+k_3+k_4=0$$

如图 8-5 所示, 对于鬼场与规范场的耦合, 极化矢量为 $\varepsilon^\mu(k_1+k_2)$, 则有

(5)

$$\mathrm{i}\Gamma^{abc}_{\mu}=g\varepsilon^{abc}k_{1\mu}$$

如图 8-6 所示, 注意这个顶点是不对称的. 关于是输入右边鬼场线还是左边鬼场线的动量, 应当在每个顶角保持一个一致的选择. 鬼场只会进入闭圈图中. 拓扑上来看, 对应于每个包含有一个规范场闭圈的图, 都有一个鬼场出现在相同位置的图. 最重要的是, 和费米子圈的情况一样, 每一个鬼场的圈要乘上一个额外的负号.

注意到, 只有规范场传播子与规范参数 ξ 有关, 才可以根据具体的情况来选择合适的 ξ. 在这类协变规范中, $\xi=1$ 的规范称为't Hooft-Feynman 规范, $\xi=0$ 则称为 Landau 规范.

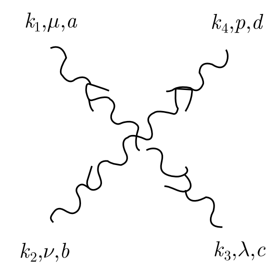


图 8-5 四次规范耦合项

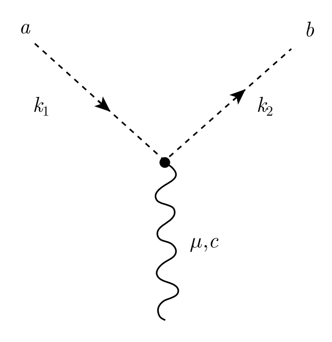


图 8-6 鬼场与规范场的耦合

费米子

在上面考虑的纯 Yang-Mills 场论中加入费米子是显而易见的: 只要在拉氏量中放进量纲小于等于 4 的所有可能的规范协变项, 即

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(\mathrm{i}\gamma^{\mu} D_{\mu} - m\right)\psi \tag{8-202}$$

其中

$$D_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\psi - \mathrm{i}gT^{a}A_{\mu}^{a}\psi \tag{8-203}$$

这里的 T^a 是费米子的表示矩阵. 比如, 如果 ψ 是 $SU(2)$ 的一个二重态, 那么 $T^a = \dfrac{\tau^a}{2}$. 这样就有了包含了费米子的额外的 Feynman 规则.

(6) 费米子的 Feynman 传播子如图 8-7 所示.

$$\mathrm{i}S_{F_{nm}}(k) = \delta_{nm}\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot k - m + \mathrm{i}\varepsilon}$$

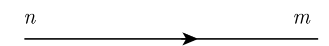


图 8-7　费米子的 Feynman 传播子

(7) 费米子 – 规范玻色子顶角如图 8-8 所示.

$$\mathrm{i}\Gamma_{nm}^{a\mu} = \mathrm{i}g\left(T^{a}\right)_{nm}\gamma^{\mu}$$

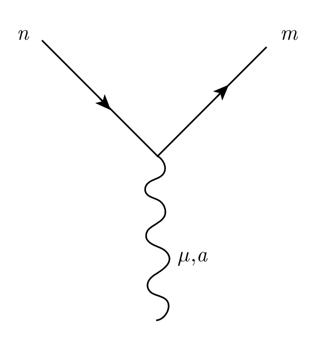


图 8-8　费米子 – 规范玻色子顶角

关于非 Abel 规范理论在协变规范下的路径积分量子化的讨论可以作为一个例子, 来展示如何具体地推导 Feynman 规则, 以便做有用的计算. 这一过程可以被推广到其他规范选择.

第 9 章　对称性自发破缺与 Higgs 机制

9.1　引　　言

对称性在高能物理理论的发展中起到了至关重要的作用. 整体对称性对应守恒律, 如能动量守恒, 电荷守恒等. 另外, 局域对称性或称规范对称性, 给出了所有基本作用的动力学理论, 如电弱相互作用和强相互作用. 许多自然界中的对称性只是近似对称. 然而这些破缺的对称性在理解高能物理的各种现象中也是十分有用的. 在不同类型的对称性破缺中, 最特别的当属对称性自发破缺 (spontaneous symmetry breaking, SSB), 这一机制在高能物理中有着特殊的地位. 它是电弱相互作用的标准模型中除了局域规范对称性之外最重要的支柱.

9.1.1　对称性与简并

在物理学中, 对称性必存在相应的守恒律, 而守恒律也可以由对称性解释. 一般而言, 通过研究物理态的简并来发现物理系统的相互作用中的守恒律. 例如, 如果观察到 $2l+1$ 类型的简并, 则意味着有球对称或类似的对称性. 在某些情况下, 发现系统正确的对称性并不容易. 例如, 氢原子能谱的简并比 $O(3)$ 群的球对称性更大 (图 9-1). 事实上, 氢原子的库仑势的对称性由角动量和 Lenz 矢量组成的 $O(4)$ 群描述.

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{L} - \boldsymbol{r}\frac{4\pi\varepsilon}{e^2} \tag{9-1}$$

其中, $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{L}$ 分别是动量和角动量算符. 因此在确定的主量子数 n 与不同的 l' 下, 能量简并度反映的是 $O(4)$ 群的表示 [14].

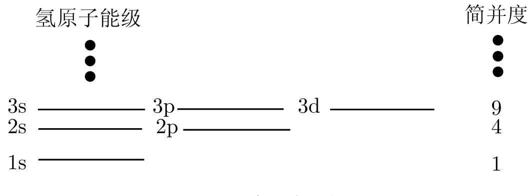


图 9-1　氢原子能级

另一个例子是各向同性的三维谐振子, 其超出 $O(3)$ 群的对称性如图 9-2 所示. 图中结构可由 $SU(3)$ 群的对称性解释, 哈密顿量以产生算符 $a_i^\dagger$ 和湮没算符

a_i 写出

$$H = \hbar\omega\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + a_3^\dagger a_3\right) + \frac{3}{2}\hbar\omega \tag{9-2}$$

由此可以看出, 哈密顿量 H 在幺正变换下保持不变

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longrightarrow U \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{9-3}$$

其中, U 是一个 3×3 的幺正矩阵. 因此该谐振子的简并度与 $SU(3)$ 群的表示相关联, 大于旋转群 $O(3)$.

在这两个例子中, 我们都是从态的简并来推测哈密顿量的对称性. 换言之, 物理态的对称性与相互作用的对称性相同. 这一得到对称性的方法有时被称为 Weyl-Wigner 模式.

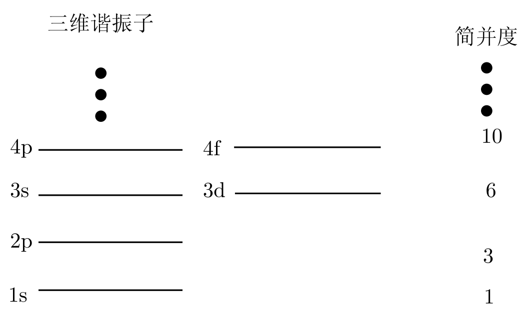


图 9-2　三维各向同性谐振子的能级

9.1.2　对称性自发破缺

另一方面来讲, 对于SSB, 相互作用的对称性在系统的物理态中未能完全展现. 换言之, 相互作用的对称性高于物理态的对称性. 这令研究物理态的简并以得到对称性的方法变得难以实现. 历史上, SSB 首次发现是在 1960 年左右, 由 Nambu 和 Goldstone 在研究凝聚态物理的超导现象时得出的 [15,16]. SSB 导出的结果之一即为零质量激发态的出现, 称为 Nambu-Goldstone 玻色子, 或简称为 Goldstone 玻色子 [17]. 此后, Nambu 将这一发现应用于粒子物理 [18]. SSB 连同 $SU(3) \times SU(3)$ 流代数一起, 成功地解释了强相互作用在低能区近似的手征对称性. 更为重要的是, 1964 年 Higgs [19] 和另外两个小组 [20,21]——Englert 和 Brout 以及 Guranik, Hagen 和 Kibble, 各自独立发现了在局域规范对称性中SSB 有着极为重要的性质: 它能将规范理论中的长程力转换为短程力, 因此避免了零质量 Goldstone 玻色子与零质量规范玻色子. Weinberg [22] 与 Salam [23] 将这一设想用于建立一个涵括电磁相互作

用与弱相互作用的模型. 此后, 1971 年't Hooft [24] 证明了这一模型是可重整化的, 所有高阶作用都可以计算得出, 奠定了该模型的理论基础. 自此, 这一模型在实验上不断获得成功, 现在被称为"电弱相互作用的标准模型"[25]. 毋庸置疑, 它将是未来新物理的基石.

本章我们将对对称性自发破缺作一个简单的介绍, 重点放在概念的解释, 不涉及详细的数学计算. 尽管 SSB 在解释许多有趣的物理现象上都取得了成功, 但它在物理上的引入某种程度上仍然算是可以的, 并且 SSB 的起源尚未完全被理解. 本章我们也会讨论一些物理上更易于处理的非相对论的例子, 以期得到一些关于 SSB 本质的启示. 对 SSB 更好的理解可能会令其在前沿领域的应用更为广泛.

9.1.3 Goldstone 定理

相互作用中基态的对称性破缺的一个广为人知的例子是, 在 Curie 温度 T_C 附近的铁磁效应. 在 $T > T_\mathrm{C}$ 的情况下, 实验观察到所有基态的磁偶极子取向随机, 没有特定的方向, 因此可以看成是旋转对称的. 然而在 $T < T_\mathrm{C}$ 的情况下, 所有基态的磁偶极子将取同一方向 (自发磁化), 不再具有旋转对称性. 这一现象可用 Landau-Ginzberg 平均场理论 (mean field theory)[26] 描述. 对于接近 T_C 的温度, 磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 应该很小, 因此可以将自由能展开成磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 的幂级数, 忽略掉高阶项之后有

$$u(\boldsymbol{M}) = (\partial_t \boldsymbol{M})^2 + V(\boldsymbol{M}) \tag{9-4}$$

其中

$$V(\boldsymbol{M}) = \alpha_1(T)(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{M}) + \alpha_2(T)(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{M})^2 \tag{9-5}$$

且 $\alpha_1(T), \alpha_2(T)$ 是独立于 $\boldsymbol{M}$ 的参数. 能量密度 u 与 V 显然具有旋转不变性. 假定 $\boldsymbol{M}$ 变化缓慢, 只保留第一阶导数. 这里引入了四次项以使 $V(\boldsymbol{M}) > 0$, 假设

$$\alpha_1(T) = \alpha(T - T_\mathrm{C}), \quad \alpha > 0 \tag{9-6}$$

因此在 $T = T_\mathrm{C}$ 时有 $\alpha_1 = 0$. 由于 $(\partial_t \boldsymbol{M})^2$ 这一项是非负的, 为了得到基态的磁化强度, 令 $V(\boldsymbol{M})$ 取极小值,

$$\frac{\partial V}{\partial M_i} = 0 \Longrightarrow M_i(\alpha_1 + 2\alpha_2 \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{M}) = 0 \tag{9-7}$$

若 $T > T_\mathrm{C}$(即 $\alpha_1 > 0$), 其解为 $M_i = 0$; 当 $T < T_\mathrm{C}$(即 $\alpha_1 < 0$) 时, 最小值取在

$$|\boldsymbol{M}| = \sqrt{-\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}} \tag{9-8}$$

由此得到了不为零的磁化. 式 (9-8) 只给出了 $\boldsymbol{M}$ 的大小, 而方向是任意的, 譬如说取在 z 轴. 因此对于低于 Curie 温度的情况, 自由能的旋转对称性自发破缺.

对称性自发破缺的另一个重要特点是 Goldstone 定理, 即连续的对称性的自发破缺可导出系统波长极大时频率趋近于零的激发态的存在. 在粒子物理中, 即为零质量的粒子. 历史上, Nambu 曾在 1960 年指出了在 BCS 超导理论 [27]中这样的集体激发对于理解该理论的规范不变性的重要意义 [15]. 此后, Nambu 将这一设想应用在粒子物理中的手征对称性 (chiral symmetry) 自发破缺上 [18]. 他与 Jona-Lasinio [28] 提出了一个模型, 用很特殊的近似得出了手征对称性自发破缺的结论. 1961 年, Goldstone [16] 给出了更多的零质量粒子的范例, 并认为这可能是对称性自发破缺所共有的特征. 此后, Goldstone, Salam 与 Weinberg [17] 由这一观点得到了一个更严格的一般性定理.

现在我们来说明这一定理. 首先考虑一个有连续对称性的相对论系统. 由 Noether 定理, 连续对称性有对应的守恒流

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{9-9}$$

与守恒荷

$$Q = \int \mathrm{d}^3 x J^0 (x), \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{9-10}$$

对于一般的场算符 $\phi(x)$ 的变换, 有下列关系

$$\phi (x) \longrightarrow \phi' (x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon Q} \phi (x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon Q} = \phi (x) + \mathrm{i}\varepsilon \left[Q, \phi (x)\right] + \cdots \tag{9-11}$$

其中, ε 是任意的对称性的参量. 为简便起见, 定义 σ 为

$$[Q, \phi (x)] = \sigma (x) \tag{9-12}$$

流守恒意味着

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathrm{d}^3 x \left[\partial_\mu J^\mu (\boldsymbol{x}, t), \phi (0)\right] \\ &= \partial^0 \int \mathrm{d}^3 x \left[J^0 (\boldsymbol{x}, t), \phi (0)\right] + \int \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \left[\boldsymbol{J} (\boldsymbol{x}, t), \phi (0)\right] \end{aligned}$$

对于足够大的表面, 假定没有流出该区域的流, 则右边第二项为零. 由此得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [Q(t), \phi(0)] = 0 \tag{9-13}$$

假设由于某种原因, 这一对易子有非零的真空期望值 (vacuum expectation value, VEV)

$$\langle 0 \left| [Q (t), \phi (0)] \right| 0 \rangle = \langle 0 \left| \sigma \right| 0 \rangle = v \neq 0 \tag{9-14}$$

上式被称为**对称性破缺条件**. 注意, 这个对易子非零意味着对称性守恒荷 Q 不会湮没真空态, 即

$$Q(t)|0\rangle \neq 0 \tag{9-15}$$

进而有

$$e^{i\alpha Q}|0\rangle \neq |0\rangle \tag{9-16}$$

因为 Q 是对称变换的生成元, 所以上式意味着真空在对称变换下不是不变的. 这种情况通常称为**对称性自发破缺**. 将式 (9-14) 展开是

$$\begin{aligned}\langle 0|[Q,\phi(0)]|0\rangle &= \int d^3x \langle 0|\left[J^0(\boldsymbol{x},t),\phi(0)\right]|0\rangle \\ &= \int d^3x \langle 0|\left[J^0(\boldsymbol{x},t)\phi(0)-\phi(0)J^0(\boldsymbol{x},t)\right]|0\rangle\end{aligned}$$

在上式中插入一组中间态的完备集, 并利用平移算符

$$J_0(x) = e^{ip\cdot x}J_0(0)e^{-ip\cdot x} \tag{9-17}$$

它的第一项是

$$\begin{aligned}\sum_n \int d^3x\langle 0|J^0(\boldsymbol{x},t)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle &= \sum_n \int d^3x e^{-ip_n\cdot x}\langle 0|J^0(0)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle \\ &= \sum_n (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}_n)\langle 0|J^0(0)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle e^{-iE_nt}\end{aligned}$$

对于第二项也有类似的结果. 因此得到

$$\begin{aligned}&\sum_n (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}_n)\{\langle 0|J^0(0)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle e^{-iE_nt} \\ &-\langle 0|\phi(0)|n\rangle\langle n|J^0(0)|0\rangle e^{iE_nt}\} = v \neq 0\end{aligned} \tag{9-18}$$

注意等式右端是一个与时间无关的非零量, 而等式左端含有指数因子 $e^{\pm iE_nt}$, 明显与时间相关. 因为正频部分与负频部分不能互相抵消, 所以这一关系只有当存在符合如下条件的物理态时才能得到满足, 即

$$E_n = 0, \quad 对于\ \boldsymbol{p}_n = 0 \tag{9-19}$$

在相对论系统中, 能动量关系为

$$E_n = \sqrt{\boldsymbol{p}_n^2 + m_n^2} \tag{9-20}$$

意味着粒子质量为零, 即 **Goldstone 玻色子**. 这个物理态满足

$$\langle 0|J^0(0)|n\rangle \neq 0, \quad \langle n|\phi(0)|0\rangle \neq 0 \tag{9-21}$$

这意味着 Goldstone 玻色子来自于场算符 ϕ, 而不是有非零真空期望值的场算符 σ. 换言之, Goldstone 玻色子对应的是场算符 ϕ, 即场算符 σ 的对称伴算符. 它可以由破缺的守恒荷与真空联系起来, 即 $\langle 0|Q|n\rangle \neq 0$. 事实上, 也可以反过来说: 任意一个可以通过某个守恒流 J_μ 与真空 $|0\rangle$ 联系起来的粒子 $|\pi(p)\rangle$, 都一定是 Goldstone 玻色子. 为了证明这一点, 写出如下矩阵元

$$\langle 0 |J_\mu (0)| \pi (p)\rangle = f p_\mu, \quad f \neq 0 \text{ 是一个常数} \tag{9-22}$$

对上式求散度得到

$$0 = \langle 0 |\partial^\mu J_\mu (0)| \pi (p)\rangle = \mathrm{i} f p^2 = \mathrm{i} f m_\pi^2 \tag{9-23}$$

因为 $f \neq 0$, 一定有 $m_\pi^2 = 0$, 即该粒子是一个 Goldstone 玻色子.

对于非相对论性的系统, 式 (9-19) 意味着波矢量趋近于零时, 存在零能量的激发态.

注意对称性自发破缺的过程中, 物理态的对称性始终小于相互作用的对称性. 在相互作用中添加几项可以得到对称性的显性破缺 (explicit symmetry breaking), 仅从能谱上看, 自发破缺与显性破缺似乎难以区分, 然而 Goldstone 激发是对称性自发破缺的一个独有的特征.

9.2 非相对论系统中的对称性自发破缺 —— 超流现象

对称性自发破缺是一个普遍的现象. 下面以一个非相对论系统 —— 超流理论为例来讨论这个问题, 希望能够更好地理解 Goldstone 定理的各个方面.

超流体 He^4 为 Goldstone 激发提供了另一个典型例子 [29]. 系统中氦原子是一个相当强的束缚态, 原子间的长程力非常微弱, 而短程力为很强的排斥力. 由此, 氦原子的系统可以用相互作用十分微弱的玻色气体描述, 哈密顿量可以写成

$$H = -\frac{1}{2m}\int \mathrm{d}^3x \psi^\dagger \nabla^2 \psi + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \mathrm{d}^3y \psi^\dagger (x) \psi^\dagger (y) v (x-y) \psi (x) \psi (y) \tag{9-24}$$

在前面讨论非相对论系统的量子化时, 也需要场算符大于二次的项来得到有意义的相互作用. 这里出于对称性的考虑, 取相互作用是四次的. 另外, 假设相互作用由一个势函数 $v(x)$ 来描述 —— 它表示氦原子之间的有效相互作用. 注意, 这个相互作用是平移不变的, 即它在 $x \to x+a$, $y \to y+a$ 的变换下保持不变, 所以动量是守恒的. 这种哈密顿量是非相对论场论中常用的形式. 这里的 $\psi(x)$ 是氦原子的场算符, 满足非相对论场的对易关系

$$[\psi(x), \psi^\dagger(y)] = \delta^3(x-y) \tag{9-25}$$

假定把系统放在一个体积为 Ω 的具有周期性边界条件的立方体中. 显然, 哈密顿量在相变换 (相移) 下是不变的

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\psi(x) \tag{9-26}$$

这意味着 $U(1)$ 对称性, 即 He 原子数目不变. 守恒荷即为原子数算符

$$Q = \int \mathrm{d}^3 x \psi^\dagger(x)\psi(x) \tag{9-27}$$

对易关系为

$$[Q, \psi(x)] = -\psi(x), \quad [Q, \psi^\dagger(x)] = \psi^\dagger(x) \tag{9-28}$$

可以用平面波 (动量本征态) 将 $\psi(x)$ 展开

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{9-29}$$

其中, $a^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ 与 $a_{\boldsymbol{k}}$ 为通常的产生算符与湮没算符, 满足如下对易关系

$$[a_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{k}'}] = 0, \quad \left[a_{\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\right] = \delta_{kk'} \tag{9-30}$$

从而得到哈密顿量

$$H = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^\dagger_k a_k + \frac{1}{2\Omega}\sum_{k_i} \bar{\boldsymbol{v}}(k_1 - k_3)\,\delta_{k_1+k_2,k_3+k_4} a^\dagger_{k_1} a^\dagger_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \tag{9-31}$$

其中

$$\bar{v}(k) = \int \mathrm{d}^3 x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} v(x) \tag{9-32}$$

且 Ω 为系统总体积. 在以上两式及下文中, 为简便起见, 我们省略了波矢量的 k_i' 的矢量符号. 由于 $v(x)$ 是实数, 所以 $\bar{v}(k) = \bar{v}(-k)$. 对于没有相互作用的情况, $v(x) = 0$, 基态即为所有粒子都处于 $k = 0$ 的状态

$$|\Psi_0\rangle_{v=0} = \frac{\left(a^\dagger_0\right)^N}{\sqrt{N!}}|0\rangle, \quad a_k|0\rangle = 0, \quad \forall\, k \tag{9-33}$$

其中, N 是系统的总粒子数. 显然, 如果相互作用足够小, 在基态和低能激发态中, 大部分粒子都将处于 $k = 0$ 的态, 即

$$\langle n_0\rangle \gg \langle n_k\rangle, \quad k \neq 0 \tag{9-34}$$

其中, $n_k = a_k^\dagger a_k$, 是 k 态的粒子数. 我们感兴趣的是系统的总粒子数 N 很大的情况, 因此 $n_0 \sim N$ 也很大. 根据产生算符和湮没算符的性质

$$a_0|n_0\rangle = \sqrt{n_0}|n_0-1\rangle, \quad a_0^\dagger|n_0\rangle = \sqrt{n_0+1}|n_0+1\rangle \tag{9-35}$$

可以近似认为 a_0 的矩阵元是 $\sqrt{n_0}$ 量级的, 而 $a_0^\dagger$ 是 $\sqrt{n_0+1}$ 量级的. 因此在 $n_0 \sim N \to \infty$ 的极限下, 对易子 $[a_0, a_0^\dagger]$ 是 1 的量级, 而 $a_0, a_0^\dagger$ 是 $\sqrt{N}$ 的量级:

$$[a_0, a_0^\dagger] = 1 \ll a_0, \quad a_0^\dagger \sim \sqrt{n_0} \tag{9-36}$$

因此可以忽略对易子. 又因为 a_0 和 $a_0^\dagger$ 与其他所有算符对易

$$[a_0, a_k] = [a_0^\dagger, a_k] = 0, \quad k \neq 0, \tag{9-37}$$

所以可以将 a_0 和 $a_0^\dagger$ 视为 c 数(Schur 引理), 可以用 $\sqrt{n_0}$ 来替换 a_0 与 $a_0^\dagger$:

$$a_0 = a_0^\dagger \simeq \sqrt{n_0} \tag{9-38}$$

因为初始的拉氏量中有 4 个产生或湮没算符, 所以在作近似用 $\sqrt{n_0}$ 替换 $a_0, a_0^\dagger$ 之后, a_k 和 $a_k^\dagger$ $(k \neq 0)$ 的二次项的系数是 n_0 的量级, 而四次项是 1 的量级. 由此可以得出忽略四次项的近似哈密顿量

$$\begin{aligned} H =& \sum_{k\neq 0} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_k^\dagger a_k + \frac{n_0}{2\Omega} \sum_{k\neq 0} [\bar{v}(k)(a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_{-k}) \\ & + 2\bar{v}(0) a_k^\dagger a_k + 2\bar{v}(k) a_k^\dagger a_k] + \frac{n_0^2}{2\Omega}\bar{v}(0) \end{aligned}$$

或

$$H = \sum_{k\neq 0} \omega_k a_k^\dagger a_k + \frac{n_0}{2\Omega} \sum_{k\neq 0} \bar{v}(k)(a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_{-k}) + \frac{N^2}{2\Omega}\bar{v}(0) \tag{9-39}$$

其中

$$\omega_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{n_0}{\Omega}\bar{v}(k) \tag{9-40}$$

这里用到了

$$N^2 = \left(n_0 + \sum_{k\neq 0} a_k^\dagger a_k\right)^2 \approx n_0^2 + 2n_0 \sum_{k\neq 0} a_k^\dagger a_k \tag{9-41}$$

注意这个哈密顿量不保持粒子数守恒, 但仍然有动量守恒, 因为忽略 $k=0$ 模式只影响总粒子数, 并不影响动量. 哈密顿量中只含有二次项, 从而可以利用如下 Bogoliubov 变换得到本征值. 定义准粒子算符为

$$\alpha_k = \cosh\theta_k\ a_k + \sinh\theta_k\ a_{-k}^\dagger \tag{9-42}$$

由此得到

$$\alpha_k^\dagger = \cosh\theta_k \ a_k^\dagger + \sinh\theta_k \ a_{-k} \tag{9-43}$$

其中, θ_k 是一个由我们支配的任意参量. 假设 $\theta_k = \theta_{-k}$, 上述准粒子算符显然满足以下对易关系

$$\left[\alpha_k, \alpha_{k'}^\dagger\right] = \delta_{kk'}, \quad [\alpha_k, \alpha_{k'}] = 0 \tag{9-44}$$

例如

$$\begin{aligned}\left[\alpha_k, \alpha_{k'}^\dagger\right] &= [\cosh\theta_k \ a_k + \sinh\theta_k \ a_{-k}^\dagger, \ \cosh\theta_{k'} \ a_{k'}^\dagger + \sinh\theta_{k'} \ a_{-k'}] \\ &= \cosh\theta_k \cosh\theta_{k'}[a_k, \ a_{k'}^\dagger] + \sinh\theta_k \sinh\theta_{k'}[a_{-k}^\dagger, \ a_{-k'}] \\ &= \left(\cosh^2\theta_k - \sinh^2\theta_k\right)\delta_{kk'} = \delta_{kk'}\end{aligned}$$

反解出式 (9-42), 式 (9-43):

$$a_k = \cosh\theta_k \ \alpha_k - \sinh\theta_k \ \alpha_{-k}^\dagger, \quad a_{-k}^\dagger = -\sinh\theta_k \ \alpha_k + \cosh\theta_k \ \alpha_{-k}^\dagger \tag{9-45}$$

可以将哈密顿量用准粒子算符写出. 调整参量 θ_k 使非对角项 $(\alpha_k^\dagger\alpha_{-k}^\dagger + \alpha_k\alpha_{-k})$ 的系数为零, 这就给出参量 θ_k 的值为

$$\tanh 2\theta_k = \frac{\dfrac{n_0\bar{v}}{\Omega}}{\omega_k} \tag{9-46}$$

哈密顿量形式如下

$$H = \sum_{k\neq 0}\varepsilon_k\alpha_k^\dagger\alpha_k + \frac{N^2 v\,(0)}{2\Omega} + \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}(\varepsilon_k - \omega_k) \tag{9-47}$$

其中

$$\varepsilon_k = \sqrt{\omega_k^2 - \left(\frac{n_0\bar{v}}{\Omega}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)^2 + 2\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)\left(\frac{n_0\bar{v}\,(k)}{\Omega}\right)} \tag{9-48}$$

这正是没有相互作用的准粒子的哈密顿量. 忽略掉几个常数项, 本征值为

$$E = \sum_k n_k\varepsilon_k \tag{9-49}$$

式 (9-48) 中准粒子激发能有如下性质

$$\varepsilon_k \to 0, \quad \text{当 } k \to 0\text{时} \tag{9-50}$$

这就是 Goldstone 激发态. 显然, 基态 $|\varPsi_0\rangle$ 是可以被任意一个准粒子湮没算符 α_k 湮没的:

$$\alpha_k|\varPsi_0\rangle = 0, \quad \forall\, k \tag{9-51}$$

激发态有如下形式

$$\left(\alpha_{k_1}^{\dagger}\right)^{n_1}\left(\alpha_{k_2}^{\dagger}\right)^{n_2}\cdots|\varPsi_0\rangle \tag{9-52}$$

显然准粒子基态可以用原来的产生算符 $a_k^{\dagger}$ 写出

$$|\varPsi_0\rangle=\sqrt{Z}\exp\{-\sum_{k_i}\tanh\theta_{k_i}\,a_{k_i}^{\dagger}a_{-k_i}^{\dagger}\}|0\rangle \tag{9-53}$$

其中

$$Z=\prod_{k_i}\left(1-\tanh^2\theta_{k_i}\right) \tag{9-54}$$

这意味着准粒子基态是真空、2 粒子态、4 粒子态、　的一个组合, 非常复杂. 为了诠释 Goldstone 定理, 注意 $\psi(0)$ 在基态的期望值非零

$$\langle\varPsi_0|\psi(0)|\varPsi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{\varOmega}}\langle\varPsi_0|a_0|\varPsi_0\rangle=\sqrt{\frac{n_0}{\varOmega}}\neq 0 \tag{9-55}$$

其中用到了 $k\neq 0$ 时, 由于动量守恒而得出的 $\langle\varPsi_0|a_k|\varPsi_0\rangle=0$. 由式 (9-28) 中的对易关系, 可知这就是对称性破缺的条件

$$Q|\varPsi_0\rangle\neq 0 \tag{9-56}$$

准粒子激发态在 $k\to 0$ 时能量 ε_k 趋近于零, 正是 Goldstone 定理所意味着的 Goldstone 激发.

Landau 超流体判据 [30]

接下来讨论这个理论中超流性的表现. 这一性质来源于低温下, 质量为 M 的物体以低于临界速度 v_{c} 的速度 v 在液氦中移动时, 不会因黏性而减速. 在微观层面, 黏性引起的减速可以用物体 M 的能动量部分用于将流体中粒子激发来解释.

考虑一个质量为 M 的物体以常速度 V 在 He 中运动. 假定激发能 $\varepsilon(p)$ 会令流体速度由 V 减小到 V_1, 由能量守恒有

$$\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}MV_1^2+\varepsilon(p) \tag{9-57}$$

动量守恒有

$$M\boldsymbol{V}=M\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{p} \tag{9-58}$$

消去 $\boldsymbol{V}_1$ 得到

$$\varepsilon(p)-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{V}+\frac{p^2}{2M}=0 \tag{9-59}$$

认为 M 足够大, 忽略 $\frac{p^2}{2M}$ 项, 有

$$pV\cos\theta = \varepsilon(p) \qquad \text{或} \quad V \geqslant \frac{\varepsilon(p)}{p} \tag{9-60}$$

其中, θ 是 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 的夹角. 因此得到临界速度

$$v_{\mathrm{c}} = \left[\frac{\varepsilon(p)}{p}\right]_{\min} \tag{9-61}$$

对于 $v \leqslant v_{\mathrm{c}}$, 没有激发, 称为超流体. 对于式 (9-48) 给出的能量本征值, 可以发现 v_{c} 对于小的 k 是非零的, 从而体现了超流体的性质.

9.3 相对论性系统中对称性自发破缺

现在讨论相对论性系统中的对称性自发破缺. 对称性自发破缺导致的物理结果对于整体对称性和局域对称性来说是很不一样的, 分开进行讨论.

9.3.1 整体对称性

1. 分立对称性

考虑 $\lambda\phi^4$ 理论, 拉氏量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu\phi)^2 + \mu^2\phi^2] - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \tag{9-62}$$

有分立对称性 $\phi \to -\phi$. 这个例子中不会有 Goldstone 玻色子, 我们只用它来说明非零的真空期望值是如何出现的. 它的共轭动量为

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi \tag{9-63}$$

哈密顿量为

$$H = \pi\partial_0\phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 - \mu^2\phi^2] + \frac{1}{4}\phi^4 \tag{9-64}$$

考虑经典情况. 将哈密顿量写为动能与势能的和, 即

$$H = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + V_{\text{eff}}(\phi), \quad V_{\text{eff}} = (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \tag{9-65}$$

求解经典最小值, 取 $\nabla\phi = 0$. 对于 $\mu^2 > 0$, 最小值在如下情况取到

$$\phi = \pm v, \quad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{9-66}$$

这和前面讨论的 Landau-Ginzburg 平均场理论很相似. 为简便起见, 取 $\phi = v$, 对称性 $\phi \longrightarrow -\phi$ 已经破缺. 将这个量子场在最小值附近展开

$$\phi = \phi' + v \tag{9-67}$$

即有

$$\langle\phi\rangle = v, \quad \langle\phi'\rangle = 0 \tag{9-68}$$

从而得到

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi')^2 - \left(\mu^2\right)\phi'^2 - \lambda v \phi'^3 - \frac{\lambda}{4}\phi'^4 \tag{9-69}$$

现在 ϕ'^2 的系数已变号, 可以当成质量项, 从而得到 ϕ' 质量为 $\sqrt{2\mu^2}$. 在这种情况下没有 Goldstone 玻色子, 因为对称性是分立的而非连续的. 这个简单的例子给出了在 $\mu^2 > 0$ 的情况下, 为了使基态能量达到最小值, 而产生的对称性破缺 $\langle\phi\rangle = v$.

对称性自发破缺和重整化

注意, 在 SSB 之前, 有 μ, λ 和场算符 ϕ 这三个参量来吸收发散, 而在 SSB 之后, 有另一个参数 v, 当然它并不是独立的: $v = \sqrt{\dfrac{\mu^2}{\lambda}}$. 但是 SSB 改变了基本的相互作用, 在它里面加了一个 ϕ'^3 作用项, 这一项在 SSB 之前是没有的. 我们现在来讨论 SSB 和重整化之间的相互影响.

从拉氏量 (9-69) 可以计算得到表观发散度 D 为

$$D = 4 - B - n_3 \tag{9-70}$$

其中，n_3 是 ϕ^3 作用在这个图中出现的次数. 注意, 由于初始的 $\phi \to -\phi$ 变换对称性, 在耦合常数之间有一定的关系. 这使得抵消项之间也产生联系. 例如, 所有的一圈发散积分要么是二次发散的 —— 包含一个传播子, 要么是对数发散的 —— 包含两个传播子. 根据 Feynman 规则, 对于三线顶点有 $-6\mathrm{i}\lambda v$, 对于四线顶点有 $-6\mathrm{i}\lambda$, 如图 9-3 所示.



图 9-3　三线顶点与四线顶点

现在我们列出一圈发散的 1PI Green 函数:

(1) $B = 1, n_3 = 1$ 的一点函数 (蝌蚪图 (tadpole diagram), 图 9-4), 它的贡献是

$$T = (-6\mathrm{i}\lambda v)\,\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{k^2 - 2\mu^2} = (-3\mathrm{i}\lambda v)\, I_2 \tag{9-71}$$

其中

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}}{k^2 - 2\mu^2} \tag{9-72}$$

为了消除这个发散, 需要在拉氏量中加一个抵消项 $D\phi'$, 其中

$$D = -3\lambda v I_2 \tag{9-73}$$



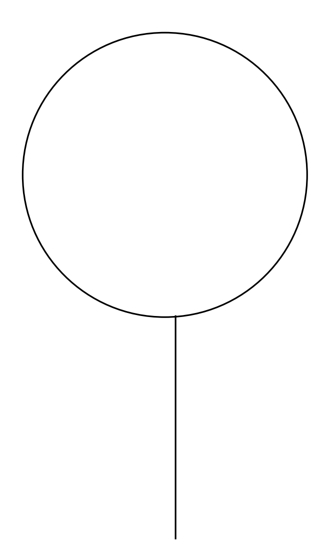


图 9-4　$D = 2$, 二次发散的蝌蚪图

(2) $B = 2, n_3 = 0, n_4 = 1$ 的两点函数 (图 9-5). 这里 n_4 是 ϕ^4 作用在 Feynman 图中出现的次数. 它对自能的贡献是

$$\Sigma_1(0) = (-6\mathrm{i}\lambda)\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}}{k^2 - 2\mu^2} = -3\mathrm{i}\lambda I_2 \tag{9-74}$$

这是通常的二次发散的自能图, 需要的抵消项形式是 $A_1\phi'^2$, 其中

$$A_1 = -\frac{3}{2}\lambda I_2 \tag{9-75}$$

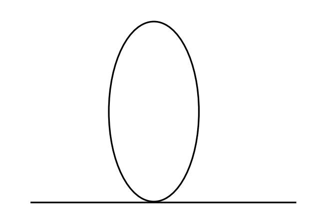


图 9-5　$D = 2$, 二次发散的自能图

(3) $B=2, n_3=2$ 的两点函数 (图 9-6), 这个图有

$$D=0 \tag{9-76}$$

它的贡献是

$$\Sigma_2(0)=(-6\mathrm{i}\lambda v)^2\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{\mathrm{i}}{k^2-2\mu^2}\right)^2=18\mathrm{i}\lambda^2v^2I_4 \tag{9-77}$$

其中

$$I_4=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{\mathrm{i}}{k^2-2\mu^2}\right)^2 \tag{9-78}$$

抵消项是 $A_2\phi'^2$, 其中

$$A_2=9\lambda^2v^2I_4 \tag{9-79}$$

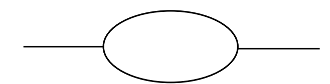


图 9-6 $D=0$, 对数发散的自能图

(4) $B=3, n_3=1, n_4=1$ 的三点函数 (图 9-7), 它的贡献是

$$\Gamma_3(0)=3(-6\mathrm{i}\lambda v)(-6\mathrm{i}\lambda)\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{\mathrm{i}}{k^2-2\mu^2}\right)^2=54\mathrm{i}\lambda^2vI_4 \tag{9-80}$$

抵消项是 $-B\phi'^3$, 其中

$$B=\frac{1}{3!}54\lambda^2vI_4=9\lambda^2vI_4 \tag{9-81}$$

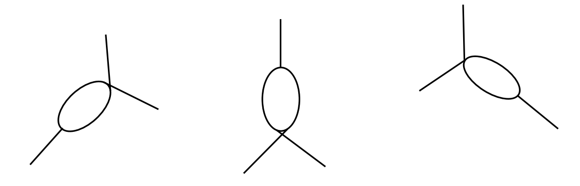


图 9-7 $D=0$, 对数发散的三点函数

(5) $B=4, n_4=2$ 的四点函数 (图 9-8), 它的贡献是

$$\Gamma_4(0)=3(-6\mathrm{i}\lambda)^2\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{\mathrm{i}}{k^2-2\mu^2}\right)^2=54\mathrm{i}\lambda^2I_4 \tag{9-82}$$

抵消项的形式是 $\frac{1}{4}C\phi'^4$, 其中

$$C=-\frac{1}{4!}54\lambda^2I_4=9\lambda^2I_4 \tag{9-83}$$

可以看到, 一圈图的发散只包含两个积分: I_2 和 I_4. 总的一圈抵消项是

$$\delta V\left(\phi'\right)=\left(A_1+A_2\right)\phi'^2+B\phi'^3+\frac{C}{4}\phi'^4+D\phi' \tag{9-84}$$

一圈近似下的有效势是

$$\begin{aligned}V_1\left(\phi'\right)=&V\left(\phi'\right)+\delta V\left(\phi'\right)\\=&\left(\mu^2+A\right)\phi'^2+\left(B+\lambda v\right)\phi'^3+\frac{1}{4}\left(\lambda+C\right)\phi'^4+D\phi'\end{aligned} \tag{9-85}$$

其中 $A=A_1+A_2$.

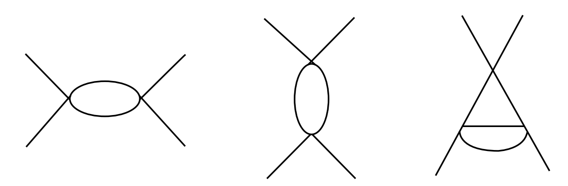


图 9-8 $D=0$, 对数发散的四点函数

设 δv 为 VEV 由于一圈贡献而出现的偏移量

$$\left.\frac{\delta V_1\left(\phi'\right)}{\delta\phi'}\right|_{\phi'=\delta v}=0 \tag{9-86}$$

即

$$2\left(\mu^2+A\right)\delta v+3\left(B+\lambda v\right)\left(\delta v\right)^2+\left(\lambda+C\right)\left(\delta v\right)^3+D=0 \tag{9-87}$$

由于 δv 是小量, 所以可以忽略高阶项, 得到

$$\delta v=-\frac{D}{2\left(\mu^2+A\right)}\approx\frac{-D}{2\mu^2} \tag{9-88}$$

因此为了消除 ϕ' 的线性项, 定义一个“平移”后的场 (a shifted field) 为

$$\phi''=\phi'-\delta v \tag{9-89}$$

它在一圈情况下有

$$\left\langle 0\left|\phi''\right|0\right\rangle=0 \tag{9-90}$$

用这个新的场可以把势函数写成

$$V_1\left(\phi''+\delta v\right)=a\phi''^2+b\phi''^3+\frac{c}{4}\phi''^4 \tag{9-91}$$

其中

$$\begin{aligned} c =& \lambda + C = \lambda + 9\lambda^2 I_4 \\ b =& \lambda v + B + \lambda\delta v = \lambda v + 9\lambda^2 v I_4 + \frac{3\lambda^2 v}{2\mu^2} I_2 \\ a =& \mu^2 + A + 3\delta v\lambda v = \mu^2 + 3\lambda I_2 + 9\lambda^2 v^2 I_4 \end{aligned} \tag{9-92}$$

由上面这些式子可以验证

$$b^2 - ac = 0 \tag{9-93}$$

其中丢掉了 δv 的高阶项. 因此有

$$\begin{aligned} V_1(\phi') = V_1(\phi'' + \delta v) &= a\phi''^2 + \sqrt{ac}\phi''^3 + \frac{c}{4}\phi''^4 \\ &= \frac{1}{4}\frac{a^2}{c} - \frac{a}{2}\left(\phi'' + \sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2 + \frac{c}{4}\left(\phi'' + \sqrt{\frac{a}{c}}\right)^4 \end{aligned}$$

这说明, 经过这些计算得到的结果很简单. 尽管加了抵消项, 有效势仍然有反射对称性, 其中反射变换是作用在

$$\phi = \phi'' + \sqrt{\frac{a}{c}} \tag{9-94}$$

上. 换句话说, 抵消项仍然有初始的对称性, 因为它们反映了理论的紫外性质, 软对称破缺 (soft symmetry breaking) 对它没有什么影响. 因此, 即使是对称性破缺的理论, 也只需要对称的理论的抵消项.

2. Abel 对称性

现在考虑一个有 Abel 对称性的拉氏量密度

$$L = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\phi)^2\right] - V\left(\sigma^2 + \pi^2\right) \tag{9-95}$$

且

$$V\left(\sigma^2 + \pi^2\right) = -\frac{\mu^2}{2}\left(\sigma^2 + \pi^2\right) + \frac{\lambda}{4}\left(\sigma^2 + \pi^2\right)^2 \tag{9-96}$$

这个拉氏量在 $O(2)$ 旋转下是不变的

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \sigma' \\ \pi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \tag{9-97}$$

这里旋转角 α 与时空无关, 被称为**整体**变换. 由于 α 是个连续参量, 所对应的对称性也是连续的, 因此在对称性自发破缺时应该出现 Goldstone 粒子.

为了得到经典的基态, 令势能 V 取到极小值

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \sigma\left[-\mu^2 + \lambda\left(\sigma^2 + \pi^2\right)\right] = 0 \tag{9-98}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \pi\left[-\mu^2 + \lambda\left(\sigma^2 + \pi^2\right)\right] = 0 \tag{9-99}$$

当 $\mu^2 < 0$ 时, 唯一的解是 $\sigma = \pi = 0$. 但当 $\mu^2 > 0$ 时, 最小值对应的解为

$$\sigma^2 + \pi^2 = v^2, \quad \text{且 } v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \tag{9-100}$$

最小值对应了 (σ, π) 平面内的半径为 v 的圆上所有的点. 它们互相由 $O(2)$ 旋转变换连接起来, 彼此对等. 圆上任意一个点可以被视为真空. 例如, 选择

$$\sigma = v, \quad \pi = 0 \tag{9-101}$$

对应的量子场有如下性质

$$\langle 0\,|\sigma|\,0\rangle = \nu, \quad \langle 0\,|\pi|\,0\rangle = 0 \tag{9-102}$$

因此 $O(2)$ 对称性在真空态破缺. 利用微扰论得到粒子能谱, 考虑极小值附近足够小的振动, 定义

$$\sigma' = \sigma - v \tag{9-103}$$

拉氏量密度可以写为

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu \sigma'\right)^2 + \left(\partial_\mu \phi\right)^2\right] - \mu^2 \sigma'^2 - \lambda v \sigma'\left(\sigma'^2 + \pi^2\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\sigma'^2 + \pi^2\right)^2 \tag{9-104}$$

其中没有 π 场的二阶项, 而 π 就是零质量的 Goldstone 玻色子. 注意, 场论中零质量的粒子对应长程力. 自然界中, 除了光子和引力子外没有其他零质量粒子, 而这两者的自旋都非零. 这就是 Goldstone 玻色子在粒子物理中没有太多应用的原因.

$\langle 0|\sigma|0\rangle = \nu \neq 0$ 这一选择是任意的. 若令 $\langle 0|\pi|0\rangle = \nu \neq 0$, 也能得到同样的物理结果. 仍有一个 Goldstone 粒子和一个有质量的粒子的存在, 只是粒子名称互换.

在 Abel 对称性的条件下, 只有一个生成元, 要么是 $\mu^2 < 0$ 的情况下, 对称性不被破坏; 要么是在 $\mu^2 > 0$ 的情况下, 对称性完全破缺. 同时, 注意到上述推论中对称性破缺的产生子的数量与 Goldstone 玻色子的数量相同. 事实上, 这个关系在比 $U(1)$ 更普遍的对称性下也是适用的.

现在从 Goldstone 定理出发讨论 Goldstone 粒子. 取无穷小变换

$$\delta\sigma = -\theta\pi, \quad \delta\pi = \theta\sigma \tag{9-105}$$

对应这一对称性的 Noether 流为

$$J_\mu = -\left[(\partial_\mu \sigma)\,\pi - (\partial_\mu \pi)\,\sigma\right] \tag{9-106}$$

守恒荷为

$$Q = \int \mathrm{d}^3 x J_0 = -\int \mathrm{d}^3 x \left[(\partial_0 \sigma)\,\pi - (\partial_0 \pi)\,\sigma\right] \tag{9-107}$$

守恒荷与场的对易关系为

$$[Q, \pi(0)] = \sigma(0), \quad [Q, \sigma(0)] = -\pi(0) \tag{9-108}$$

因此, 如果 $\langle 0|\sigma|0\rangle = \nu \neq 0$, 对称性自发性破缺, 且 π 场将产生 Goldstone 玻色子.

另一种得到 Goldstone 玻色子的方法是考虑势能项 $V\left(\sigma^2+\pi^2\right)$ 的对称性. 在 $U(1)$ 变换下, 有效势能项的不变性给出

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \sigma}\delta\sigma + \frac{\partial V}{\partial \pi}\delta\pi = -\frac{\partial V}{\partial \sigma}\pi + \frac{\partial V}{\partial \pi}\sigma = 0 \tag{9-109}$$

对 σ 作微分在极小值的条件下得到

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}\pi + \frac{\partial^2 V}{\partial \pi \partial \sigma}\sigma + \frac{\partial V}{\partial \pi} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \pi \partial \sigma}\right|_{\min} v = 0 \tag{9-110}$$

同样地, 对 π 作微分

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial \pi}\pi - \frac{\partial V}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\sigma = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\right|_{\min} v = 0 \tag{9-111}$$

因此在极小值时, 二阶导数矩阵, 即质量矩阵为

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial \pi} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial \pi} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} \end{pmatrix}_{\min} = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}\right|_{\min} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9-112}$$

上式给出一个零质量的粒子与一个有质量的粒子, 零质量的粒子就是 Goldstone 粒子.

Goldstone 玻色子和重整化

我们已经看到, Goldstone 玻色子的质量在树图阶段是 0. 我们现在来探讨, 在考虑了高阶效应之后, 它是否还会保持是无质量的? 从 Goldstone 定理的观点来看, 我们期望这个无质量的特性会保持到高阶, 因为 Goldstone 定理与微扰论无关. 不过, 在一圈近似下对此作个说明是有益的. 为此, 我们需要验证质量重整

化的抵消项 δm^2 是 0. 这一点必须成立, 因为它不能被吸收进物理的 π 质量的任何重新定义中. 我们知道自能图的展开是

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(0) + \Sigma'(0)p^2 + \tilde{\Sigma}(p^2) \tag{9-113}$$

其中, δm^2 就是 $\Sigma(0)$. Feynman 规则如图 9-9 所示. 由此可以计算出图 9-10 中的一圈图是

$$\begin{aligned}
\Sigma_a(0) &= (-2\mathrm{i}\lambda v)\,\frac{\mathrm{i}}{2\mu^2}\,(-6\mathrm{i}\lambda v)\,\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{k^2-2\mu^2} = 3\lambda I\left(2\mu^2\right)\\
\Sigma_b(0) &= (-2\mathrm{i}\lambda)\,\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{k^2-2\mu^2} = \lambda I\left(2\mu^2\right)\\
\Sigma_c(0) &= (-2\mathrm{i}\lambda v)\,\frac{\mathrm{i}}{-2\mu^2}\,(-2\mathrm{i}\lambda v)\,\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{k^2} = \lambda I\,(0)\\
\Sigma_d(0) &= (-6\mathrm{i}\lambda v)\,\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{k^2} = 3\lambda I\,(0)\\
\Sigma_e(0) &= (-2\mathrm{i}\lambda v)^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{k^2}\frac{\mathrm{i}}{k^2-2\mu^2} = 2\lambda[I\left(2\mu^2\right) - I(0)]
\end{aligned} \tag{9-114}$$

其中

$$I\left(m^2\right) = \int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2} \tag{9-115}$$

它们总的贡献是

$$\Sigma\,(0) = \Sigma_a\,(0) + \Sigma_b\,(0) + \Sigma_c\,(0) + \Sigma_d\,(0) + \Sigma_e\,(0) = 0 \tag{9-116}$$

因此 π 粒子依然是无质量的, 和 Goldstone 定理所要求的一样.

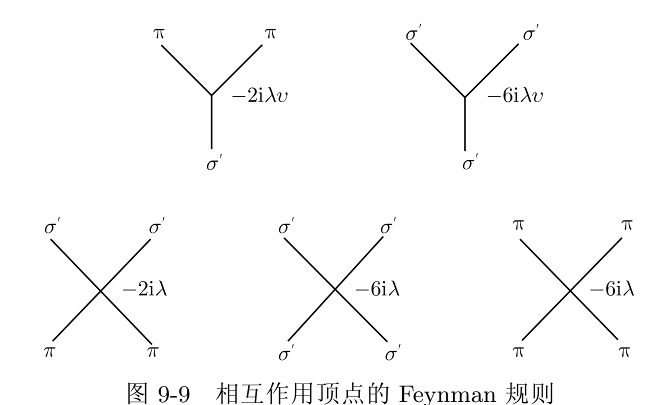


图 9-9　相互作用顶点的 Feynman 规则

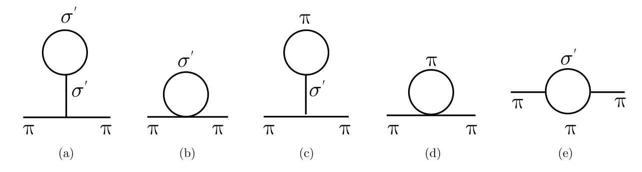


图 9-10 π 粒子的自能图

3. 非 Abel 对称性

对于非 Abel 对称性, 对称性破缺的结构更为复杂. 考虑如下形式的拉氏量

$$L=\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\sigma)^2+(\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2\right]-V\left(\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2\right) \tag{9-117}$$

其中

$$V\left(\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2\right)=-\frac{\mu^2}{2}\left(\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2\right)+\frac{\lambda}{4}\left(\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2\right)^2 \tag{9-118}$$

及

$$\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3) \tag{9-119}$$

如果在四维空间 $\phi_i=(\sigma,\pi_1,\pi_2,\pi_3)$ 中做旋转, 这个拉氏量是不变的

$$\phi_i\longrightarrow\phi_i'=R_{ij}\phi_j,\quad R:\ 4\times4\ \text{的矩阵, 满足}\ R^{\mathrm{T}}R=RR^{\mathrm{T}}=1 \tag{9-120}$$

这是一个非 Abel 的对称性. 如果四维旋转角度 α 是时空无关的, 则这是整体变换. 求势能 V 的极小值, 可以得到

$$\frac{\partial V}{\partial\sigma}=\sigma\left[-\mu^2+\lambda\left(\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2\right)\right]=0 \tag{9-121}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\pi_i}=\pi_i\left[-\mu^2+\lambda\left(\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2\right)\right]=0 \tag{9-122}$$

对于 $\mu^2>0$, 极小值满足

$$\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2=v^2,\quad v^2=\frac{\mu^2}{\lambda} \tag{9-123}$$

因此极小值位于四维空间 $(\sigma,\boldsymbol{\pi})$ 中一个半径为 v 的球面上. 不妨令

$$\langle0\,|\sigma|\,0\rangle=\nu,\quad\langle0|\boldsymbol{\pi}|0\rangle=0 \tag{9-124}$$

$O(4)$ 对称性在真空态破缺. 然而仍有 $O(3)$ 对称性未被破缺, 因为在 (π_1,π_2,π_3) 空间中转动仍不改变最小值.

考虑极小值附近小的振动, 定义

$$\sigma'=\sigma-v \tag{9-125}$$

拉氏量密度为

$$L=\frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu\sigma'\right)^2+\left(\partial_\mu\phi\right)^2\right]-\mu^2\sigma'^2-\lambda v\sigma'\left(\sigma'^2+\pi^2\right)-\frac{\lambda}{4}\left(\sigma'^2+\pi^2\right)^2 \tag{9-126}$$

没有 $\boldsymbol{\pi}$ 场量的二阶项, $\boldsymbol{\pi}$ 即为零质量 **Goldstone 玻色子**. 无质量粒子将会导出长程力, 与实验现象不相符.

注意, 在这种情况下, $O(4)$ 对称性自发破缺, 系统仍保有 $O(3)$ 对称性. 前者有 6 个生成元, 后者有 3 个生成元. 破缺的生成元数目为 3, 正是 Goldstone 玻色子的数目. 这意味着

$$\text{破缺的生成元数目} = \text{Goldstone 玻色子数目} \tag{9-127}$$

是对称性自发破缺的一个一般特性.

4. Nambu-Jona-Lasinio 模型

这是 Nambu 的对称性自发破缺首次应用在相对论性场论上. Nambu 与 Jona-Lasinio [28] 写下了一个模型, 利用对称性自发破缺解释核子相互作用中质量的来源. 这个模型仅用来说明对称性自发破缺的结构, 实际用途不大. 拉氏量具有如下形式

$$L=\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi+G\left[\left(\bar{\psi}\psi\right)^2-\left(\bar{\psi}\gamma_5\psi\right)^2\right] \tag{9-128}$$

为得到拉氏量中的对称性, 将其改写为

$$L=\bar{\psi}_{\mathrm{L}}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\mathrm{L}}+\bar{\psi}_Ri\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\mathrm{R}}+4G\left(\bar{\psi}_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}}\right)\left(\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}}\right) \tag{9-129}$$

显然此式在 ψ_{L} 与 ψ_{R} 各自的相变换下都保持不变, 即手征 $U(1)_{\mathrm{L}}\times U(1)_{\mathrm{R}}$ 对称性. 为了由此得到费米子质量, 将拉氏量写成

$$L=L_0+L_{\mathrm{int}} \tag{9-130}$$

其中

$$L_0=\bar{\psi}\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m\right)\psi,\quad L_{\mathrm{int}}=m\bar{\psi}\psi+G\left[\left(\bar{\psi}\psi\right)^2-\left(\bar{\psi}\gamma_5\psi\right)^2\right] \tag{9-131}$$

这里, 为了方便讨论对称性自发破缺, 引进一个质量项 $m\bar{\psi}\psi$, 参量 m 是任意的. 费米子的传播子有如下形式

$$\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(p)=\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-\Sigma(p,m)} \tag{9-132}$$

其中, $\Sigma\left(p,m\right)$ 是通常的单粒子自能. 若令参量 m 为物理质量, 则可从传播子 $S_{\mathrm{F}}(p)$ 得到

$$m=\left.\Sigma\left(p,m\right)\right|_{\not{p}=m} \tag{9-133}$$

由此得到传播子 $S_{\mathrm{F}}(p)$ 在 $\not{p}=m$ 处出现奇点. Nambu 和 Jona-Lasinio 做了一个近似, 只考虑最低阶的自能

$$\Sigma\left(p,m\right)|_{\not{p}=m}=4G\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{\left(2\pi\right)^4}\frac{m}{k^2-m^2} \tag{9-134}$$

由此得到了自洽条件

$$m=4G\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{\left(2\pi\right)^4}\frac{m}{k^2-m^2} \tag{9-135}$$

显然, $m=0$ 是上式的一个解, 对应未破缺的对称性. 上式也有一项非零解

$$1=4G\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{\left(2\pi\right)^4}\frac{1}{k^2-m^2} \tag{9-136}$$

其中, m 是非零的, 这就是对称性自发破缺. 注意式 (9-136) 中积分是二阶发散的, 需要正规化处理. 利用紫外截断 $\varLambda$ 可以得到

$$\frac{4\pi^2}{G\varLambda^2}=1-\frac{m^2}{\varLambda^2}\ln\left(\frac{\varLambda^2}{m^2}+1\right) \tag{9-137}$$

由于等式右端小于 1, 需要耦合常量满足不等式

$$G>\frac{4\pi^2}{\varLambda^2} \tag{9-138}$$

以得到 m 的实值解. 在这种情况下, 费米子具有非零质量, 对称性自发破缺. 可以证明, 在满足对称性破缺条件 (9-138) 时, 真空期望值 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ 也是非零的, Goldstone 粒子对应于算符 $\bar{\psi}\gamma_5\psi$. 这是一个算符组合的真空期望值而导致的对称性破缺, 称为费米凝聚态 (fermion condensate), Goldstone 玻色子对应一个算符组合而不是一个基本的标量场.

注意强相互作用理论 QCD 中低能部分可以用类似 Nambu-Jona-Lasinio 模型的理论描述. 近似的手征对称性 $SU(3)\times SU(3)$ 被夸克凝聚态 $\langle\bar{q}q\rangle$ 破缺, 赝标量介子 π, K 和 η 就是对应的近似 Goldstone 玻色子.

9.3.2　局域对称性

局域对称性的自发破缺对电弱作用理论的形成有重大的意义. SSB 理论最重要的特点是规范玻色子质量的产生. 对于这一点, 我们将在下文说明局域的 Abel 与非 Abel 对称性对于对称性自发破缺没有本质区别.

1. Abel 对称性

为了从整体对称性过渡到局域对称性, 需要引入规范场, 以构建协变微分. 以 9.3.1 节提到的 $O(2)$ 为例说明这一点. 将拉氏量改写为

$$L=\left(\partial_\mu\phi\right)^\dagger\left(\partial^\mu\phi\right)+\mu^2\phi^\dagger\phi-\lambda\left(\phi^\dagger\phi\right)^2 \tag{9-139}$$

其中, $\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma+\mathrm{i}\pi)$. 这种形式里, 对称变换只是乘上 $U(1)$ 的相因子

$$\phi\longrightarrow\phi'=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\phi \tag{9-140}$$

这是一个具有整体对称性的拉氏量. 为了得到局域对称性, 需要引入规范场以构建协变微分 $D_\mu\phi$ 与场张量 $F_{\mu\nu}$,

$$D_\mu\phi=(\partial_\mu-\mathrm{i}gA_\mu)\,\phi,\quad F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{9-141}$$

拉氏量写为

$$L=(D_\mu\phi)^\dagger\,(D^\mu\phi)+\mu^2\phi^\dagger\phi-\lambda\left(\phi^\dagger\phi\right)^2-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{9-142}$$

在如下局域对称性变换下保持不变

$$\phi\,(x)\longrightarrow\phi'\,(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(x)}\phi\,(x) \tag{9-143}$$

$$A_\mu\,(x)\longrightarrow A'_\mu\,(x)=A_\mu\,(x)-\partial_\mu\alpha\,(x) \tag{9-144}$$

当 $\mu^2>0$ 时, 势能的极小值

$$V\,(\phi)=-\mu^2\phi^\dagger\phi+\lambda\left(\phi^\dagger\phi\right)^2 \tag{9-145}$$

在如下条件取到

$$\phi^\dagger\phi=\frac{v^2}{2},\quad v^2=\frac{\mu^2}{\lambda} \tag{9-146}$$

这意味着场算符 ϕ 有真空期望值

$$|\langle 0\,|\phi|\,0\rangle|=\frac{v}{\sqrt{2}} \tag{9-147}$$

如果用 ϕ_1,ϕ_2 表示 ϕ:

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\phi_1+\mathrm{i}\phi_2) \tag{9-148}$$

可选择

$$\langle 0\,|\phi_1|\,0\rangle=v,\quad\langle 0\,|\phi_2|\,0\rangle=0 \tag{9-149}$$

类似此前的推导, 定义

$$\phi'_1=\phi_1-v,\quad\phi'_2=\phi_2 \tag{9-150}$$

则 ϕ'_2 对应 Goldstone 玻色子. 在这里最重要的一点是, 协变微分 $D_\mu\phi$ 将为规范玻色子赋予质量项

$$\begin{aligned}|D_\mu\phi|^2=&|(\partial_\mu-\mathrm{i}gA_\mu)\,\phi|^2\\=&\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi'_1+gA_\mu\phi'_2\right)^2+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi'_2-gA_\mu\phi'_1\right)^2-gvA^\mu\left(\partial_\mu\phi'_2+gA_\mu\phi'_1\right)+\frac{g^2v^2}{2}A^\mu A_\mu\end{aligned} \tag{9-151}$$

最后一项即为规范玻色子质量

$$M = gv \tag{9-152}$$

然而式 (9-151) 中的交叉项

$$-gvA^{\mu}\partial_{\mu}\phi_2' \tag{9-153}$$

使得 A^{μ} 与 ϕ_2' 混合起来了, 物理解释变得复杂. 为了简化分析, 我们希望去掉交叉项. 首先将复标量场写成指数形式

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[v+\eta\left(x\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x)/v}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[v+\eta(x)+\mathrm{i}\xi(x)+\cdots\right]\end{aligned}$$

因此, 用新的场量 η 与 ξ 替代 ϕ_1' 和 ϕ_2'. 现在利用规范变换去掉 ξ. 定义另一个新的场量

$$\phi'' = \exp\left(-\mathrm{i}\xi/v\right)\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[v+\eta\left(x\right)\right] \tag{9-154}$$

且

$$B_{\mu} = A_{\mu} - \frac{1}{gv}\partial_{\mu}\xi \tag{9-155}$$

这里 ξ 很像式 (9-144) 给出的规范变换中的规范函数. 新的拉氏量写为如下形式

$$L = \frac{1}{2}\left|\partial_{\mu}\eta - \mathrm{i}g\left(v+\eta\right)\right|^2 + \frac{\mu^2}{2}\left(v+\eta\right)^2 - \frac{\lambda}{4}\left(v+\eta\right)^4 - \frac{1}{4}\left(\partial_{\mu}B_{\nu}-\partial_{\nu}B_{\mu}\right)^2 \tag{9-156}$$

Goldstone 玻色子 ξ 从拉氏量中消失了, 其原因在于原本的拉氏量是规范变换不变的. 从式 (9-155) 可以看出 ξ 是矢量规范玻色子的纵向部分. 值得注意的是, 在对称性自发破缺之后, 零质量的规范玻色子与零质量的 Goldstone 玻色子结合, 成为有质量的矢量介子, 所有与零质量粒子有关的长程力 (如 Goldstone 和规范粒子) 都消失了.

对称性自发破缺只影响规范玻色子和标量粒子的相互作用, 不会改变规范玻色子与其他粒子的相互作用. 例如, 如果理论中有费米子的存在, 则规范粒子与费米子的耦合将不变, 也不会看到对称性破缺的现象. 然而, 如果耦合是标量场与费米子之间的, 则费米子将会通过 Yukawa 耦合而受到对称性破缺的影响. 后文关于标准模型的讨论中我们将阐明这一点. 这一卓越的发现最初是由三组科学家独立作出的, 分别是 Higgs, Englert 和 Brout 以及 Gurlnik、Hagen 和 Kibble. 通常将之简称为 Higgs 现象. 如我们将在第 10 章说明的, 这一机制在构建电弱相互作用的标准模型中起到了至关重要的作用.

2. 非 Abel 对称性

考虑最简单的情况, 标量场是局域 $SU(2)$ 对称性的二重态

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{9-157}$$

局域对称性下这个场的拉氏量为

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\ , \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{9-158}$$

其中

$$V(\phi) = -\mu^2(\phi^\dagger\phi) + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{9-159}$$

与之前一样, 协变微分为

$$D^\mu\phi = (\partial^\mu - \mathrm{i}g\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}^\mu)\phi \tag{9-160}$$

对称性自发破缺由有效势能项 $V(\phi)$ 产生, 极值点在

$$\frac{\partial V}{\partial\phi_i} = \left[-\mu^2 + 2(\phi^\dagger\phi)\right]\phi_i = 0 \tag{9-161}$$

若 $\phi_i \neq 0$, 则得到

$$-\mu^2 + 2(\phi^\dagger\phi) = 0 \tag{9-162}$$

不妨令

$$\langle\phi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix}, \quad \nu = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{9-163}$$

定义

$$\phi' = \phi - \langle\phi\rangle_0 \tag{9-164}$$

由协变微分得到规范玻色子的质量项

$$(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) = [\partial_\mu - \mathrm{i}g\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu}{2}(\phi' + \langle\phi\rangle_0)]^\dagger[\partial^\mu - \mathrm{i}g\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu}{2}(\phi' + \langle\phi\rangle_0)] \tag{9-165}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}g^2\langle\phi\rangle_0(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}^\mu)\langle\phi\rangle_0 = \frac{1}{2}(\frac{gv}{2})^2\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{A}^\mu \tag{9-166}$$

所有的规范玻色子都得到同样的质量

$$M_A = \frac{1}{2}g\nu \tag{9-167}$$

对称性完全破缺. 把标量场写成

$$\phi(x)=\exp\left[\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\xi}(x)}{\nu}\right]\begin{pmatrix}0\\ \frac{\nu+\eta(x)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \tag{9-168}$$

利用规范变换

$$\begin{aligned}\phi'(x)=&U(x)\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \nu+\eta(x)\end{pmatrix}\\ \frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{B}_\mu}{2}=&U\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu}{2}U^{-1}-\frac{\mathrm{i}}{g}[\partial_\mu U]U^{-1},\quad U(x)=\exp\left[\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\xi}}{\nu}\right]\end{aligned} \tag{9-169}$$

来消去 Goldstone 模式 $\boldsymbol{\xi}(x)$. 如同之前证明的, 这就是规范玻色子的纵向模式.

总而言之, 可以得出结论: 局域对称性的自发破缺, 不论是否是 Abel 的, 都会将 Goldstone 模式与零质量的规范玻色子结合起来, 得到有质量的矢量玻色子. 同时, 规范耦合的普遍性仍然保持不变.

第 10 章　电弱统一理论

10.1　弱作用的基本特征

最近半个世纪以来, 高能物理领域最激动人心的一个成果是统一了电磁作用和弱作用的标准模型的建立, 称为电弱统一理论. 这个理论结合了局域对称性 (第 8 章) 以及对称性自发破缺 (第 9 章), 并且是可重整的. 它与实验符合得很好. 通向这个辉煌成果的路是漫长和艰苦的. 我们将大致沿着历史的发展方向来讲述建立这个理论的关键步骤.

10.1.1　弱作用过程的分类

由于强相互作用对强子弱作用的影响处理起来比较复杂, 所以为了方便起见, 在研究弱作用过程时需要将强子 (hadron) 参与的过程与轻子 (lepton) 参与的过程区分开讨论.

1. *轻子弱作用过程* (leptonic interactions)

这里所有粒子都是轻子, 所以没有强作用带来的影响. 相互作用很弱, 因此微扰论是适用的, 所以我们能可靠地对已知的过程进行计算. 轻子过程的例子有如下几个.

(1) μ 轻子: 平均寿命 $\approx 2.2\times10^{-6}$s, 衰变如表 10-1 所示.

表 10-1

衰变模式	分支比
$\mu^-\to e^-+\bar{\nu}_e+\nu_\mu$	98%
$\mu^-\to e^-+\bar{\nu}_e+\nu_\mu+\gamma$	$1.4\pm4\%$
$\mu^-\to e^-+\bar{\nu}_e+\nu_\mu+e^++e^-$	$3.4\pm4\times10^{-5}$
$\mu^-\to e^-+\bar{\nu}_\mu+\nu_e$	$<1.2\%$
$\mu^-\to e^-+\gamma$	$<2.4\times10^{-12}$
$\mu^-\to e^-+e^++e^-$	$<7.2\times10^{-11}$

(2) τ 轻子: 平均寿命 $\approx 3\times10^{-13}$s, $m_\tau=1776.82\pm0.16$, 衰变如表 10-2 所示.

表 10-2

衰变模式	分支比
$\tau^-\to\mu^-+\nu_\tau+\bar{\nu}_\mu$	17.41%
$\tau^-\to e^-+\nu_\tau+\bar{\nu}_e$	17.84%

理论上对这些过程的计算可以达到很高的精度. 但中微子是一种难以探测的粒子, 所以实验测量的精度受到了中微子的影响.

2. 半轻子弱作用过程 (Semi-leptonic interactions)

在这些过程中, 轻子和强子都有参与. 由于我们可以较可靠地计算轻子部分, 所以这些过程在实验上的测量常用于探究强子的性质, 类似于 ep 散射那样. 这种反应的例子有:

(1) τ 衰变.

表 10-3

衰变模式	分支比
$\tau^- \to \pi^- + \nu_\tau$	10.84%
$\tau^- \to \pi^- + \pi^0 + \nu_\tau$	25.52%
$\tau^- \to K^- + \nu_\tau$	0.7%

(2) 超子 (hyperon) 衰变.

$$\Lambda \to p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad \Lambda \to p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu \tag{10-1}$$

$$\Sigma^- \to n + e^- + \bar{\nu}_e, \quad \Sigma^- \to n + \mu^- + \bar{\nu}_\mu \tag{10-2}$$

$$\Xi^0 \to \Sigma^+ + e^- + \bar{\nu}_e, \quad \Xi^0 \to \Sigma^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu \tag{10-3}$$

3. 非轻子弱作用过程 (non-leptonic interactions)

这种过程中所有的粒子都是强子, 因此由于强作用的影响, 这种过程的研究非常困难. 不同于强作用过程, 这种过程有着较慢的衰变率以及较小的截面. 通常这些弱衰变过程中伴随着奇异数、宇称等量子数的改变. 这样的例子有:

$$K^+ \to \pi^+ + \pi^0, \quad K^0 \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$
$$\Sigma^+ \to P + \pi^0, \quad \Lambda \to P + \pi^-$$

10.1.2 弱作用中的选择定则

弱作用虽然没有古典描述, 但可以从实验上给出一些有用的规则, 总结成为选择定则. 这些选择定则在构建解释这些衰变的理论时是很有用的.

(1) 轻子数守恒.两个中微子实验表明, 来自 β 衰变的 ν

$$n \longrightarrow p + e + \nu \tag{10-4}$$

与来自 π 衰变的 ν

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu \tag{10-5}$$

并不是相同的粒子. 如果它们是相同的, 那么来自中子 β 衰变的 ν 在能量足够高的情况下能够产生 μ^+, 即

$$\nu + p \longrightarrow \mu^+ + n \tag{10-6}$$

然而, 实验上末态只能观察到 e^+ 而非 μ^+. 一个简单的解释是来自 β 衰变的 ν_e 和来自 π 衰变的伴随着 μ 的 ν_μ 不同, 并有 μ 数和电子数守恒. 其中, 我们把电子数 L_e 定义如下

$$\begin{aligned} &e^-, \nu_e \qquad L_e = 1 \\ &e^+, \overline{\nu}_e \qquad L_e = -1 \end{aligned} \tag{10-7}$$

同样地, 对 μ 数 L_μ 有

$$\begin{aligned} &\mu^-, \nu_\mu \qquad L_\mu = 1 \\ &\mu^+, \overline{\nu}_\mu \qquad L_\mu = -1 \end{aligned} \tag{10-8}$$

作为这些守恒律的结果, $\mu^\pm \to e^\pm + \gamma$ 是不可能发生的. 实验上这些反应的上限也确实很小, 比如

$$B\left(\mu^+ \to e^+ + \gamma\right) < 2.4 \times 10^{-12} \tag{10-9}$$

很多年来轻子数都被认为是守恒的, 很多实验也都符合这个守恒律, 直到中微子振荡 (neutrino oscillation) 的发现 —— 破坏了 μ 和电子数守恒. 但轻子数破坏只在中微子振荡中观察到, 并没有在其他的过程中出现过. 一种可能的解释为轻子数破坏来自于中微子大约 10^{-3}eV 的质量, 在更高能量的轻子衰变中可以忽略. 因此, 我们在除中微子振荡以外的弱过程中仍然可以近似认为轻子数守恒. 但也有可能在一些未知粒子参与的过程中, 轻子数守恒有很大的破坏.

(2) 奇异数 (strangeness) 改变, 即 $\Delta S \neq 0$ 的弱过程的概率似乎比 $\Delta S = 0$ 的过程小一个数量级左右.

(3) 在奇异数改变的弱过程中, 对强子有下列选择定则

$$\Delta S = \Delta Q \tag{10-10}$$

其中, ΔQ 为强子电荷的改变量. 例如,

$$B(K^+ \longrightarrow \pi^0\mu^+\nu_\mu) = 0.034, \quad 但 \quad B(K^+ \longrightarrow \pi^+\pi^+e^-\bar{\nu}_e) < 1.3 \times 10^{-8} \tag{10-11}$$

(4) 没有 $\Delta S = 1$ 的中性流, 例如,

$$\frac{\Gamma\left(K_L \to \mu^+\mu^-\right)}{\Gamma\left(K^+ \to \mu^+\nu\right)} \leqslant 10^{-9} \tag{10-12}$$

这里 $K_L \approx \dfrac{1}{\sqrt{2}}(K^0 + \bar{K}^0)$, S 的变化为 $+1$ 或 -1, 但强子电荷没有变化. 我们以后将会看到, 奇异数改变的中性流过程的上限很小这个实验事实在标准模型建立过程中有重要的限制作用.

(5) 没有观察到 $\Delta S=2$ 的过程. 例如,

$$B(\Xi^- \to \mathrm{n}\pi^-) < 1.9\times 10^{-5} \tag{10-13}$$

其中, 奇异数改变了 2, 分支比上限非常小.

当夸克模型建立以后, 所有的特征与强子弱流相容

$$J_\mu^{\mathrm{had}} = \left[\bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,d\cos\theta_\mathrm{c} + \bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,s\sin\theta_\mathrm{c}\right] \tag{10-14}$$

其中, $\theta_\mathrm{c}\approx 0.23$ 为 **Cabbibo 角**. 可以看到 $\Delta S=1(s\to u)$ 过程的系数 $\sin\theta_\mathrm{c}$ 比 $\Delta S=0(d\to u)$ 的过程的系数小. 注意, 将弱流写成夸克场的形式表明了它们在夸克模型的 $SU(3)$ 群下的变换性质. 另一个性质是这个强子弱流将强子电荷改变了 1.

(6) 非轻子弱作用过程

在强子弱流 J_μ^{had} 中, 存在 $\Delta I=1(d\to u)$ 和 $\Delta I=1/2(s\to d)$ 的过程. 因此在乘积 $J_\mu^{\mathrm{had}}J_\mu^{\dagger\mathrm{had}}$ 中, 对 $\Delta S=1$ 的过程有 $\Delta I=3/2$ 和 $\Delta I=1/2$. $\mathrm{K}^+\longrightarrow\pi^+\pi^0$ 只能通过哈密顿量中 $\Delta I=3/2$ 的部分进行, 这个过程被极大地压低

$$\frac{\Gamma\left(\mathrm{K}^+\longrightarrow\pi^+\pi^0\right)}{\Gamma\left(\mathrm{K}_s\longrightarrow\pi^+\pi^-\right)}\approx 1.5\times 10^{-3} \tag{10-15}$$

这称为非轻子弱过程的 $\Delta I=1/2$ 规则. 这个规则到目前为止都还没有满意的解释, 因为强作用在低能区的效应很难处理.

10.2 弱作用的唯象模型

中微子与核子 β 衰变

在对辐射的早期研究中观察到了核子中电子 e^- 的发射

$$(A,Z)\to(A,Z+1)+\mathrm{e}^- \tag{10-16}$$

其中不寻常的特征是电子能谱是连续的, 而非二体衰变中典型的锐线. 如果电子发射的机制为

$$\mathrm{n}\to\mathrm{p}+\mathrm{e}^- \tag{10-17}$$

那么能动量守恒要求电子只能有一个能量, 但实验给出了电子能量的连续分布. Pauli(1930) 建议, 在核子 β 衰变中, 是一种实验中没有测量到的新粒子 (**中微子**)带走了能量和动量 (图 10-1):

$$\mathrm{n}\to\mathrm{p}+\mathrm{e}^-+\bar{\nu}_\mathrm{e} \tag{10-18}$$

这样能量和动量守恒就不会被破坏. 早期许多 β 衰变试验中电子谱的测量表明中微子的质量为零. 由于中微子不带电, 它不与光子直接作用, 只能存在弱作用, 因而可以穿越很长的距离而不发生作用, 很难探测. 它是唯一一种既没有强作用也没有电磁作用的粒子, 它本身就是一个很特别的粒子, 它的物理效应也很特殊.

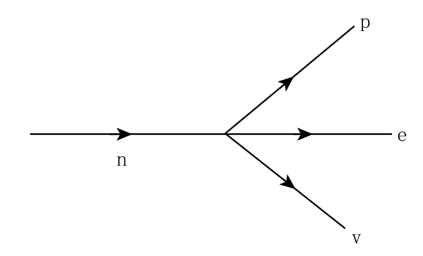


图 10-1　核子 β 衰变

10.2.1　Fermi 理论

弱作用的理论始于 1934 年, Fermi 提出类比 QED 的理论来解释 β 衰变 [31], 他将弱作用的拉氏量写为

$$\mathcal{L}_{\rm F}=\frac{G_{\rm F}}{\sqrt{2}}[\bar{p}(x)\gamma_\mu n(x)][\bar{e}(x)\gamma^\mu\nu_{\rm e}(x)]+h.c.,\quad G_{\rm F}:\text{Fermi 耦合常数} \tag{10-19}$$

这里有 4 个费米子在同一点作用, 因此有时被称为四费米子相互作用 (4-fermion interaction). 这种结构仅仅是一个猜测, 但它可以解释许多核子的 β 衰变. 与实验上 β 衰变率拟合得到耦合常数为

$$\mathrm{G}_{\rm F}\simeq\frac{10^{-5}}{M_{\rm p}^2},\quad M_{\rm p}\ \text{为质子质量} \tag{10-20}$$

相互作用强度和预期一样非常小. 这个模型对 $\Delta J=0$(初态核子和末态核子自旋一样) 的许多核子 β 衰变过程很成功. 注意耦合常数 $G_{\rm F}$ 的量纲为 -2, 因此由重整化理论可知, 这是一个不可重整的理论.

后来 Gamow-Teller 加上了作用项

$$\mathcal{L}_{\rm GT}=\frac{-G_{\rm F}}{\sqrt{2}}[\bar{p}(x)\gamma_\mu\gamma_5 n(x)][\bar{e}(x)\gamma^\mu\gamma_5\nu_{\rm e}(x)]+h.c. \tag{10-21}$$

来探讨 $\Delta J=1$(初末态自旋相差 1) 的 β 衰变. 注意, 这两种相互作用都是宇称守恒的.

10.2.2 宇称不守恒与 V-A 理论

$\theta-\tau$ 疑难 (20 世纪 50 年代)

20 世纪 50 年代观察到, θ 与 τ 这"两"种粒子有相同的质量、电荷、自旋和宽度, 却有两种宇称相反的衰变过程, 即

$$\theta \to \pi^+ + \pi^0 \qquad (\text{偶宇称}) \tag{10-22}$$

$$\tau \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \qquad (\text{奇宇称}) \tag{10-23}$$

如果假设它们是相同的粒子而同时宇称也是守恒的, 那么这两个衰变就很难理解. 1956 年, 李政道和杨振宁检验了许多的实验结果 [32], 发现从来没有明确的实验证据证明弱作用过程中宇称是守恒的, 从而大胆地提出弱作用宇称不守恒的可能性来解释上述疑难, 并提出了许多可行的实验来检验这个假设. 这是一个非常具有革命性的假设, 在这之前, 宇称守恒一直被认为是严格的. 如果你从没怀疑过, 就不会想到去寻找实验证据; 而一旦开始去寻找, 就发现弱作用确实是宇称不守恒的, 而且效应还很大. 1957 年吴健雄及其合作者的实验表明 [33], ^{60}Co 衰变有如下特征

$$\langle \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{p}\rangle \neq 0, \quad \boldsymbol{s},\boldsymbol{p}\ \text{为电子的自旋和动量} \tag{10-24}$$

这说明宇称被破坏了, 因为 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{p}$ 在宇称变换下会变号, 如果宇称守恒则期望值 $\langle \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{p}\rangle$ 应该为零. 同年, Garwin、Lederman 和 Weinrich [33] 在介子衰变中也观察到了宇称破坏. 令人惊奇的是宇称破坏的效应并不小, 和宇称守恒的项在一个数量级. 之后许多其他的实验都确认了宇称破坏的结果.

V-A 理论 (1958 年, Sudarshan 和 Marshak, Feynman 和 Gell-Mann [34])

实验中观察到的宇称破坏表明, 弱作用的形式也许可以写成为 V-A 流, 其中 V 为矢量流, A 为轴矢流, 具体形式为

$$L_{\text{eff}} = \frac{G_{\text{F}}}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger J^\mu + h.c. \tag{10-25}$$

其中

$$J_\lambda(x) = J_{l\ \lambda}(x) + J_{h\ \lambda}(x) \tag{10-26}$$

$$J_l^\lambda(x) = \bar{\nu}_{\text{e}}\gamma^\lambda(1-\gamma_5)e + \bar{\nu}_\mu\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\mu \quad (\text{轻子流}) \tag{10-27}$$

以及

$$J_h^\lambda(x) = \bar{u}\gamma^\lambda(1-\gamma_5)(\cos\theta_{\text{c}} d + \sin\theta_{\text{c}} s) \quad (\text{强子流}) \tag{10-28}$$

其中, θ_{c} 为 **Cabibbo 角** [35]. 在 J_l^λ 中, $\bar{\nu}_{\text{e}}\gamma^\lambda \text{e}$ 类似于 Fermi 提出的流, 为 V 流 (矢量流), 而对于 $\bar{\nu}_{\text{e}}\gamma^\lambda\gamma_5 e$, 易验证其时间分量为赝标量, 空间分量为轴矢量, 该流为

A 流 (轴矢流), 是出现在 Gamow-Teller 作用中的流. 在宇称变换下, 一个四矢量 $V^\mu = (V^0, \boldsymbol{V})$ 的变换形式是: $V^0 \to V^0$, $\boldsymbol{V} \to -\boldsymbol{V}$; 而对一个轴矢量 $A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$, 则有 $A^0 \to -A^0$, $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$. 因此 $V^\mu V_\mu$ 和 $A^\mu A_\mu$ 保持宇称, 而交叉项 $A^\mu V_\mu$ 破坏宇称. 注意在 V-A 形式中, 矢流 V 与轴矢流 A 的系数相等, 所有的费米子都是左手的. 对强子部分, Cabibbo 引入了混合角 $\theta_c \approx 13°$ 来解释如下事实: 奇异数改变 $(\bar{u}\gamma^\lambda s)$ 的弱衰变比奇异数守恒 $(\bar{u}\gamma^\lambda d)$ 的过程小一个数量级.

定义如下算符 (参阅第 2 章螺旋度和手征性)

$$\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi \tag{10-29}$$

可以将弱流的形式简化为

$$J_l^\lambda(x) = 2\bar{\nu}_{eL}\gamma^\lambda e_L + 2\bar{\nu}_{\mu L}\gamma^\lambda \mu_L + \cdots \tag{10-30}$$

因此只有左手分量参与到弱作用中. 尽管是唯象的, V-A 理论可以成功地解释低能情况下的很多弱作用现象.

V-A 理论的困难

(1) 不可重整. 在费米理论中, 四费米子作用算符的量纲为 6, 因此由幂次计数可知它是不可重整的. 换句话说, 高阶图越来越发散. 例如, μ 衰变中的高阶作用如图 10-2 所示. 这些发散不能由重新定义拉氏量中的物理量来吸收. 因此高阶贡献越来越发散, 不能通过重整化来消除. 或者说, 高阶贡献不受控制, 即使耦合常数很小. 我们并不清楚如何从这些项中得出有意义的结果.

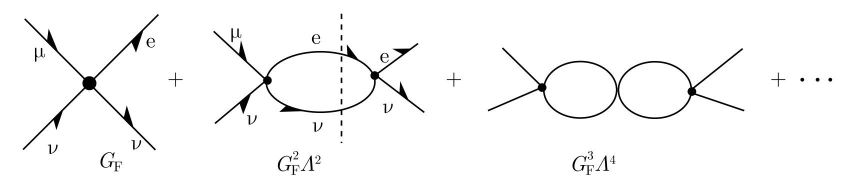


图 10-2　μ 子衰变

(2) 破坏幺正性. 现在来说明, 即使忽略高阶发散而只考虑最低阶的树图, 依然会遇到幺正性的问题. 幺正性是概率守恒的结果, 是量子理论的一个基本原理. 下面对其进行简单的描述.

在费米理论中, 高能情况下 $\nu_\mu + e \to \mu + \nu_e$ 的树图近似中只有 $J = 1$ 的分波 (partial wave), 截面有如下形式

$$\sigma(\nu_\mu e) \approx G_F^2 S, \quad S = 2m_e E \tag{10-31}$$

其中, S 是质心系中的总能平方. 这个截面随实验室系中中微子能量 E 线性增加. 但是由于总概率不能大于 1, 因此截面的增长总要有个上限, 称为幺正限 (unitarity bound). $J=1$ 粒子截面的幺正限为

$$\sigma(J=1)<\frac{1}{S} \tag{10-32}$$

因此当 $E\geqslant 300$ GeV 时 $\sigma(\nu_\mu e)$ 破坏了幺正性. 由于幺正性是概率守恒的结果, 所以它的破坏是不能接受的. 这说明, 尽管 V-A 理论可以解释许多现象, 但它不是弱作用的基本理论, 而只是一个低能区的近似理论.

10.2.3　中间矢量玻色子理论

为了改进上面的理论, 我们可以和 QED 比照, 引入一个类似于光子的矢量玻色子 W 与 V-A 流耦合, 因而称为中间矢量玻色子理论 (intermidiate vector Boson theory, IVB)

$$\mathcal{L}_\mathrm{W}=g(J_\mu W^\mu+h.c.) \tag{10-33}$$

例如, μ 衰变现在通过交换 W 玻色子来进行 (图 10-3). 因为弱作用是短程的, 所以需要 W 是有质量的: $M_\mathrm{W}\neq 0$.

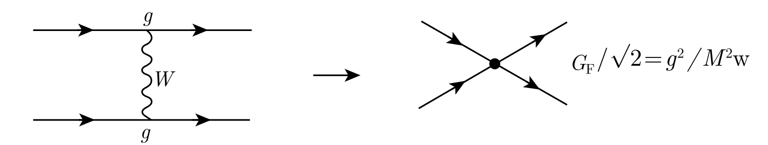


图 10-3　四费米子相互作用是 IVB 理论 g^2 阶的低能近似

利用下列形式的有质量 W 的传播子

$$\frac{-g^{\mu\nu}+\dfrac{k^\mu k^\nu}{M_\mathrm{W}^2}}{k^2-M_\mathrm{W}^2}\to\frac{g^{\mu\nu}}{M_\mathrm{W}^2}\,,\quad \text{当}|k_\mu|\ll M_\mathrm{W}\text{时} \tag{10-34}$$

如果作如下对应

$$\frac{g^2}{M_\mathrm{W}^2}=\frac{G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}} \tag{10-35}$$

可以看到这就是四费米子作用. 在这个理论中, 由于有 W 传播子, 散射过程 $\nu_\mu+\mathrm{e}\to\mu+\nu_\mathrm{e}$ 不再破坏幺正性, 但其他过程中幺正性的破坏依然存在, 比如,

$$\nu+\bar{\nu}\to\mathrm{W}^++\mathrm{W}^- \tag{10-36}$$

如果其中的 $\mathrm{W}^\pm$ 纵向极化, 也会破坏幺正限. 而且由于有质量中间玻色子传播子在高能区的严重问题, 这个理论依然是不可重整的.

本小节我们总结了弱作用规范理论之前的情况. 四费米子或中间玻色子理论都有各自的问题, 我们需要一个更基本的理论.

10.3　电弱统一理论

10.3.1　$SU(2)\times U(1)$ 模型的构造

以前讨论过, 弱作用的耦合强度似乎具有普适性(universality). 这可以由具有局域对称性的理论来解释. 1961 年, Glashow [36] 提出了正确的规范群为 $SU(2)\times U(1)$. 电弱统一理论立足于规范场的概念. 规范群的选择是建立一个规范场理论的第一步, 本节第一部分先介绍为什么需要选择 $SU(2)\times U(1)$ 作为电弱统一理论的规范群. 但在以前的理论中, 规范玻色子是无质量的, 而我们知道弱作用是短程的, 需要有质量 (甚至很重) 的传播子. 这个问题可以由局域对称性的自发破缺 (Higgs 机制) 来解决. Weinberg [22] 和 Salam [23] 将对称性自发破缺加入Glashow 的理论中, 得到了 GSW 模型 (现在称为标准模型), 这在介绍完规范群的选择之后进行讲述. 1971 年, 't Hooft 证明了理论的可重整性 [24], 高阶贡献也是可以计算的.

规范群的选择

代数方法　我们首先需要寻找理论所需的正确的局域对称群. 首先考虑旧的弱作用理论中那些有用的部分带给我们的线索. 在中间玻色子理论中, 相互作用为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{W}}=g(J_\mu W^\mu+h.c) \tag{10-37}$$

为简单起见, 略去除 ν, e 外的其余费米子, 流写为

$$J_\mu=\bar{\nu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)e \tag{10-38}$$

回顾电磁作用中, 有

$$\mathcal{L}_{em}=eJ^{em}_\mu A^\mu,\quad J^{em}_\mu=\bar{e}\gamma_\mu e \tag{10-39}$$

利用流和对称性的关系来寻找想要的那个对称群. 将电荷与弱荷定义为相应流的时间分量的积分

$$T_+=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3xJ_0(x)=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3x\nu^\dagger(1-\gamma_5)e,\quad T_-=(T_+)^\dagger \tag{10-40}$$

$$Q=\int\mathrm{d}^3xJ^{em}_0(x)=-\int\mathrm{d}^3xe^\dagger e \tag{10-41}$$

应该是群的生成元, 但这个生成元与 Q 不同. 如果假设这些荷对应某个对称群的生成元, 并且每一个荷都在局域对称性下与规范玻色子耦合, 那么它们的对易子应该构成相应群的代数. 在中间玻色子理论中, $T_\pm$ 与 $W^\pm$ 规范玻色子耦合, Q 与

光子耦合. 假设 $T_{\pm}$ 是某个代数的生成元, 由对易子 $[T_+, T_-] = 2T_3$, 得到

$$T_3 = \frac{1}{4}\int \mathrm{d}^3x[\nu^\dagger(1-\gamma_5)\nu - e^\dagger(1-\gamma_5)e] \neq Q \tag{10-42}$$

这表明, 这三个荷 T_+, T_- 和 Q 不能构成 $SU(2)$ 的代数. 原因在于, 如果电荷算符 Q 为 $SU(2)$ 的生成元, 那么它必须是无迹的, 而这里并非如此. 而且弱荷 $T_{\pm}$ 有 V-A 形式, 而电荷 Q 是纯矢量.

对这个问题, 有两种解决方案:

(1) 在构成 $SU(2)$ 代数的 T_+, T_- 和 T_3 之外, 引入一个独立的生成元 B, 使得电荷 Q 为 T_3 和 B 的线性组合. 这些生成元对应 4 个规范玻色子, 并组成群 $SU(2)\times U(1)$. 这就是我们最终采用的方案.

(2) 我们可以加入新的费米子来修改流的结构, 使得 T_+, T_- 和 Q 组成 $SU(2)$ 代数 [37]. 这里引入新的费米子将多重态推广到三重态

$$\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\begin{pmatrix} E^+ \\ \nu_\mathrm{e}\cos\alpha + N\sin\alpha \\ e^- \end{pmatrix} \tag{10-43}$$

$$\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix} E^+ \\ N \\ \mathrm{e}^- \end{pmatrix} \tag{10-44}$$

以及单态

$$\frac{1}{2}(1+\gamma_5)(N\cos\alpha - \nu_\mathrm{e}\sin\alpha) \tag{10-45}$$

则弱荷为

$$\begin{aligned} T_+ = &\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left[E^+(1-\gamma_5)(\nu_\mathrm{e}\cos\alpha + N\sin\alpha)\right] \\ &+ (\nu_\mathrm{e}\cos\alpha + N\sin\alpha)(1-\gamma_5)e + E^+(1+\gamma_5)N + N^\dagger(1+\gamma_5)e \end{aligned}$$

注意在这种情况下电磁流与 T_3 成正比, 没有中性的费米子, 因为这些粒子的 $T_3 = 0$. 另外, 对带电轻子, 左手和右手分量有相同的 T_3 量子数, 因此它们在电磁流中的形式为矢量形式. 可以验证

$$[T_+, T_-] = 2Q \tag{10-46}$$

其中

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\left[E^\dagger E - e^\dagger e\right] \tag{10-47}$$

很显然, 在这个模型中只有电磁流是中性的, 其余的流都带电. 当 1973 年弱中性流被发现之后, 这个模型被排除了.

幺正性的考虑　另外, 我们还可以从幺正性的角度来考虑, 也会发现在中间玻色子理论中引入新的轻子或规范粒子可以解决幺正性的问题. 考虑过程 $\nu+\bar{\nu}\to \mathrm{W}^{+}+\mathrm{W}^{-}$, 其中两个 W 都是纵向极化的. 图 10-4 给出了最低阶的振幅.

$$\begin{aligned} T\left(\nu\bar{\nu}\longrightarrow \mathrm{W}^{+}\mathrm{W}^{-}\right) &= -\mathrm{i}\bar{v}\left(p'\right)\left(-\mathrm{i}g\not{e}'\right)\left(1-\gamma_5\right)\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-\not{k}-m_\mathrm{e}}\left(-\mathrm{i}g\not{e}\right)\left(1-\gamma_5\right)u\left(p\right) \\ &= -2g^2\bar{v}\left(p'\right)\frac{\not{e}'\left(\not{p}-\not{k}\right)\not{e}\left(1-\gamma_5\right)}{\left(p-k\right)^2-m_\mathrm{e}^2}u\left(p\right) \end{aligned} \tag{10-48}$$

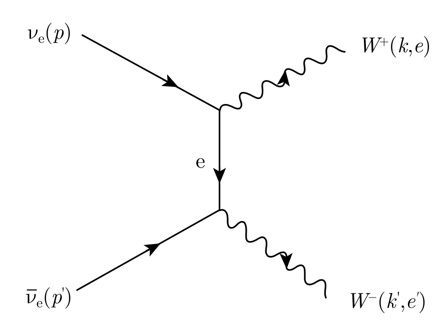


图 10-4　$\nu+\bar{\nu}\to \mathrm{W}^{+}+\mathrm{W}^{-}$ 交换一个轻子的 t 道过程

W 的极化矢量为

$$\varepsilon_\mu^{(i)}(k),\quad 有\ \varepsilon^{(i)}\cdot\varepsilon^{(j)}=-\delta_{ij}\ 和\ k\cdot\varepsilon^{(i)}=0 \tag{10-49}$$

在 W 的静止系里极化矢量可取为

$$\varepsilon_0^{(i)}=0,\quad \varepsilon_j^{(i)}=\delta_{ij},\quad i=1,2,3 \tag{10-50}$$

对一个运动的 W, $k_\mu=(E,0,0,k)$, $k=\sqrt{E^2-M_\mathrm{W}^2}$, 可以对静止的 W 做一个绕 z 轴的伪转动 (boost). 横向极化不变, 而纵向极化变成 $\varepsilon_\mu^{(3)}=\dfrac{1}{M_\mathrm{W}}(k,0,0,E)$. 在高能区, $k=E-\dfrac{M_\mathrm{W}^2}{2E}+\cdots$, 可以看到

$$\varepsilon_\mu^{(3)}=\frac{k_\mu}{M_\mathrm{W}}+O\left(\frac{M_\mathrm{W}}{E}\right) \tag{10-51}$$

因此对一个纵向极化 W, 式 (10-48) 中的散射振幅可以写成

$$\begin{aligned} T &\approx -\frac{2g^2}{k^2-2p\cdot k}\bar{v}(p')\frac{\not{k}'}{M_W}(\not{p}-\not{k})\frac{\not{k}}{M_W}(1-\gamma_5)u(p) \\ &\approx \frac{2g^2}{M_W^2}\bar{v}(p')\not{k}'(1-\gamma_5)u(p) \end{aligned} \tag{10-52}$$

为了说明这个振幅是一个 $J=1$ 的分波, 取

$$p_\mu=(E,0,0,E),\qquad p'_\mu=(E,0,0,-E) \tag{10-53}$$

$$k_\mu=(E,k\boldsymbol{e}),\quad k'_\mu=(E,-k\boldsymbol{e}),\quad \boldsymbol{e}=(\sin\theta,0,\cos\theta) \tag{10-54}$$

其中, θ 是 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的夹角. 由于 ν 和 $\bar{\nu}$ 有相反的螺旋度, 有

$$u(p)=\sqrt{E}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{\sigma\cdot p}{E}\end{pmatrix}\chi_{-1/2}=\sqrt{E}\begin{pmatrix}1\\ \sigma_z\end{pmatrix}\chi_{-1/2} \tag{10-55}$$

$$\bar{v}(p')=\sqrt{E}\chi_{1/2}^\dagger\left(\frac{\sigma\cdot p'}{E},-1\right)=\sqrt{E}\chi_{1/2}^\dagger(-\sigma_z,-1) \tag{10-56}$$

其中

$$\chi_{1/2}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \chi_{-1/2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{10-57}$$

式 (10-52) 中的组合就成了

$$\begin{aligned} \bar{v}(p')\not{k}'(1-\gamma_5)u(p) =& E\chi_{1/2}^\dagger(-1,-1)\begin{pmatrix}E & k\sigma\cdot e\\ -k\sigma\cdot e & -E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\chi_{-1/2} \\ =& -4E\chi_{1/2}^\dagger(E-k\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e})\chi_{-1/2}=4Ek\sin\theta \end{aligned}$$

现在有

$$T\approx G_F E^2\sin\theta,\quad 当\ E\to\infty时 \tag{10-58}$$

螺旋度振幅 (helicity amplitude) 的分波展开为

$$T_{\lambda_3\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}(E,\theta)=\sum_{J=M}^{\infty}(2J+1)T^J_{\lambda_3\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}(E)d^J_{\mu\lambda}(\theta) \tag{10-59}$$

其中, $\lambda_1=-\lambda_2=1/2$ 和 $\lambda_3=\lambda_4=0$ 为初态和末态粒子的螺旋度. $\lambda=\lambda_1-\lambda_2=1$, $\mu=\lambda_3-\lambda_4$, $M=\max(\lambda,\mu)=1$. $d^J_{\mu\lambda}(\theta)$ 是通常的旋转矩阵, 其中 $d^1_{10}(\theta)=\sin\theta$. 很明显式 (10-58) 中的 T 对应 $J=1$ 的分波, 破坏了高能区 $T^{J=1}(E)\leqslant$ 常数的幺

正限. 为了改善在高能区的表现, 对这个反应我们需要其他的图. 有两种可能: s 道和 u 道交换图.

(1) 重轻子. 图 10-5(a) 中的 u 道交换的振幅是

$$T_{\mathrm{u}}\left(\nu\bar{\nu}\to \mathrm{W}^{+}\mathrm{W}^{-}\right)=-2g'^{2}\bar{v}\left(p'\right)\frac{\not{\varepsilon}\left(\not{p}-\not{k}\right)\not{\varepsilon}'\left(1-\gamma_5\right)}{\left(p-k'\right)^2-m_E^2}u\left(p\right)$$
$$=\frac{-2g'^2}{M_{\mathrm{W}}^2}\bar{v}\left(p'\right)\not{k}'\left(1-\gamma_5\right)u\left(p\right)$$

注意振幅中的负号是因为这是一个 u 道贡献. 因此, 如果选择 $g^2=g'^2$, 就能抵消式 (10-52) 的不合理项. 这显然和前面讨论的 $SU(2)$(Georgi-Glashow) 的选择很相似.

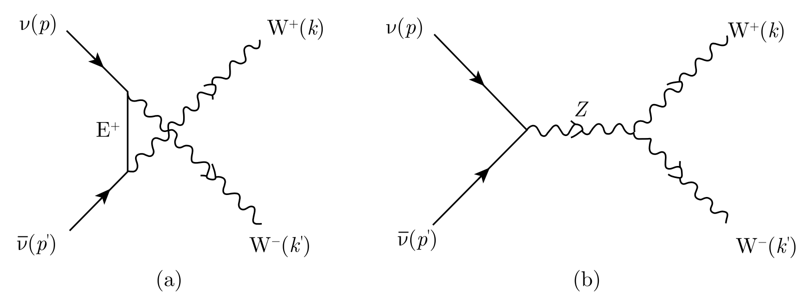


图 10-5 $\nu\bar{\nu}\to \mathrm{W}^{+}\mathrm{W}^{-}$的 u 道 (a) 和 s 道 (b) 过程

(2) 中性矢量玻色子. 图 10-5(b) 中的 s 道过程的振幅是

$$T_s\left(\nu\bar{\nu}\to \mathrm{W}^{+}\mathrm{W}^{-}\right)=-\mathrm{i}\bar{v}\left(p'\right)\left(-\mathrm{i}f\gamma_\beta\right)\left(1-\gamma_5\right)u\left(p\right)L_{\alpha\mu\nu}\varepsilon'^{\mu}\left(k'\right)\varepsilon^{\nu}\left(k\right)$$
$$\times\,\mathrm{i}\left[-g^{\alpha\beta}+\frac{\left(k+k\right)^{\alpha}\left(k+k\right)^{\beta}}{M_Z^2}\right]\left[\frac{1}{\left(k+k\right)^2-M_Z^2}\right]$$

选择 ZWW 耦合使之具有 Yang-Mills 结构

$$L_{\alpha\mu\nu}=-\mathrm{i}f'\left[\left(k'-k\right)_\alpha g_{\mu\nu}-\left(2k'+k\right)_\nu g_{\mu\alpha}+\left(k'+2k\right)_\mu g_{\alpha\nu}\right] \tag{10-60}$$

得到

$$L_{\alpha\mu\nu}\varepsilon'^{\mu}\left(k'\right)\varepsilon^{\nu}\left(k\right)=-\mathrm{i}f'\left[\left(k'-k\right)_\alpha\varepsilon\cdot\varepsilon'-\left(2k'\cdot\varepsilon\right)\varepsilon'_\alpha+\left(2k\cdot\varepsilon'\right)\varepsilon_\alpha\right]$$
$$\approx\frac{\mathrm{i}f'}{M_W^2}\left[\left(k'-k\right)_\alpha\left(k\cdot k'\right)\right]$$

以及

$$T_s\simeq-\frac{ff'}{M_{\mathrm{W}}^2}\bar{v}\left(p'\right)\not{k}'\left(1-\gamma_5\right)u\left(p\right) \tag{10-61}$$

因此, 如果选择 $ff' = 2g^2$, 它也可以抵消式 (10-52) 高能下的振幅. 这对应着增加一个前面讨论过的 $U(1)$ 对称性.

事实上, 如果要求所有破坏幺正性的振幅都被抵消, 就会得到一个与代数方法的结果相同的可重整化的拉氏量 (具体的构造方法可以参阅文献 [38]).

最终我们选定了 $SU(2)\times U(1)$ 作为规范群, 这是为了要符合实验上得出的结果 (中性流过程).$SU(2)$ 为弱同位旋群 (weak isospin),$U(1)$ 为弱超荷群 (weak hypercharge). 规范场的拉氏量为

$$L = -\frac{1}{4}F^{i\mu\nu}F^{i}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} \tag{10-62}$$

其中

$$F^{i}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\nu + g\epsilon^{ijk}A^j_\mu A^k_\nu, \qquad SU(2)\ \text{规范场} \tag{10-63}$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\mu B_\mu, \qquad U(1)\text{规范场} \tag{10-64}$$

费米子

由式 (10-27) 给出的弱流, ν, e 构成了 $SU(2)$ 的一个二重态

$$l_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix} \tag{10-65}$$

为方便起见, 引入左手场和右手场

$$\psi_{\mathrm{L}} \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi, \quad \psi_{\mathrm{R}} \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi, \quad \psi = \psi_{\mathrm{L}} + \psi_{\mathrm{R}} \tag{10-66}$$

则

$$T_+ = \int(\nu^+_{\mathrm{L}} e_{\mathrm{L}})\mathrm{d}^3x, \quad T_- = \int(e^+_{\mathrm{L}}\nu_{\mathrm{L}})\mathrm{d}^3x, \quad Q = -\int(e^+_{\mathrm{L}}e_{\mathrm{L}} + e^+_{\mathrm{R}}e_{\mathrm{R}}) \tag{10-67}$$

注意到

$$Q - T_3 = \int\left[-\frac{1}{2}(\nu^+_{\mathrm{L}}\nu_{\mathrm{L}} + e^+_{\mathrm{L}}e_{\mathrm{L}}) - e^+_{\mathrm{R}}e_{\mathrm{R}}\right]\mathrm{d}^3x \tag{10-68}$$

可以验证

$$[Q - T_3, T_i] = 0\ , \quad i = 1, 2, 3 \tag{10-69}$$

因此可以取 $Q - T_3$ 为 $U(1)$ 的荷. 定义 $Y \equiv 2(Q - T_3)$, 称为**弱超荷**. 费米子的弱超荷为

$$l_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix}\nu_{\mathrm{L}}\\ e_{\mathrm{L}}\end{pmatrix}, \quad Y = -1; \quad l_{\mathrm{R}} = e_{\mathrm{R}} \quad Y = -2 \tag{10-70}$$

利用这些量子数, 费米子的规范耦合拉氏量为

$$\mathrm{L}_2 = \bar{l}_\mathrm{L}\mathrm{i}\gamma^\nu D_\nu l_\mathrm{L} + \bar{l}_\mathrm{R}\mathrm{i}\gamma^\nu D_\nu l_\mathrm{R} \tag{10-71}$$

其中

$$D_\nu\psi = (\partial_\nu - \mathrm{i}g\frac{\tau\cdot A_\nu}{2} - \mathrm{i}g'\frac{Y}{2}B_\nu)\psi \tag{10-72}$$

例如,

$$D_\nu l_\mathrm{L} = (\partial_\nu - \mathrm{i}g\frac{\tau\cdot A_\nu}{2} + \mathrm{i}g'\frac{1}{2}B_\nu)l_\mathrm{L}, \quad D_\nu l_\mathrm{R} = (\partial_\nu + \mathrm{i}g'B_\nu)l_\mathrm{R} \tag{10-73}$$

对称性自发破缺

我们需要将 $SU(2)\times U(1)$ 破缺成 $U(1)_\mathrm{em}$, 即 QED 的 $U(1)$ 对称性, 使得只有一个规范玻色子是零质量的, 也就是光子. 引入 $SU(2)$ 二重态的标量场 (Higgs 场) 可以达到这个目的

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad Y = 1 \tag{10-74}$$

与 ϕ 耦合的拉氏量为

$$\mathcal{L}_3 = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi) \tag{10-75}$$

其中

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - \frac{\mathrm{i}g}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu - \frac{\mathrm{i}g^{'}}{2}B_\mu)\phi \tag{10-76}$$

以及

$$V(\phi) = -\mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{10-77}$$

另外, 还有轻子与标量场 ϕ 的耦合, 称为 **Yukawa 耦合**(Yukawa coupling), 形式为

$$\mathrm{L}_4 = f\bar{L}_\mathrm{L}\phi e_\mathrm{R} + h.c. \tag{10-78}$$

注意, 左手场 $\bar{L}_\mathrm{L}$ 和右手场 e_R 分属 $SU(2)\times U(1)$ 群的不同表示, 我们不能有如 $\bar{L}e_\mathrm{R}$ 的质量项. 因此费米子在对称性破缺前是无质量的. 对称性破缺通过 $\mathcal{L}_4$ 中的 Yukawa 耦合给予费米子质量. 正如我们已经讨论过的, 对称性自发破缺来自于下列形式的真空期望值

$$\langle\phi\rangle_0 = \langle 0|\,\phi\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{10-79}$$

将标量场写成如下形式

$$\phi(x) = U^{-1}(\boldsymbol{\xi})\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad U(\boldsymbol{\xi}) = \exp\left[\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}}{v}\right] \tag{10-80}$$

因此原来的 (ϕ^+, ϕ^0) 和它的复共轭 $(\bar{\phi}^0, \phi^-)$ 被 $(\eta, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 取代. 这个新的参数化与标量场的规范变换相同.

式 (10-80) 中的标量场在规范变换下的形式不变. 可以用下列形式的规范变换来简化

$$\phi' = U(\boldsymbol{\xi})\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta(x) \end{pmatrix} \tag{10-81}$$

$$\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}'_\mu}{2} = U(\boldsymbol{\xi})\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu}{2}U^{-1}(\boldsymbol{\xi}) - \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \tag{10-82}$$

现在场 $\boldsymbol{\xi}(x)$ 从拉氏量中消失了, 这来自于规范不变性. 它们实际成为了规范场的纵向分量, 如式 (10-82) 所示.

在原来的拉氏量中没有电子的质量项, 因为质量项 $(\bar{e}_\mathrm{L}e_\mathrm{R}+h.c.)$ 在 $SU(2)\times U(1)$ 变换下不是不变的. 利用标量场的真空期望值, $\mathcal{L}_4$ 变成

$$\mathcal{L}_4 = f\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{l}_\mathrm{L}\langle\phi\rangle e_\mathrm{R} + h.c.) + f\frac{\eta(x)}{\sqrt{2}}(\bar{e}_\mathrm{L}e_\mathrm{R} + h.c.) \tag{10-83}$$

结果电子成为有质量的, 质量为

$$m_\mathrm{e} = \frac{f}{\sqrt{2}}v \tag{10-84}$$

$\eta(x)$ 与费米子间的 Yukawa 耦合与费米子质量成正比. 这个性质对于这个标量粒子 (Higgs 粒子) 的产生和衰变有重要的影响.

质量谱. 我们现在列出这个理论在对称性自发破缺后的质量谱 (mass spectrum).

(1) 费米子质量:

$$m_\mathrm{e} = \frac{fv}{\sqrt{2}} \tag{10-85}$$

(2) 标量粒子质量:

$$V(\phi') = \mu^2\eta^2 + \lambda v\eta^3 + \frac{\lambda}{4}\eta^4 \longrightarrow m_\eta = \sqrt{2}\mu \tag{10-86}$$

(3) 规范玻色子质量: 由 $\mathcal{L}_3$ 中的协变微分

$$\mathcal{L}_3 = \frac{v^2}{2}\chi^\dagger\left(g\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}'_\mu}{2} + \frac{g'B'_\mu}{2}\right)\left(g\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}'^\mu}{2} + \frac{g'B'^\mu}{2}\right)\chi + \cdots, \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10-87}$$

得到规范玻色子的质量项为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3 &= \frac{v^2}{8}\{g^2[(A_\mu^{\mathbf{1}})^2 + (A_\mu^{\mathbf{2}})^2] + (gA_\mu^3 - g'B_\mu)^2\} + \cdots \\ &= M_\mathrm{W}^2 W^{+\mu}W_\mu^- + \frac{1}{2}M_\mathrm{Z}^2 Z^\mu Z_\mu + \cdots\end{aligned}$$

其中

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{\mathbf{1}} - \mathrm{i}A_\mu^{\mathbf{2}}), \quad M_{\mathrm{W}}^2 = \frac{g^2v^2}{4} \tag{10-88}$$

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g^{'2}}}(g^{'}A_\mu^{\mathbf{3}} - gB_\mu), \quad M_Z^2 = \frac{g^2 + g^{'2}}{4}v^2 \tag{10-89}$$

场

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g^{'2}}}(gA_\mu^3 + g^{'}B_\mu) \tag{10-90}$$

没有在 $\mathcal{L}_3$ 的质量项中出现, 它是零质量的, 就是光子. 为方便起见, 定义 Weinberg 角或弱混合角 (weak mixing angle)θ_{W} 为

$$\tan\theta_{\mathrm{W}} = \frac{g^{'}}{g} \tag{10-91}$$

然后可以写下

$$Z_\mu = \cos\theta_{\mathrm{W}}A_\mu^3 - \sin\theta_{\mathrm{W}}B_\mu, \quad M_{\mathrm{Z}}^2 = \frac{g^2v^2}{4}\sec^2\theta_{\mathrm{W}} \tag{10-92}$$

$$A_\mu = \sin\theta_{\mathrm{W}}A_\mu^3 + \cos\theta_{\mathrm{W}}B_\mu \tag{10-93}$$

注意, $M_{\mathrm{W}}, M_{\mathrm{Z}}$ 和 θ_{W} 有下列关系

$$\rho = \frac{M_{\mathrm{W}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2\cos^2\theta_{\mathrm{W}}} = 1 \tag{10-94}$$

它是标量场为二重态的结果. 这个关系得到了实验的证实.

带电流和中性流 由 W 和 Z 传递的弱作用可以从 (10-71) 中得到

$$\mathcal{L}_{cc} = \frac{g}{\sqrt{2}}(J_\mu^\dagger W^{\dagger\mu} + h.c.), \quad J_\mu^\dagger = J_\mu^1 + \mathrm{i}J_\mu^2 = \frac{1}{2}\bar{\nu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)e \tag{10-95}$$

为了在低能区简化到四费米子作用, 要求

$$\frac{g^2}{8M_{\mathrm{W}}^2} = \frac{G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}} \tag{10-96}$$

从 $M_W^2 = \frac{1}{4}g^2v^2$ 可以得到

$$v = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{G_{\mathrm{F}}}} \approx 246\ \mathrm{GeV} \tag{10-97}$$

这常被称为**弱作用能标**(weak scale). 它表征了弱作用对称性破缺的能量标度. 因此当能量远小于 $v \approx 246$ GeV 时, 规范玻色子的作用可以忽略, 四费米子作用可以唯象地解释很多现象. 当能量接近弱作用能标时, 需要考虑规范玻色子的作用.

电弱规范理论一个比较意外的地方是中性弱玻色子 Z 的存在, 从低能现象中并没有显示它的存在. 它的引入基于弱作用和电磁作用的对称性, 它最重要的效应是中微子参与的中性流过程的存在. 20 世纪 70 年代对这种过程的观测给予了电弱统一模型强有力的支持.

对此作一个简单的描述. 中性流作用的拉氏量 (包含电磁作用) 为

$$\mathcal{L}_{NC} = gJ_\mu^3 A^{\mathbf{3}\mu} + \frac{g^{'}}{2} J_\mu^Y B^\mu = eJ_\mu^{em} A^\mu + \frac{g}{\cos\theta_{\mathrm{W}}} J_\mu^Z Z^\mu \tag{10-98}$$

其中, $e = g\sin\theta_{\mathrm{W}}$ 为电磁耦合常数, $J_\mu^Z = J_\mu^{\mathbf{3}} - \sin^2\theta_W J_\mu^{em}$ 为弱中性流. 可以定义弱中性荷 (weak neutral charge) 为

$$Q^Z = \int J_0^Z \mathrm{d}^3 x = T_3 - \sin^2\theta_{\mathrm{W}} Q \tag{10-99}$$

这说明费米子与 Z 的耦合强度正比于量子数 $T_3 - \sin^2\theta_{\mathrm{W}} Q$.

Z 和中微子耦合, 在下列过程中有贡献图 (10-6):

$$\nu_{\mathrm{e}} + \mathrm{e} \to \nu_{\mathrm{e}} + \mathrm{e} \tag{10-100}$$

这个过程仅包含轻子, 可以用式 (10-98) 中的拉氏量可靠地计算. 还有其他的纯轻子中性流过程, 比如, $\nu_\mu + \mathrm{e} \to \nu_\mu + \mathrm{e}$. 它们都可以用上面的作用项来计算. 另外, 还有中微子参与的半轻子中性流过程, 如 $\nu_\mu + \mathrm{p} \to \nu_\mu + \mathrm{X}$. 这些过程的单举截面 (inclusive cross section), 可以用和 ep 散射的单举截面一样的方法计算.

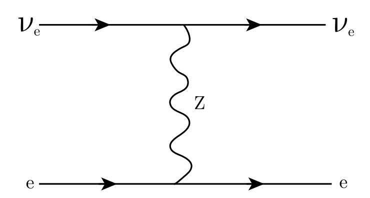


图 10-6 $\nu_e e$ 散射的中性流贡献

20 世纪 70 年代对所有中性流过程的截面的测量都支持了弱作用的规范理论. 定量地, 所有的测量都和 $\sin^2\theta_{\mathrm{W}} \approx 0.22$ 一致. 这可以给出 $M_{\mathrm{W}} \approx 80$ GeV 以及 $M_{\mathrm{Z}} \approx 90$ GeV. 80 年代, 它们在 CERN 的实验中被发现, 并有着预测的质量. 这也给弱作用理论提供了有力支持. 在后文还将对这些过程作进一步的讨论.

这里有一点值得注意的是, 光子和 Z 都传递中性作用, 但光子与矢量流耦合, 而 Z 与矢流和轴矢流都耦合, 这会导致宇称不守恒的结果.

多代的混合 当我们把这个简单模型推广到包含 μ, ν_μ 和 $\mathrm{u, d, s}$ 夸克时, 可

以看到由四费米子和中间玻色子理论, 轻子和强子弱流给出下列的多重态

$$\begin{pmatrix} \nu_{\mathrm{e}} \\ e \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\mu} \\ \mu \end{pmatrix}_{\mathrm{L}} \quad e_{\mathrm{R}}, \mu_{\mathrm{R}} \quad \begin{pmatrix} u \\ d_{\theta} \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}, \quad s_{\theta_{\mathrm{L}}} \quad u_{\mathrm{R}}, d_{\mathrm{R}}, s_{\mathrm{R}} \tag{10-101}$$

其中

$$d_{\theta} = \cos\theta_{\mathrm{c}} d + \sin\theta_{\mathrm{c}} s, s_{\theta_{\mathrm{L}}} = -\sin\theta_{c} d + \cos\theta_{c} s \tag{10-102}$$

下夸克 (down quark) 部分的中性流为下列形式

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NC} =& [\bar{d}_{\theta}\gamma_{\mu}(-\frac{1}{2}+\sin^2\theta_{\mathrm{c}}\frac{1}{3})d_{\theta_{\mathrm{L}}} + \bar{S}_{\theta}\gamma_{\mu}\left(\sin^2\theta_{c}\frac{1}{3}\right)S_{\theta} - \sin^2\theta_{W}\frac{1}{3}(\bar{d}_{\mathrm{R}}\gamma_{\mu}d_{\mathrm{R}} + \bar{s}_{\mathrm{R}}\gamma_{\mu}s_{\mathrm{R}})]Z^{\mu} \\ =& (-\frac{1}{2}+\sin^2\theta_{\mathrm{W}}\frac{1}{3})[(\bar{d}_{\mathrm{L}}\gamma_{\mu}d_{\mathrm{L}} + \bar{s}_{\mathrm{L}}\gamma_{\mu}s_{\mathrm{L}}) + \sin\theta_{W}\cos\theta_{W}(\bar{d}_{\mathrm{L}}\gamma_{\mu}s_{\mathrm{L}} + \bar{s}_{\mathrm{L}}\gamma_{\mu}d_{\mathrm{L}}) + \ldots \end{aligned}$$

$\left(\bar{d}_{\mathrm{L}}\gamma_{\mu}s_{\mathrm{L}} + \bar{s}_{\mathrm{L}}\gamma_{\mu}d_{\mathrm{L}}\right)$ 给出 $\Delta S = 1$ 的中性流过程, 比如, $K_{\mathrm{L}} \to \mu^+ + \mu^-$ 和带电流过程在同一个数量级. 但在实验上,

$$R = \frac{\Gamma(\mathrm{K_L} \to \mu^+ + \mu^-)}{\Gamma(\mathrm{K}^+ \to \mu + \nu)} \leqslant 10^{-8} \tag{10-103}$$

因此, $\Delta S = 1$ 的中性流过程不可以与带电流过程在一个数量级.

GIM 机制 Glashow 等 [39] 提出存在第四个夸克, 即粲夸克 c (charm quark), 它与正交的组合 $s_{\theta} = -\sin\theta_{\mathrm{c}} d + \cos\theta_{\mathrm{c}} s$ 耦合, 从而多重态应为

$$\begin{pmatrix} u \\ d_{\theta} \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s_{\theta} \end{pmatrix}_{\mathrm{L}} \tag{10-104}$$

它导致的结果是, $\Delta S = 1$ 的部分消掉了. 新的中性流的形式为

$$\bar{d}_{\theta}(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sin^2\theta_{\mathrm{W}})\gamma_{\mu}d_{\theta} + \bar{s}_{\theta}(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sin^2\theta_{\mathrm{W}})\gamma_{\mu}s_{\theta} = (-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sin^2\theta_{\mathrm{W}})(\bar{d}\gamma_{\mu}d + \bar{s}\gamma_{\mu}s) \tag{10-105}$$

是奇异数守恒的. 这个消掉奇异数改变的中性流的方法称为 **GIM 机制**.

夸克混合 在对称性自发破缺之前, 费米子都是无质量的, 因为 ψ_{L} 和 ψ_{R} 在 $SU(2)\times U(1)$ 下有不同的量子数. 因此质量项 $\left(\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}} + \mathrm{h.c.}\right)$ 不是在 $SU(2)\times U(1)$ 下不变的, 不能出现在拉氏量中, 所以费米子的质量要从 Yukawa 耦合 $\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}}\phi$ 经过对称性自发破缺来完成. 当有不止一个二重态, $\psi_{i\mathrm{L}}$ 或 $\psi_{i\mathrm{R}}$, 它们在 $SU(2)\times U(1)$ 下有相同的量子数, 我们称它们为弱本征态 (weak eigenstates). 这里指标 i 代表弱本征态的不同代. 对称性自发破缺后, 费米子通过 Yukawa 耦合得到质量

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Y}} = (f_{ij}\bar{q}_{i\mathrm{L}}u_{Rj} + f'_{ij}\bar{q}_{i\mathrm{L}}d_{\mathrm{R}j})\phi + h.c. \tag{10-106}$$

注意可重整性要求我们写下所有符合 $SU(2)\times U(1)$ 对称性的项. 由于 Yukawa 耦合常数 f_{ij}, f'_{ij} 是任意的, 费米子质量矩阵通常不是对角矩阵. 但质量矩阵对角化后, 得到了质量本征态, 它们与弱本征态不同. 上下夸克部分的质量矩阵为

$$m_{ij}^{(u)} = f_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}}, \quad m_{ij}^{(d)} = f'_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}} \tag{10-107}$$

这些矩阵可以由双幺正变换 (bi-unitary transformation) 对角化, 即对一个质量矩阵 m_{ij}, 有幺正矩阵 S 和 R 使得

$$S^\dagger m R = m_d \tag{10-108}$$

是对角阵. 证明如下. 定义 $M = mm^\dagger$, 它是一个正定的厄米矩阵, 可以被幺正矩阵对角化

$$S^\dagger M S = m_d^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 & & \\ & m_2^2 & \\ & & m_3^2 \end{pmatrix} \tag{10-109}$$

定义

$$m_d \equiv \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{pmatrix} \quad 和 \quad H = S m_d S^\dagger \tag{10-110}$$

这里 H 是厄米的. 定义 T 为

$$T \equiv H^{-1} m \tag{10-111}$$

则

$$TT^\dagger = H^{-1}mm^\dagger\left(H^{-1}\right)^\dagger = H^{-1}MH^{-1} = H^{-1}Sm_d^2S^\dagger H^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = 1 \tag{10-112}$$

这说明 T 是幺正的. 可以将质量矩阵 m 写为

$$m = HT = Sm_dS^\dagger T = Sm_dR^\dagger, \quad 其中\ R = T^\dagger S\ 也是幺正的 \tag{10-113}$$

这里我们就求出了所需的 S 和 R. 证毕.

如果把左手的二重态 (弱本征态) 写成

$$q_{1\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}, \quad q_{2\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} c' \\ s' \end{pmatrix}_{\mathrm{L}} \tag{10-114}$$

这些弱本征态可以通过幺正矩阵变换为质量本征态

$$\begin{pmatrix} u' \\ c' \end{pmatrix} = S_u \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = S_d \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{10-115}$$

注意带电规范玻色子 $W^{\pm}$ 耦合的拉氏密度

$$\mathcal{L}_{\mathrm{W}} = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu [\bar{q}_{1L}\gamma^\mu \tau^\dagger q_{1L} + \bar{q}_{2L}\gamma^\mu \tau^\dagger q_{2L}] + h.c. \tag{10-116}$$

在 $q_{1\mathrm{L}}, q_{2\mathrm{L}}$ 空间的幺正变换下不变, 也就是说,

$$\begin{pmatrix} q'_{1\mathrm{L}} \\ q'_{2\mathrm{L}} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} q_{1\mathrm{L}} \\ q_{2\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \quad VV^\dagger = 1 = V^\dagger V \tag{10-117}$$

可以利用这个性质把所有的混合角放到下夸克部分

$$q'_{i\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} u \\ d'' \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}, \begin{pmatrix} c \\ s'' \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}, \quad \begin{pmatrix} d'' \\ s'' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{10-118}$$

这里 U 是一个 2×2 的幺正矩阵. 显然可以推广到 3 代的情况如下

$$q_{i\mathrm{L}}: \begin{pmatrix} u \\ d'' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s'' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b'' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d'' \\ s'' \\ b'' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \tag{10-119}$$

这里 U 是一个 3×3 的幺正矩阵, 称为 CKM (Cabibbo-Kobayahsi-Maskawa) 矩阵 [35,40].

CP 破坏

CP 破坏是由于费米子与规范玻色子有复数的耦合. $W^{\pm}$ 和夸克的规范耦合由上述的 3×3 幺正矩阵控制. 这个矩阵可以有复的矩阵元. 然而, 在对角化质量矩阵时: $S^\dagger(mm^\dagger)S = m_d^2$, S 对角元的形式可以有一个相因子的不确定. 换句话说, 如果 S 可以对角化质量矩阵, 那么下面的 S' 也可以

$$S' = S \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n} \end{pmatrix} \tag{10-120}$$

因为对角化的矩阵在这个相角矩阵的相似变换下是不变的. 我们可以利用这个性质重新定义夸克场来吸收 U 中的相因子. 对一个 $n\times n$ 幺正矩阵, 重新定义夸克场后余下的独立的相位个数为

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} \tag{10-121}$$

因此只有在 3 代或更多代时才可能有 CP 破坏 (Kobayashi, Maskawa). 这里我们提供一个构造性的证明. 先考虑下列的二重态

$$q_{1\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} u \\ U_{11}d + U_{12}s + U_{13}b \end{pmatrix} \tag{10-122}$$

如果 U_{11} 有相因子 δ,

$$U_{11} = R_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}, \quad R_{11} \text{ 是实数} \tag{10-123}$$

则这个因子 δ 可以由重新定义上夸克来吸收

$$u \longrightarrow u' = u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} \tag{10-124}$$

从而

$$q_{1\mathrm{L}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\begin{pmatrix} u' \\ R_{11}d + U'_{12}s + U'_{13}b \end{pmatrix} \tag{10-125}$$

同样地, 可以通过重新定义粲夸克和顶夸克场对 U_{21} 和 U_{31} 同样操作. 这些相因子是无关紧要的, 因为不同代的二重态间没有规范耦合. 最后可以通过重新定义奇异夸克和底夸克吸收 U_{12} 和 U_{13}, 得到二重态的形式为

$$\begin{pmatrix} u' \\ R_{11}d + R_{12}s + R_{13}b \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}, \quad \begin{pmatrix} c' \\ R_{21}d + R_{22}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_1}s + R_{23}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_2}b \end{pmatrix}_{\mathrm{L}},$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ R_{31}d + R_{32}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_3}s + R_{33}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_4}b \end{pmatrix}_{\mathrm{L}},$$

现在我们将参数个数减少到了 13. 每个类下夸克的归一化给出了 3 个实条件, 正交条件给出了 6 个实条件, 现在还剩 4 个参数. 实正交矩阵需要 3 个参数 (角度), 所以最后得到 1 个独立相因子. 这证明了上面的关系中 $n = 3$ 的情况. 从这里推广到一般的情形也是容易的.

中性流作用的味守恒　中型 Z 玻色子和费米子的耦合味守恒 (flavor conservation). 这可以进行如下解释. 我们可以把中性流用弱本征态的夸克场写出

$$J_\mu^Z = \sum_i \bar{\psi}_i \gamma_\mu \left[T_3(\psi_i) - \sin^2\theta_{\mathrm{W}} Q(\psi_i)\right]\psi_i \tag{10-126}$$

区分左右手场和上下夸克分量

$$\begin{aligned} J_\mu^Z = &\sum_i \left(\bar{u}'_{\mathrm{L}i}\gamma_\mu \left[\frac{1}{2} - \sin^2\theta_{\mathrm{W}}\left(\frac{2}{3}\right)\right]u'_{\mathrm{L}i} + \bar{d}'_{\mathrm{L}i}\gamma_\mu\left[-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_{\mathrm{W}}\left(\frac{1}{3}\right)\right]d'_{\mathrm{L}i}\right. \\ &\left. + \bar{u}'_{\mathrm{R}i}\gamma_\mu\left[-\sin^2\theta_{\mathrm{W}}\left(\frac{2}{3}\right)\right]u'_{\mathrm{R}i} + \bar{d}'_{\mathrm{R}i}\gamma_\mu\left[\sin^2\theta_W\left(\frac{1}{3}\right)\right]d'_{\mathrm{R}i}\right) \end{aligned}$$

由于弱本征态 $q'_{i\mathrm{L}}$ 和质量本征态 $q'_{i\mathrm{L}}$ 由幺正矩阵联系起来

$$u'_{\mathrm{L}i} = U\left(u_{\mathrm{L}}\right)_{ij} u_{\mathrm{L}j}, \quad \cdots \tag{10-127}$$

可以看到这些幺正矩阵在 $\bar{u}'_{\mathrm{L}i} u'_{\mathrm{L}i}$ 组合中消掉了, 所以质量本征态的中性流和弱本征态的中性流的形式是相同的. 因此夸克味是守恒的. 注意这个性质来自于所有有着相同螺旋度和电荷的夸克在 $SU(2) \times U(1)$ 对称群下有相同的量子数. 或者说, 如果有夸克出现在 $SU(2)$ 二重态之外的表示, 那么当这个夸克和上夸克或者下夸克的电荷相同时, 将存在未改变的中性流.

10.3.2　标准模型的现象学

中性流

电弱统一之前的弱作用理论中只有带电的 W. 标准模型引入了一个中性的 Z. 许多反应由这个中性的 Z 玻色子传递. 这些反应通常称为中性流反应. 与通常的由中性光子传递的同时耦合矢量流和轴矢流的电磁作用不同, 它们是破坏宇称的, 而且可以和中微子耦合. 这些过程在 20 世纪 70 年代的发现给标准模型提供了重要的支持.

由 Z 传递的弱作用的形式为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Z}} = \frac{g}{\cos\theta_{\mathrm{W}}} Z^{\mu} J_{\mu}^{Z} \tag{10-128}$$

其中, J_{μ}^{Z} 为弱中性流, 其结构为

$$J_{\mu}^{Z} = \sum_{i} \bar{\psi}_i \gamma_{\mu} \left[T_3\left(\psi_i\right) - \sin^2\theta_{\mathrm{W}} Q\left(\psi_i\right)\right] \psi_i \tag{10-129}$$

这里 ψ_i 是左手场或右手场, T_3 和 Q 是弱同位旋和电荷. 比如, 对 u_{L} 这组合为

$$T_3\left(u_L\right) - \sin^2\theta_{\mathrm{W}} Q\left(u_L\right) = \frac{1}{2} - \sin^2\theta_{\mathrm{W}} \frac{2}{3} \tag{10-130}$$

从这些耦合我们可以计算由 Z 玻色子传递的过程的截面积. 下面列出了一些过程.

(1) $\nu_{\mu} + \mathrm{e} \to \nu_{\mu} + \mathrm{e}$ 和 $\bar{\nu}_{\mu} + \mathrm{e} \to \bar{\nu}_{\mu} + \mathrm{e}$.

这两个过程是纯粹的中性流过程, 对应的费曼图如图 10-7 所示. 容易计算实验室坐标系中的微分截面和总截面. 结果为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma\left(\nu_{\mu} e\right)}{\mathrm{d}y} = \frac{8G_{\mathrm{F}}^2}{\pi} m_{\mathrm{e}} E_{\nu} \left(g_{\mathrm{L}}^{\nu}\right)^2 \left[\left(g_{\mathrm{L}}^{e}\right)^2 + \left(g_{\mathrm{R}}^{e}\right)^2 (1-y)^2\right], \quad y = \frac{E_{\mathrm{e}}}{E_{\nu}} \tag{10-131}$$

以及

$$\sigma\left(\nu_{\mu} e\right) = \frac{8G_{\mathrm{F}}^2}{\pi} m_{\mathrm{e}} E_{\nu} \left(g_{\mathrm{L}}^{\nu}\right)^2 \left[\left(g_{\mathrm{L}}^{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(g_{\mathrm{R}}^{e}\right)^2\right] \tag{10-132}$$

其中

$$g_{\mathrm{L}}^{\nu}=\frac{1}{2}, \quad g_{\mathrm{L}}^{e}=-\frac{1}{2}+\sin^2\theta_{\mathrm{W}}, \quad g_{\mathrm{R}}^{e}=\sin^2\theta_{\mathrm{W}} \tag{10-133}$$

为 ν 和 e 的弱中性耦合. 同样地,

$$\sigma\left(\bar{\nu}_{\mu}e\right)=\frac{8G_{\mathrm{F}}^2}{\pi}m_{\mathrm{e}}E_{\nu}\left(g_{\mathrm{L}}^{\nu}\right)^2\left[\frac{1}{3}\left(g_{\mathrm{L}}^{e}\right)^2+\left(g_{\mathrm{R}}^{e}\right)^2\right] \tag{10-134}$$

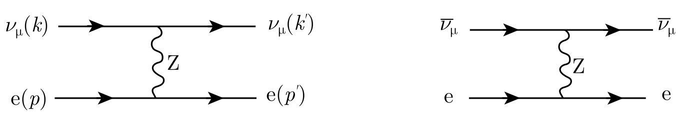


图 10-7 $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ 与电子的散射

(2) $\nu_e+e\rightarrow\nu_e+e$ 和 $\bar{\nu}_e+e\rightarrow\bar{\nu}_e+e$.

其中 $\bar{\nu}_e e$ 散射的费曼图如图 10-8 所示. 在这些情况下, 也有带电流作用 (W 交换图) 的贡献. 这两个反应的截面积分别为

$$\sigma\left(\nu_{\mathrm{e}}\mathrm{e}\right)=\frac{8G_{\mathrm{F}}^2}{\pi}m_{\mathrm{e}}E_{\nu}\left(g_{\mathrm{L}}^{\nu}\right)^2\left[\left(1+g_{\mathrm{L}}^{e}\right)^2+\frac{1}{3}\left(g_{\mathrm{R}}^{e}\right)^2\right] \tag{10-135}$$

$$\sigma\left(\bar{\nu}_{\mathrm{e}}\mathrm{e}\right)=\frac{8G_{\mathrm{F}}^2}{\pi}m_{\mathrm{e}}E_{\nu}\left(g_{\mathrm{L}}^{\nu}\right)^2\left[\frac{1}{3}\left(1+g_{\mathrm{L}}^{e}\right)^2+\left(g_{\mathrm{R}}^{e}\right)^2\right] \tag{10-136}$$

注意由于带电流的贡献, 有 g_{L} 的线性项的贡献, 符号可以由截面积的实验测量得到. 这确定了弱混合角为

$$\sin^2\theta_{\mathrm{W}}\approx 0.23 \tag{10-137}$$

上述的过程为纯轻子过程, 没有强作用带来的复杂性. 这些年来它们提供了标准模型参数的重要信息.

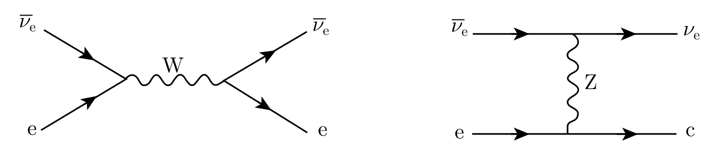


图 10-8 $\bar{\nu}_e e$ 散射的带电流和中性流贡献

还有其他一些中性流过程, 如 $e^+e^-\rightarrow\mu^+\mu^-, \nu p\rightarrow\nu X, ep\rightarrow ep$. 它们都经过了实验测量, 与理论结果符合得很好, 给标准模型的正确性提供了强有力的支持.

W 和 Z 规范玻色子

标准模型最基本的特征是由三个有质量的规范玻色子来传递弱作用: W^+, W^- 和 Z. 我们来讨论一下它们的性质.

(1) 质量. W 和 Z 的质量可以由弱混合角 θ_{W} 来表达

$$M_{\mathrm{W}}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{\sqrt{2}G_{\mathrm{F}}}\right)^{1/2}\frac{1}{\sin\theta_{\mathrm{W}}}=\frac{37.3\ \mathrm{GeV}}{\sin\theta_{\mathrm{W}}} \tag{10-138}$$

$$M_Z=\left(\frac{e^2}{\sqrt{2}G_{\mathrm{F}}}\right)^{1/2}\frac{1}{\sin 2\theta_{\mathrm{W}}}=\frac{74.6\ \mathrm{GeV}}{\sin 2\theta_{\mathrm{W}}} \tag{10-139}$$

利用从中性流过程测得的 θ_{W}, 可以预测质量为

$$M_{\mathrm{W}}\approx 80\ \mathrm{GeV},\quad M_{\mathrm{Z}}\approx 90\ \mathrm{GeV},\quad 对于\ \sin^2\theta_{\mathrm{W}}\approx 0.23 \tag{10-140}$$

20 世纪 80 年代初期, W 和 Z 在 CERN 被发现, 质量为

$$M_{\mathrm{W}}\approx 80.4\ \mathrm{GeV},\quad M_{\mathrm{Z}}\approx 91.2\ \mathrm{GeV} \tag{10-141}$$

实验测量和理论预测的一致再一次给标准模型提供了有力的证据.

(2) W 衰变. 由 W 传递的弱作用的拉氏密度为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{W}}=\frac{g}{2\sqrt{2}}W_{\mu}^{+}\left[(\bar{\nu}_{\mathrm{e}},\bar{\nu}_{\mu},\bar{\nu}_{\tau})\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)]\begin{pmatrix}e\\ \mu\\ \tau\end{pmatrix}+(\bar{u},\bar{c},\bar{t})\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)]U\begin{pmatrix}d\\ s\\ b\end{pmatrix}\right]+h.c. \tag{10-142}$$

其中, U 为 CKM 矩阵. 由此可以计算 $\mathrm{W}^+\to\mathrm{e}^++\nu$ 的衰变率为

$$\Gamma_{\mathrm{e}}=\Gamma(\mathrm{W}^+\to\mathrm{e}^++\nu)=\frac{G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}}\frac{M_{\mathrm{W}}^3}{6\pi}\approx 0.25\ \mathrm{GeV} \tag{10-143}$$

其他的轻子衰变模式有相同的衰变率

$$\mathrm{W}^+\to\mu^+\nu_{\mu},\quad \tau^+\nu_{\tau} \tag{10-144}$$

强子的衰变模式可以用夸克来描述

$$\mathrm{W}^+\to\mathrm{u\bar{d}},\quad \mathrm{u\bar{s}},\quad \mathrm{u\bar{b}} \tag{10-145}$$

$$\mathrm{W}^+\to\mathrm{c\bar{d}},\quad \mathrm{c\bar{s}},\quad \mathrm{c\bar{b}} \tag{10-146}$$

利用关系 $|V_{\mathrm{ud}}|^2+|V_{\mathrm{us}}|^2+|V_{\mathrm{ub}}|^2=1$ 可以得到

$$\Gamma(\mathrm{W}^+\to\mathrm{u\bar{d}},\mathrm{u\bar{s}},\mathrm{u\bar{b}})=3\Gamma_{\mathrm{e}} \tag{10-147}$$

其中, 3 来自色自由度. 同样地 $\Gamma(W^+\to\mathrm{c\bar{d}},\mathrm{c\bar{s}},\mathrm{u\bar{b}})=3\Gamma_{\mathrm{e}}$

$$\Gamma_{\mathrm{total}}=9\Gamma_{\mathrm{e}} \tag{10-148}$$

衰变为电子的分支比为

$$B(\mathrm{W}^+ \to \mathrm{e}^+ + \nu) \approx \frac{1}{9} = 11.1\% \tag{10-149}$$

实验结果为

$$B(\mathrm{W}^+ \to \mathrm{e}^+ + \nu) \approx (10.8 \pm 0.09)\% \tag{10-150}$$

理论与结果符合得很好. 同样地, 理论给出

$$B(\mathrm{W}^+ \to \text{强子}) \approx \frac{6}{9} = 66.67\% \tag{10-151}$$

与实验结果 67.6% 一致.

(3) Z 衰变. Z 衰变与 W 相似, 但它的独特性质是保持味量子数的. $\mathrm{Z} \to \nu\bar{\nu}$ 这类过程对轻子部分的结构给出了很强的限制. 这些衰变可以作为 Z 的不可见衰变宽度 (invisible width) 来测量. 对于每一种中微子都有

$$\Gamma(\mathrm{Z} \to \nu_i + \bar{\nu}_i) = \frac{\mathrm{G_F} M_Z^3}{12\pi\sqrt{2}} = 0.161\ \mathrm{GeV} \tag{10-152}$$

实验间接测量的 (不可见) 衰变率为

$$\Gamma(\mathrm{Z} \to \text{“不可见”粒子}) = (0.499 \pm 0.0015)\ \mathrm{GeV} \tag{10-153}$$

因此轻中微子的数目被限制为 3. 因此, 如果存在第四代轻子, 那么它对应的中微子必须足够重, 才不会对 Z 的不可见衰变宽度做出贡献.

Z 有一个特别的性质: 它可以在正负电子对撞机中通过共振得到, 有非常大的截面积. 1989 年, 为了研究 Z 建造了 LEP (large electron positron) 对撞机, Z 的性质得到了高精度而彻底的研究.

Higgs 粒子

标准模型最重要的特征是存在一个标量场, 它导致了对称性自发破缺, 规范玻色子通过吃掉标量粒子获得了质量. 剩下的标量粒子称为 Higgs 粒子. 我们并没有关于 Higgs 粒子质量的了解和限制, 因此寻找它是十分困难的. CERN 建造了 LHC (large hadron collider) 用来寻找 Higgs 粒子 (2012 年发现). 我们将这个特别的粒子的性质总结如下:

(1) $M_\mathrm{W} = M_z \cos\theta_\mathrm{W}$.

这个关系是标量场二重态属性的直接结果, 并且与实验符合

$$\rho = \frac{M_\mathrm{W}^2}{M_z^2 \cos^2\theta_\mathrm{W}} = 1.003 \pm 0.004 \tag{10-154}$$

一般来讲, 对一个弱同位旋为 T, 弱荷为 Y 的 $SU(2)\times U(1)$ 群的多重态 $\phi_{T,Y}$, 它对 ρ 的贡献为

$$\rho=\frac{M_{\mathrm{W}}^2}{M_z^2\cos^2\theta_{\mathrm{W}}}=\frac{\sum_{T,Y}|v_{T,Y}|^2\left[T(T+1)-Y^2\right]}{2\sum_{T,Y}|v_{T,Y}|^2Y^2/4} \tag{10-155}$$

这里 $v_{T,Y}=\langle 0|\phi_{T,Y}|0\rangle$, 是 $\phi_{T,Y}$ 的真空期望值. 因此, 这对于 Higgs 粒子是二重态以外的多重态有很大的限制.

(2) Higgs 和费米子耦合.

Higgs 粒子和费米子的耦合为 Yukawa 耦合

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Y}}=f_{ij}\bar{\psi}'_{i\mathrm{L}}\phi\psi'_{j\mathrm{R}}+h.c \tag{10-156}$$

对称性自发破缺由下式产生

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v+h\end{pmatrix},\quad v\simeq 250\ \mathrm{GeV} \tag{10-157}$$

Yukawa 耦合给出

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Y}}=m_{ij}\bar{\psi}'_{i\mathrm{L}}\psi'_{j\mathrm{R}}+\frac{f_{ij}}{\sqrt{2}}h(x)\bar{\psi}'_{i\mathrm{L}}\psi'_{j\mathrm{R}}+h.c.,\quad m_{ij}=\frac{v}{\sqrt{2}}f_{ij} \tag{10-158}$$

注意, 质量矩阵 m_{ij} 和 Yukawa 耦合 f_{ij} 成比例. 将质量矩阵用两个幺正矩阵对角化

$$UmV^{\dagger}=m_D,\quad m_D\ \text{是对角矩阵} \tag{10-159}$$

质量项为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{m}}=\bar{\psi}'_{i\mathrm{L}}m_{ij}\psi'_{j\mathrm{R}}=\bar{\psi}'_{\mathrm{L}}U^{+}m_DV\psi'_{\mathrm{R}}=\bar{\psi}_{\mathrm{L}}m_D\psi_{\mathrm{R}}=m_i\bar{\psi}_{\mathrm{L}i}\psi_{\mathrm{R}i},\quad \text{对 } i \text{ 求和} \tag{10-160}$$

其中

$$\psi_{\mathrm{L}}=U\psi'_{\mathrm{L}},\quad \psi_{\mathrm{R}}=V\psi'_{\mathrm{R}} \tag{10-161}$$

是质量本征态. 由于在质量矩阵为对角阵时 $m_{ij}\propto f_{ij}$, Yukawa 耦合也是对角的, 即

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Y}}=m_i\bar{\psi}_{i\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}i}+\frac{m_i}{v}h(x)\bar{\psi}_{i\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}i}+h.c. \tag{10-162}$$

因此 Higgs 同任意费米子的耦合正比于该费米子的质量, 而且保持味量子数和宇称. 这说明 Higgs 粒子一旦产生就会衰变成能量许可下最重的粒子.

注意, 和规范玻色子的耦合

$$\mathcal{L}_{\phi VV}=gh(x)\left[M_{\mathrm{W}}W_{\mu}^{+}W^{-\mu}+\frac{1}{2\cos\theta_{\mathrm{W}}}M_{\mathrm{Z}}Z^{\mu}Z_{\mu}\right] \tag{10-163}$$

也有和质量成比例的特点.

(3) Higgs 粒子的质量.

$$m_{\mathrm{h}} = \sqrt{2\mu^2} = \sqrt{2\lambda}v, \quad v \approx 250\ \mathrm{GeV} \tag{10-164}$$

实验上没有给出 Higgs 粒子自作用 λ 的信息, 因此 m_{h} 没有限制, 对 Higgs 粒子的寻找十分困难. 但 2012 年 CERN 的实验宣布找到了 Higgs 粒子, 质量约为 125 GeV.

10.3.3 中微子振荡

如果 ν 都是无质量的, 则轻子部分没有混合角

$$\begin{pmatrix} \nu_{\mathrm{e}} \\ e \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\mu} \\ \mu \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\tau} \\ \tau \end{pmatrix}_{\mathrm{L}} \tag{10-165}$$

这是因为, 如果所有的中微子都是零质量的, 那么它们是简并的, 所有的混合角都可以通过重新定义中微子场来吸收. 但是如果它们是有质量的, 混合角是物理上有效应的, 不能通过重新定义吸收掉, 就会产生一个重要的现象 —— 中微子振荡 [41]. 或者反过来, 观察到中微子振荡就告诉我们中微子是有质量的, 而且质量都不一样.

我们现在来描述中微子振荡现象. 假设中微子都是有质量的, 和夸克部分类比, 它们是质量本征态 ν_1, ν_2, ν_3 的线性组合

$$\begin{pmatrix} \nu_{\mathrm{e}} \\ \nu_{\mu} \\ \nu_{\tau} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \tag{10-166}$$

其中, U 是幺正矩阵. 如果 $t = 0$ 时刻生成一束纯 ν_{e} 粒子束, 我们可以把它写成质量本征态的线性组合如下

$$|\nu_{\mathrm{e}}(0)\rangle = U_{\mathrm{e}1}|\nu_1\rangle + U_{\mathrm{e}2}|\nu_2\rangle + U_{\mathrm{e}3}|\nu_3\rangle \tag{10-167}$$

它随时间的演化由能量本征值决定

$$|\nu_{\mathrm{e}}(t)\rangle = U_{\mathrm{e}1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_1 t}|\nu_1\rangle + U_{\mathrm{e}2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_2 t}|\nu_2\rangle + U_{\mathrm{e}3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_3 t}|\nu_3\rangle \tag{10-168}$$

其中

$$E_i^2 = p^2 + m_i^2 \tag{10-169}$$

假设 $p \gg m_i$, 则有 $E_i \approx p + \dfrac{m_i^2}{2p}$ 以及

$$E_i - E_j = \frac{m_i^2 - m_j^2}{2p} \tag{10-170}$$

由于线性组合的系数随时间演化, 这束粒子的成分将在 $\nu_{\mathrm{e}}, \nu_{\mu}$ 和 ν_{τ} 间振荡. 将振荡长度 l_{ij} 定义为

$$l_{ij} = \frac{2\pi}{E_i - E_j} \approx \frac{4\pi p}{|m_i^2 - m_j^2|} = 2.5\ \mathrm{m}\left[\frac{p\ (\mathrm{MeV})}{\Delta m^2\ (\mathrm{eV})^2}\right] \tag{10-171}$$

它决定了振荡的尺度.

考虑两种中微子振荡的简单情况来说明这个现象. 在 $t = 0$ 时刻, 弱本征态写成

$$\begin{aligned} |\nu_{\mathrm{e}}(0)\rangle &= \cos\theta\,|\nu_1\rangle + \sin\theta\,|\nu_2\rangle \\ \left|\nu_{\mu}(0)\right\rangle &= -\sin\theta\,|\nu_1\rangle + \cos\theta\,|\nu_2\rangle \end{aligned} \tag{10-172}$$

考虑初态为 $|\nu_{\mathrm{e}}(0)\rangle$ 的情况, 它的时间演化为

$$\begin{aligned} |\nu_{\mathrm{e}}(t)\rangle &= \cos\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_1 t}\,|\nu_1\rangle + \sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_2 t}\,|\nu_2\rangle \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_1 t}\left[\cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta\exp\left(-\mathrm{i}\frac{2\pi x}{l_{12}}\right)|\nu_2\rangle\right] \end{aligned} \tag{10-173}$$

其中, l_{12} 为振荡长度. 在时刻 t (离中微子源的距离为 x 的地方) 找到态 ν_{e} 的概率幅为

$$\langle\nu_{\mathrm{e}}|\nu_{\mathrm{e}}(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_1 t}\left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\exp\left(-\mathrm{i}\frac{2\pi}{l_{12}}x\right)\right] \tag{10-174}$$

概率为

$$P(\nu_{\mathrm{e}} \to \nu_{\mathrm{e}}) = \left|\langle\nu_{\mathrm{e}}|\nu_{\mathrm{e}}(t)\rangle\right|^2 = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l_{12}}\right)\right] \tag{10-175}$$

找到另一种成分 ν_{μ} 的概率为

$$P(\nu_{\mathrm{e}} \to \nu_{\mu}) = 1 - P(\nu_{\mathrm{e}} \to \nu_{\mathrm{e}}) = 2\sin^2\theta\cos^2\theta\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l_{12}}\right)\right] \tag{10-176}$$

不同反应中中微子振荡的观察是过去十年最轰动的进展之一, 它证实了中微子质量的存在而且质量都不相同. 由于在原来的模型中中微子无质量, 所以观测到中微子质量说明需要扩展标准模型. 最简单的扩展是对每个中微子加上右手分量, 但也有其他可能.

10.4 附录: 幺正性

从第 4 章的讨论可知, 为了保持总概率守恒, S 矩阵必须是幺正的

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1, \quad \text{即} \sum_c S_{ac}S_{bc}^* = \delta_{ab}, \quad \sum_c S_{ca}S_{cb}^* = \delta_{ab}$$

散射振幅 T_{ab} 和 S_{ab} 有如下关系

$$S_{ab} = \delta_{ab} + \mathrm{i}\,(2\pi)^4\,\delta^4\,(p_a - p_b)\,T_{ab} \tag{10-177}$$

它满足

$$T_{ab} - T_{ba}^* = \mathrm{i}\sum_c T_{ac}T_{bc}^*\,(2\pi)^4\,\delta^4\,(p_a - p_c) \tag{10-178}$$

注意, 这个等式左端是 T 的线性项, 而右端为 T 的二次项. 换句话说, 这是一个非线性关系, 它表明 T 是有限制的, 不能任意大. 还有一个重要的性质, 如果将 T 用某小参数 λ 微扰展开

$$T = \lambda T^{(1)} + \lambda^2 T^{(2)} + \cdots \tag{10-179}$$

那么由式 (10-178) 可以看到

$$T_{ab}^{(1)} - T_{ba}^{(1)*} = 0 \tag{10-180}$$

和

$$T_{ab}^{(2)} - T_{ba}^{(2)*} = \mathrm{i}\sum_c T_{ac}^{(1)}T_{bc}^{(1)*}\,(2\pi)^4\,\delta^4\,(p_a - p_c) \tag{10-181}$$

因此 λ 的二阶项通过幺正关系与一阶项的乘积联系起来. 或者说, λ 的不同阶次通过非线性幺正关系联系起来. 可以利用这个关系用低阶项构造高阶项.

光学定理 (optical theorem)

对 $a = b$ 的特殊情况有

$$T_{aa} - T_{aa}^* = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}T_{aa} = \mathrm{i}\sum_c |T_{ac}|^2\,(2\pi)^4\,\delta^4\,(p_a - p_c) \tag{10-182}$$

其中, T_{aa} 表示初态和末态相同的散射振幅, 包括初末态的动量. 换句话说, 这是一个前向散射振幅 (forward scattering amplitude). 考虑一个简单情况

$$A\,(p_1) + B\,(p_2) \to X \tag{10-183}$$

其中, X 是一个 n 粒子态, 其动量为 $k_1, \cdots k_n$. 注意, 末态粒子数被能量守恒和动量守恒限制. 这里有 $a = A(p_1) + B(p_2)$. 对 c 求和有

$$\sum_c = \int \prod_{l=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^3 k_l}{(2\pi)^3 2\omega_l} \tag{10-184}$$

将这种情况下的弹性前向振幅表示为

$$T_{aa} = T\left(A\left(p_1\right) + B\left(p_2\right) \to A\left(p_1\right) + B\left(p_2\right)\right) \tag{10-185}$$

或

$$T\left(A + B \to A + B\right) \tag{10-186}$$

从初态到末态的动量相同, 幺正关系变为

$$\begin{aligned}
&T(A + B \to A + B) - T\left(A + B \to A + B\right)^* \\
=&2\mathrm{i}\ \mathrm{Im}T\left(A + B \to A + B\right) \\
=&\mathrm{i}\int \prod_{l=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^3 k_l}{(2\pi)^3 2\omega_l} \left|T\left(A + B - X\right)\right|^2 (2\pi)^4\, \delta^4 \left(p_1 + p_2 - \sum_{j=1}^{n} k_j\right)
\end{aligned} \tag{10-187}$$

回顾第 4 章, $A + B \to X$ 的总截面积为

$$\begin{aligned}
\sigma\left(A\left(p_1\right) + B\left(p_2\right) \to X\right) =& \frac{1}{4\left[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2\right]^{1/2}} \\
&\times \int (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_1 + p_2 - \sum_{j=1}^{n} k_j\right) \left|T_{fi}\right|^2 \prod_{l=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^3 k_l}{(2\pi)^3 2\omega_l}
\end{aligned} \tag{10-188}$$

在质心系有

$$p_1 = (E_1, \boldsymbol{p}), \quad p_2 = (E_2, -\boldsymbol{p}) \tag{10-189}$$

和

$$(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 = |\boldsymbol{p}|^2 \left(E_1 + E_2\right)^2 \tag{10-190}$$

其中, $E_{1,2}, |\boldsymbol{p}|$ 为质心系中初态的能量和动量. 因此可以将幺正关系写成

$$\mathrm{Im}T\left(A + B \to A + B\right) = 2|\boldsymbol{p}|(E_1 + E_2) \sum_X \sigma\left(A\left(p_1\right) + B\left(p_2\right) \to X\right) \tag{10-191}$$

它把前向散射振幅的虚部与总截面积联系起来, 称为**光学定理**.

分波幺正限 (unitary bound)

对用分波 (partial wave) 描述散射的情况, 可以得到更有用的关系. 考虑质心系中两个粒子的弹性散射 $A(p_1)+B(p_2)\rightarrow A(p_3)+B(p_4)$. 由第 4 章附录的公式, 微分截面为

$$\mathrm{d}\sigma(AB\rightarrow AB)=\frac{1}{4p_i(E_1+E_2)}\int(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)|T_{AB}|^2\frac{\mathrm{d}^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3}\frac{\mathrm{d}^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \tag{10-192}$$

其中, p_i 为质心系中初态动量, T_{AB} 为 $A(p_1)+B(p_2)\rightarrow A(p_3)+B(p_4)$ 的散射振幅. 先计算质心系中的两体相空间

$$\begin{aligned}\rho&=\int(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)\frac{\mathrm{d}^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3}\frac{\mathrm{d}^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4}\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\delta\left(E_1+E_2-E_3-E_4\right)\frac{\mathrm{d}^3p_3}{2E_4 2E_3}\end{aligned} \tag{10-193}$$

其中

$$E_4=\sqrt{m_4^2+E_3^2-m_3^2} \tag{10-194}$$

将积分测度写成

$$\frac{\mathrm{d}^3p_3}{E_3}=p_3\mathrm{d}E_3\mathrm{d}\Omega \tag{10-195}$$

则

$$\rho=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\delta\left(E_{CM}-E_3-E_4\right)\frac{p_3\mathrm{d}E_3\mathrm{d}\Omega}{4E_4} \tag{10-196}$$

定义新变量

$$x=E_3+E_4 \tag{10-197}$$

则

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}E_3+\frac{\mathrm{d}E_4}{\mathrm{d}E_3}=\left(\frac{E_3+E_4}{E_4}\right)\mathrm{d}E_3 \tag{10-198}$$

或

$$\mathrm{d}E_3=\frac{E_4}{E_{CM}}\mathrm{d}x \tag{10-199}$$

其中利用了 $E_{CM}=E_3+E_4$. 相空间则为

$$\rho=\frac{1}{16\pi^2E_{CM}}\int\mathrm{d}x p_3\delta\left(E_{CM}-x\right)\mathrm{d}\Omega=\frac{p_f\mathrm{d}\Omega}{16\pi^2E_{CM}} \tag{10-200}$$

其中, p_f 为质心系末态动量. 则

$$\mathrm{d}\sigma\left(AB\rightarrow AB\right)=\frac{1}{4p_iE_{CM}}\left|T_{AB}\right|^2\frac{\mathrm{d}\Omega\ p_f}{16\pi^2E_{CM}} \tag{10-201}$$

如果假设散射振幅和方位角无关且所有质量相同, 可以得到一个更简单的关系

$$\mathrm{d}\sigma\left(AB\to AB\right)=\frac{1}{4E_{CM}^{2}}\left|T_{AB}(\theta)\right|^{2}\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{8\pi} \tag{10-202}$$

这里已经利用了 $p_i=p_f$. 总截面积为

$$\sigma_{\text{tot}}\left(AB\to AB\right)=\frac{1}{32E_{CM}^{2}\pi}\int\left|T_{AB}(\theta)\right|^{2}\mathrm{d}(\cos\theta) \tag{10-203}$$

利用 Legendre 多项式 $P_l(\cos\theta)$ 展开

$$T_{AB}(\theta)=16\pi\sum_{l}\left(2l+1\right)a_{l}P_{l}(\cos\theta) \tag{10-204}$$

其中, a_l 称为分波. 利用 Legendre 多项式的正交性

$$\int_{-1}^{1}P_{l}(\cos\theta)P_{k}(\cos\theta)\mathrm{d}(\cos\theta)=\frac{2}{2l+1}\delta_{lk} \tag{10-205}$$

并对角度积分, 则总截面积变为

$$\begin{aligned}\sigma_{tot}\left(AB\to AB\right)=&\frac{1}{32E_{CM}^{2}}\sum_{ll'}\left(16\pi\right)^{2}\left(2l+1\right)\left(2l'+1\right)a_{l}a_{l'}^{*}\int P_{l}(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)\mathrm{d}(\cos\theta)\\=&\frac{16\pi}{E_{CM}^{2}}\sum_{l}\left(2l+1\right)2\left|a_{l}\right|^{2}\end{aligned} \tag{10-206}$$

上式没有交叉项, 从而可以看出每一个分波 a_l 对总截面的贡献. 由光学定理

$$\mathrm{Im}\,T_{AB}(\theta)|_{\theta=0}=2E_{CM}p_{i}\sum_{X}\sigma_{\text{tot}}\left(A+B\to X\right)\geqslant 2E_{CM}p_{i}\sigma_{\text{tot}}\left(A+B\to A+B\right) \tag{10-207}$$

对分波有

$$\sum_{l}\left(2l+1\right)\mathrm{Im}a_{l}\geqslant\frac{2p_{i}}{E_{CM}}\sum_{l}\left(2l+1\right)\left|a_{l}\right|^{2} \tag{10-208}$$

这也是一个非线性关系, 说明分波幅度 a_l 不能任意大. 这个关系在只有一个分波对截面积有贡献的情况很有用. 在高能极限有

$$\mathrm{Im}a_{l}\geqslant\left|a_{l}\right|^{2} \tag{10-209}$$

这说明

$$\mathrm{Im}\frac{1}{a_{l}}\geqslant 1 \tag{10-210}$$

以及

$$|a_{l}|\leqslant 1,\quad 0\leqslant\mathrm{Im}a_{l}\leqslant 1$$

对应的截面积有上限

$$\sigma_l = \frac{32\pi}{E_{CM}^2}(2l+1)\left|a_l\right|^2 \leqslant \frac{32\pi}{E_{CM}^2}(2l+1) \tag{10-211}$$

在前面的讨论中忽略了自旋. 在相对论性系统中, 需要利用螺旋度来描述有自旋的粒子, 螺旋度振幅的分波展开有如下形式

$$T_{\lambda_3\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}(E,\theta) = \sum_J (2J+1)\, T^J_{\lambda_3\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}(E)\, d^J_{\mu\lambda}(\theta) \tag{10-212}$$

其中, $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \mu = \lambda_3 - \lambda_4, d^J_{\mu\lambda}(\theta)$ 为 d 函数. 则幺正关系要求

$$\left|T^J_{\lambda_3\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}(E)\right| \leqslant 常数 \tag{10-213}$$

这和我们讨论过的分波 a_l 的上限相似.

第 11 章　强相互作用理论

11.1　夸 克 模 型

11.1.1　同位旋对称性

早期的核反应研究发现, 核子所带的电荷对核力没有大的影响, 这被称为电荷无关性 (charge independence). 为了解释这一特征, 有人提出, 强相互作用有 $SU(2)$ 对称性, 变换对象是 n 与 p. 所有相关的实验结果似乎都支持这一假设. 这种对称性变换是在被称为同位旋空间的抽象空间中运作. $SU(2)$ 同位旋对称性的结构很像我们所熟悉的量子力学中的角动量 $SU(2)$ 代数, 只是作用的空间不同而已. 因此, $SU(2)$ 的生成元 T_1, T_2, T_3 与角动量代数满足相同的对易关系

$$[T_i, T_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}T_k \tag{11-1}$$

这意味着同位旋对称性的不可约表示与角动量的是相同的, 只有名称发生了改变: 角动量 → 同位旋. 中子 n 和质子 p 与自旋 1/2 的系统中自旋向上和自旋向下的态有着相同的意义, 即作用在 n 与 p 上, 可得到

$$T_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle, T_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle, T_+|n\rangle = |p\rangle, T_-|p\rangle = |n\rangle, \cdots \tag{11-2}$$

这意味着 n 与 p 在同位旋变换下形成一个二重态

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \tag{11-3}$$

且

$$N \to N' = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{2}\right)N \tag{11-4}$$

这与角动量的情形相同, 其中 α_i 是一些实参数, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ 是 Pauli 矩阵. 因此, 可以将角动量对称性的结果应用到同位旋上. 同位旋对称性意味着

$$[T_i, H_s] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{11-5}$$

其中, H_s 是强相互作用的哈密顿量.

自从为了解释强相互作用里中子与质子的行为而引入了同位旋, 我们发现了很多的强相互作用粒子, 包括 π, K, Λ, Σ 等. 这些粒子被称为强子. 若同位旋是一个

有用的强相互作用量子数, 应该能够对所有的强子定义这个物理量. 一开始我们并不知道除中子和质子之外的粒子的同位旋, 但是可以用强子产生过程中同位旋守恒这个假设来帮助我们定其他强子的同位旋. 例如, 考虑 $\mathrm{p}+\mathrm{p}\to\mathrm{n}+\mathrm{p}+\pi^+$ 的反应. 初态有 $T_3=1$ 且 $T=1$, 而末态的 np 有 $T_3=0$ 且 $T=0$ 或 1. 因此, 由 T_3 守恒可以得到 π^+ 必有 $T_3=1$. 因此得到总的同位旋 $T=1$ 或 2. 上述推导尚未对 π^+ 给出一个确定的 T 值, 只体现了同位旋守恒对粒子可能的同位旋的限定. 此外, 还有其他的测量可以将 π^+ 的同位旋确定为 $T=1$. 例如, 已经发现有两个与 π^+ 质量极其接近的粒子, 与 π^+ 同位旋为 $T=1$ 的假设一致. 事实上, 粒子质量相近是确定同位旋多重态的一个非常有用的信息.

从类似的测量和观测中, 得到了下列的同位旋多重态:

$$\begin{aligned}&0\text{ 自旋的有}T=1:(\pi^+,\pi^0,\pi^-),\quad T=\frac{1}{2}:(\mathrm{K}^+,\mathrm{K}^0),\ (\bar{\mathrm{K}}^0,\mathrm{K}^-),\quad T=0:\eta\\&1/2\text{ 自旋的有}T=1:(\Sigma^+,\Sigma^0,\Sigma^-),\quad T=\frac{1}{2}:(\Xi^0,\Xi^-),\quad T=0:\Lambda\\&1\text{ 自旋的有}T=1:(\rho^+,\rho^0,\rho^-),\quad T=\frac{1}{2}:(\mathrm{K}^{*+},\mathrm{K}^{0*}),\ (\mathrm{K}^{0*},\mathrm{K}^{*-})\end{aligned}$$

同位旋对称性的推论

1. 质量简并

同位旋变换下, 中子和质子二重态有如下变换形式

$$N\to N'=\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{2}\right)N,\quad \bar{N}\to\bar{N}'=\bar{N}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{2}\right)\tag{11-6}$$

从而得到

$$\bar{N}'N'=\bar{N}N\tag{11-7}$$

这是场论中的质量项, 因此可以得到 n 与 p 有相同的质量

$$m_N\bar{N}N=m_N\left(\bar{p}p+\bar{n}n\right)\tag{11-8}$$

这个关系同样适用于其他同位旋多重态. 例如, $m_{\pi^0}=m_{\pi^+}$. 但实验上, 同位旋多重态的质量不是完全相等的, 而是会有微小差异, 例如,

$$\frac{m_\mathrm{n}-m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{n}+m_\mathrm{p}}\sim 0.7\times10^{-3},\quad \frac{m_{\pi^+}-m_{\pi^0}}{m_{\pi^+}+m_{\pi^0}}\sim 1.7\times10^{-2},\quad \cdots\tag{11-9}$$

因此, 可以将同位旋对称性视为能好到 5%左右的一个近似对称性, 由于同位旋多重态带有不同的电荷, 电磁相互作用可以认为是质量差别的一个来源.

2. 耦合常数之间关系

除了质量关系, 由同位旋对称性也可推出耦合常数之间的某种关系. 例如, 写下 $T=1$ 的 π 子场 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$ 与核子的作用项可以得到如下形式的耦合

$$g\bar{N}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}N \tag{11-10}$$

上式对于同位旋变换是不变的. 现在我们来证明这个关系. 作一个无穷小的同位旋变换

$$N\to N'=\left(1-\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{2}\right)N,\quad \bar{N}\to\bar{N}'=\bar{N}\left(1+\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{2}\right) \tag{11-11}$$
$$\boldsymbol{\pi}\to\boldsymbol{\pi}'=\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{\alpha}$$

从而

$$\begin{aligned}\bar{N}'(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}')N'&\to\bar{N}\left(1+\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{2}\right)[\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{\pi}+\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{\alpha})]\left(1-\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{2}\right)N\\&=\bar{N}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}N+\bar{N}\left\{2\mathrm{i}\left[\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{2},\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}}{2}\right]-\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{\alpha}\right\}N\end{aligned}$$

利用 Pauli 矩阵的对易关系

$$\left[\frac{\tau_i}{2},\frac{\tau_j}{2}\right]=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\frac{\tau_k}{2} \tag{11-12}$$

可以得到

$$\left[\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{2},\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}}{2}\right]=\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{\alpha} \tag{11-13}$$

且

$$\bar{N}'\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}'N'=\bar{N}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}N \tag{11-14}$$

因此耦合在同位旋变换下不变. 写出

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}=\begin{pmatrix}\pi^0 & \sqrt{2}\pi^+\\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0\end{pmatrix} \tag{11-15}$$

即有

$$\begin{aligned}g\bar{N}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}N&=g\begin{pmatrix}\bar{p} & \bar{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi^0 & \sqrt{2}\pi^+\\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ n\end{pmatrix}\\&=g\bar{p}\left(\pi^0p+\sqrt{2}\pi^+n\right)+g\bar{n}\left(\sqrt{2}\pi^-p-\pi^0n\right)\end{aligned}$$

上式将 π' 与核子之间的耦合常数关联了起来. 换言之, 在没有同位旋对称性的情况下, $\bar{\mathrm{p}}\pi^0\mathrm{p}$ 与 $\bar{\mathrm{p}}\pi^+\mathrm{n}$ 之间的耦合是彼此互不相关的. 但是同位旋对称性要求这两者之间有一定的关系. 当然, 以上推导与实验结果有微小差异, 这来自于同位旋对称性的破缺.

3. 衰变过程的同位旋关系

不难看出, 同位旋对称性也会给出强子衰变过程的某些关系. 例如, 考虑 $N^*(1232)$, 同位旋为 $T=\frac{3}{2}$, 有 4 种近似的质量简并态, N^{*++}, N^{*+}, N^{*0}, N^{*-}, 可以衰变到 $\pi' s(T=1)$ 和核子 $(T=\frac{1}{2})$:

$$\left|\pi^+\right\rangle=|1,1\rangle, \quad \left|\pi^0\right\rangle=|1,0\rangle, \quad \left|\pi^-\right\rangle=|1,-1\rangle$$

$$|p\rangle=\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \quad |n\rangle=\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

我们现在利用同位旋对称性将 N^* 不同的衰变模式联系起来. 从第 2 章附录里讨论的 $SU(2)$ 表示, 可以得到同位旋的如下关系

$$\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \tag{11-16}$$

运用在 πN 的情形, 可以得到

$$\left|N^{*+}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\pi^0 \mathrm{p}\right\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}\left|\pi^+ \mathrm{n}\right\rangle \tag{11-17}$$

因此, 同位旋对称性可以给出衰变率之比 —— 即振幅之比的平方

$$\frac{\Gamma\left(\mathrm{N}^{*+}\rightarrow\pi^+\mathrm{n}\right)}{\Gamma\left(\mathrm{N}^{*+}\rightarrow\pi^0\mathrm{p}\right)}=\frac{1}{2} \tag{11-18}$$

以上关系与实验结果吻合得很好.

11.1.2 $SU(3)$ 对称性

同位旋可以将许多不同的粒子通过 $SU(2)$ 对称性关联起来. 我们可以探讨是否存在一个更大的对称性, 将更多的粒子用某种方式关联起来. 为了研究这个问题, 显然需要除同位旋之外的量子数来标示粒子.

奇异数 在 Λ 和 K 粒子被发现时, 它们是成对产生的 —— 协同产生 (associated production), 寿命也比较长. 为了解释这一问题, 假设这些新粒子有一个新的量子数, 称为**奇异数** S, 在强相互作用中守恒, 但在衰变过程中被破坏. 例如, 在 $\pi^-\mathrm{p}\longrightarrow\Lambda^0+\mathrm{K}^0$ 的反应中, 需要假定 Λ^0 与 K^0 有异号的奇异数

$$S(\Lambda^0)=-1, \quad S(\mathrm{K}^0)=1 \tag{11-19}$$

才能保证奇异数在强相互作用中守恒. 从这个新的量子数出发, 可以得到一个通用的关系式

$$Q=T_3+\frac{Y}{2} \tag{11-20}$$

其中, $Y = B + S$ 被称为超荷 (hypercharge), B 是重子数 (Baryon number). 上式被称为 Gell-Mann-Nishijima 关系 [42].

八重道 截至 20 世纪 60 年代, 已经发现了大量的新粒子. 人们相信可能存在一种更大的对称性, 将许多不同的同位旋多重态联系起来. 1961 年, Gell-Mann 与 Neeman [43] 各自分别发现了当具有相同自旋和宇称的强子划分到同一组时, 它们在超荷和同位旋的二维图中将会遵循一种八点或十点的规律, 如图 11-1 所示. 事实上强子的这种关联符合 $SU(3)$ 对称群的某些不可约表示. 这个结论可以推广到其他自旋和宇称的强子, 它们也在 $SU(3)$ 的八维和十维表示上. 因此, 强子谱显示出部分 $SU(3)$ 对称性的特征, $SU(2)$ 的同位旋对称性可推广到 $SU(3)$. 事实上, 当这个理论框架提出时, N^* 多重态的 10 个粒子中只有 $S = -3$ 的 Ω 没有被发现. 因而利用上述对称性可以预言这个粒子的质量约为 1680 MeV/c^2. 1964 年, Brookhaven 实验室发现了这个粒子 [44]. 这是 $SU(3)$ 对称理论的一个强有力的支持证据.

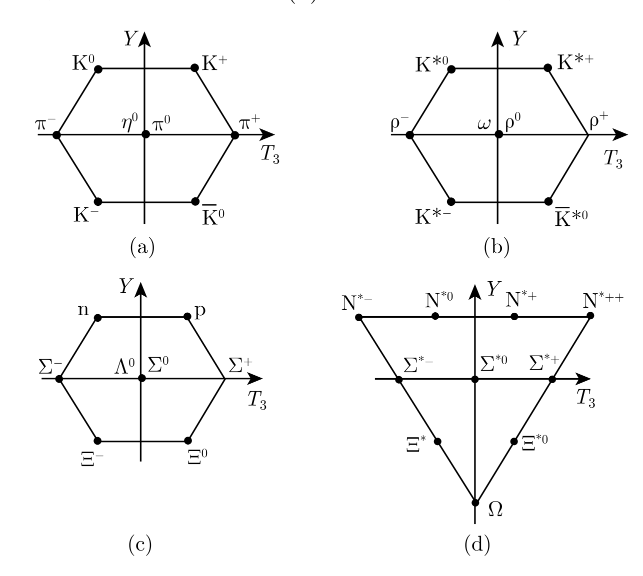


图 11-1 八重道 —— 强子的 $SU(3)$ 表示

八重态: (a)0^- 介子, (b) 1^- 介子, (c) $1/2^+$ 重子; 十重态: (d)$3/2^+$ 重子

然而这个对称性其实不如 $SU(2)$ 的同位旋对称性. $SU(3)$ 多重态的质量差异最小也达到了 20% 左右. 尽管如此, 利用 $SU(3)$ 来给强子进行分类仍然是个很实用的工具. 这种方法被称为**八重道**(eightfold way).

11.1.3 夸克模型

八重道的一个不寻常的地方在于八维表示和十维表示并非 $SU(3)$ 群的最小表示. 人们怀疑强子内部有更小的组分按照 $SU(3)$ 群比八重态更小的表示变换. 1964

年, Gell-mann 和 Zweig 各自提出了夸克模型 [45], 其中所有的强子都是由自旋为 1/2 且按 $SU(3)$ 的 (最小的) 三维表示变换的夸克组成的

$$q_i = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \tag{11-21}$$

它们的量子数如表 11-1 所示.

表 11-1

	Q	T	T_3	Y	S	B
u	2/3	1/2	+1/2	1/3	0	1/3
d	−1/3	1/2	−1/2	1/3	0	1/3
s	−1/3	0	0	−2/3	−1	1/3

自旋定为 1/2 是因为, 只有这种束缚态下才可以既存在半整数自旋的费米子也存在整数自旋的玻色子, 而自旋是整数的夸克无法组成费米子. 在这样的框架下, 介子是 $\mathrm{q\bar{q}}$ 的束缚态, 例如,

$$\pi^+ \sim \bar{d}u, \quad \pi^0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d), \quad \pi^- \sim \bar{u}d \tag{11-22}$$

$$\mathrm{K}^+ \sim \bar{s}u\ , \quad \mathrm{K}^0 \sim \bar{s}d\ , \quad \mathrm{K}^- \sim \bar{u}s\ , \quad \eta^0 \sim \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s)$$

重子是 qqq 的束缚态, 例如,

$$\begin{aligned} &\mathrm{p} \sim uud, \quad \mathrm{n} \sim \mathrm{ddu} \\ &\Sigma^+ \sim suu, \quad \Sigma^0 \sim s\left(\frac{ud+du}{\sqrt{2}}\right), \quad \Sigma^- \sim sdd \\ &\Xi^0 \sim ssu, \quad \Xi^- \sim ssd, \quad \Lambda^0 \sim \frac{s(ud-du)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

夸克模型的要点在于强子的量子数与夸克组分所给出的一致. 例如, $\pi^+ \sim \bar{d}u$ 意味着, 如果把 u 夸克的电荷 2/3 和 $\bar{\mathrm{d}}$ 夸克的电荷 1/3 加起来, 就可以得到 π^+ 的电荷 +1. 对于其他相加守恒的量子数也是一样, 如奇异数 S 和同位旋第三分量 T_3. 经过稍微复杂一些的计算, 可以得到夸克束缚态的总的同位旋.

虽然强子的量子数都由夸克贡献, 但仍未能理解夸克如何通过相互作用来构成强子束缚态. 既然夸克可能是强子的基本组成, 那么寻找夸克就成了一个极其重要的任务. 夸克有个非同寻常的特征在于, 所有夸克携带的电荷都是分数电荷 ±2/3 或 ±1/3, 而目前所有实验室中观测到的粒子都是整数电荷. 这意味着在电荷守恒的前提下, 一定有一个夸克是稳定的, 从而应该很容易被发现. 但事实上, 不论是在

实验室环境下或者是在如岩层与海底这样的自然环境中, 人们从来没有发现过孤立的夸克.

除无法观测到夸克之外, 夸克模型中还有其他很难理解的特性:

(1) 夸克带有分数电荷, 所有已观测到的粒子都带有整数电荷. 因此至少有一个夸克是稳定的, 但目前没有任何夸克被观测到.

(2) 强子全部由 $\mathrm{q\bar{q}}$ 和 qqq 的束缚态组成, 却没有观测到 qq 和 qqqq 态的粒子. 注意到 qq 和 qqqq 与单夸克一样都是带有分数电荷的. 那么观测不到它们的原因可能与观测不到单个夸克的原因相同.

(3) 重子 N^{*++} 的夸克组分是 uuu. 如果选择自旋态 $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$, 则所有的夸克都是自旋向上的 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$. 这个系统在交换 u 夸克的变换下全对称. 如果假定基态是轨道角动量 $l=0$ 的态, 则空间波函数同样是对称的. 这将破坏 Pauli 不相容原理.

色自由度 解决以上问题的方法之一是, 对于每个夸克引入新的自由度 —— 色, 同时要求只有色单态才能够被观测到. 需要 3 种颜色才能得到 N^{*++} 的反对称波函数, 从而得到一个色单态. 换言之, 每种夸克都有三种颜色

$$u_\alpha=(u_1,u_2,u_3),\quad d_\alpha=(d_1,d_2,d_3),\quad \cdots \tag{11-23}$$

假设所有强子都在 $SU(3)_{\mathrm{C}}$ 对称性下形成色单态, 例如,

$$\mathrm{N}^{*++}\sim u_\alpha(x_1)\alpha_\beta(x_2)u_\gamma(x_3)\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \tag{11-24}$$

除此之外, 因为色单态无法由 qq 或 qqqq 组成, 所以这些束缚态不会出现在观测到的强子谱中. 同样地, 单个夸克也无法被观测到. 这种 $SU(3)$ 的局域色对称性是强相互作用理论 QCD 的基石.

Gell-Mann-Okubo 质量公式

由于八重道的 $SU(3)$ 并不是一个精确的对称性, 我们要想办法理解 $SU(3)$ 破缺形式. 实验上, $SU(2)$ 是一个相当好的对称性, 因此为了方便起见, 在夸克模型中假定同位旋对称性是没有被破缺的: $m_u=m_d$. 此外, 再假定强子质量的平方可以表示为夸克质量的线性组合.

1. 0^- 介子

从方程 (11-22) 中某一个 0^- 介子的夸克组分出发, 可以用夸克质量表示出介子质量. 例如, 在 η 介子中, 发现 u, $\bar{\mathrm{u}}$ 夸克, d, $\bar{\mathrm{d}}$ 夸克和 s, $\bar{\mathrm{s}}$ 夸克的概率分别为 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{6}$. 因此 m_η^2 夸克质量的贡献为 $\frac{1}{6}(2m_{\mathrm{u}}+2m_{\mathrm{d}}+4\times 2m_{\mathrm{s}})=\frac{2}{3}(m_{\mathrm{u}}+2m_{\mathrm{s}})$. 引入

常量 λ 以得到正确量纲的介子质量

$$m_{\eta}^{2}=\lambda\left[\frac{2}{3}(m_{\mathrm{u}}+2m_{\mathrm{s}})\right] \tag{11-25}$$

对于其他的介子质量, 同样有

$$m_{\pi}^{2}=\lambda(2m_{\mathrm{u}})$$
$$m_{\mathrm{k}}^{2}=\lambda\left(m_{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{s}}\right)$$

从上式消去夸克质量, 可以得到

$$4m_{\mathrm{k}}^{2}=m_{\pi}^{2}+3m_{\eta}^{2} \tag{11-26}$$

这就是 Gell-Mann-Okubo 质量公式 [46], 最初是利用 $SU(3)$ 群的性质推导出来的, 比较复杂. 这里的推导则相对简单. 实验上可以测得等式左边的 $4m_{\mathrm{k}}^{2}\approx 0.98\ (\mathrm{GeV})^{2}$, 等式右边的 $m_{\pi}^{2}+3m^{2}\approx 0.92\ (\mathrm{GeV})^{2}$. 所以这个公式与实验吻合得很好.

2. $1/2^{+}$ 重子

同样地, 利用 $1/2^{+}$ 重子的夸克组分, 可以写出

$$m_{\mathrm{N}}=m_{0}+3m_{\mathrm{u}}$$
$$m_{\Sigma}=m_{0}+2m_{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{s}}$$
$$m_{\Xi}=m_{0}+m_{\mathrm{u}}+2m_{\mathrm{s}}$$
$$m_{\Lambda}=m_{0}+2m_{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{s}}$$

引入了参数 m_0 来表示除夸克之外影响重子质量的因素. 注意, 我们写下重子质量时用的是线性形式而非二次形式. 这个问题并没有很好的物理解释, 只是导出来的公式比较符合实验. Gell-Mann-Okubo 质量公式的形式为

$$\frac{m_{\Sigma}+3m_{\Lambda}}{2}=m_{\mathrm{N}}+m_{\Xi} \tag{11-27}$$

实验上, $\dfrac{m_{\Sigma}+3m_{\Lambda}}{2}\approx 2.23\ \mathrm{GeV}$ 且 $m_{\mathrm{N}}+m_{\Xi}\approx 2.25\ \mathrm{GeV}$, 与上式吻合得很好.

3. $3/2^{+}$ 重子

类似地, 可以得到 $3/2^{+}$ 重子的质量

$$m_{\mathrm{N}^{*}}=m_{0}+3m_{\mathrm{u}},\quad m_{\Sigma^{*}}=m_{0}+2m_{\mathrm{u}}+m_{\mathrm{s}}$$
$$m_{\Xi^{*}}=m_{0}+m_{\mathrm{u}}+2m_{\mathrm{s}},\quad m_{\Omega}=m_{0}+3m_{\mathrm{s}}$$

质量关系比较简单

$$m_{\Omega} - m_{\Xi^*} = m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} = m_{\Sigma^*} - m_{\mathrm{N}^*} \tag{11-28}$$

上式有时被称为等间距规则. 事实上在推导出这一关系时, Ω 粒子尚未发现, 上式被用于预言 Ω 的质量. 1964 年 Ω 粒子的发现为 $SU(3)$ 对称性理论提供了很强的支持.

$\omega - \phi$ 混合

1^- 介子的情况与上述并不相同. 如果按照与 0^- 介子同样的方式来处理 1^- 介子, 会得到如下 Gell-Mann-Okubo 质量关系

$$3m_{\omega}^2 = 4m_{\mathrm{K}^*}^2 - m_{\rho}^2 \tag{11-29}$$

由于 $m_{\mathrm{K}^*} = 890$ MeV 而 $m_{\rho} = 770$ MeV, 会得到 $m_{\omega} = 926.5$ MeV, 这与实验测得的 $m_{\omega} = 783$ MeV 结果相差甚远. 另外, φ 介子与 ω 有同样的 $SU(2)$ 量子数, 但质量为 $m_{\phi} = 1020$ MeV. 原则上, 当 $SU(3)$ 对称性破缺而 $SU(2)$ 对称性仍保持时, ω-φ 混合 (mixing) 是可能的. 假设由于某种原因而发生了不小的 ω-φ 混合, 可以由此推导出一个新的质量关系.

用 V_8 表示 $SU(3)$ 八重态中 $T = 0$ 的物理态, V_1 表示单态, 则其夸克组分分别为

$$V_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s), \quad V_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s) \tag{11-30}$$

以 V_1, V_8 为基写下质量矩阵

$$M = \begin{pmatrix} m_{88}^2 & m_{18}^2 \\ m_{18}^2 & m_{11}^2 \end{pmatrix} \tag{11-31}$$

假定八重态质量 m_{88}^2 即是 Gell-Mann-Okubo 质量关系预言的

$$3m_{88}^2 = 4m_{\mathrm{K}^*}^2 - m_{\rho}^2 \tag{11-32}$$

将 M 矩阵对角化, 可以得到 ω, φ 真正的物理质量

$$R^{\dagger}MR = M_{\mathrm{d}} = \begin{pmatrix} m_{\omega}^2 & 0 \\ 0 & m_{\phi}^2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{11-33}$$

由此可以得到

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{\omega}^2 & 0 \\ 0 & m_{\phi}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} m_\phi^2\sin^2\theta+m_\omega^2\cos^2\theta & m_\phi^2\cos\theta\sin\theta-m_\omega^2\cos\theta\sin\theta \\ m_\phi^2\cos\theta\sin\theta-m_\omega^2\cos\theta\sin\theta & m_\phi^2\cos^2\theta+m_\omega^2\sin^2\theta \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} m_{88}^2 & m_{18}^2 \\ m_{18}^2 & m_{11}^2 \end{pmatrix}
$$

由矩阵元 m_{88}^2 得到

$$
m_\phi^2\sin^2\theta+m_\omega^2\cos^2\theta=m_{88}^2 \tag{11-34}
$$

即

$$
\sin\theta=\sqrt{\frac{m_{88}^2-m_\omega^2}{m_\phi^2-m_\omega^2}} \tag{11-35}
$$

质量本征态的组合是

$$
\omega=\cos\theta V_8-\sin\theta V_1
$$

$$
\phi=\sin\theta V_8+\cos\theta V_1
$$

利用 Gell-Mann-Okubo 质量公式的结果 $m_{88}=926.5$ MeV, 以及 ω 和 ϕ 真正的质量, 可计算出混合角

$$
\sin\theta=0.76 \tag{11-36}
$$

这个结果很接近 $\sin\theta=\sqrt{2/3}=0.81$ 的理想混合 (ideal mixing), 在这种情况下质量本征态有个简单的形式

$$
\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u+\bar{d}d)
$$

$$
\phi=\bar{s}s
$$

混合角接近于理想混合角, 意味着 ϕ 态介子主要由 s 夸克组成.

Zweig 规则

在 $SU(2)$ 下 ω 与 ϕ 有相同的量子数, 其衰变宽度应该是相近的. 实验上测得 ω 的主要衰变道是 $\omega\to3\pi$, 但对 ϕ 来说, 尽管由于 $m_\phi=1020$ MeV, $m_k\approx494$ MeV, $\phi\to$KK 的相空间被压低, $m_\phi-2m_k=32$ MeV, 而 $m_\phi-3m_\pi=607$ MeV, $\phi\to3\pi$ 对比 $\phi\to$KK 的分支比仍然很低：

$$
B(\phi\to\mathrm{KK})\approx85\%,\quad B(\phi\to\pi\pi\pi)\sim13\% \tag{11-37}
$$

ϕ 主要衰变到相空间很小的 KK 道, 因此 ϕ 的总衰变宽度很窄. 这个现象有点难以理解. 考虑 ϕ 介子夸克成分, 它的衰变过程可用夸克图表示, 如图 11-2 所示. 为了

解释这些异常的衰变过程, Zweig 提出包含夸克反夸克湮没的过程都会因不明的原因而被大幅压低, 称为 Zweig 规则 [47]. 这解释了 φ 的衰变宽度 $\Gamma_\phi \approx 4.26$ MeV 远小于 $\Gamma_\omega \approx 8.5$ MeV. 注意 Zweig 规则是定性的, 很难将其定量化.

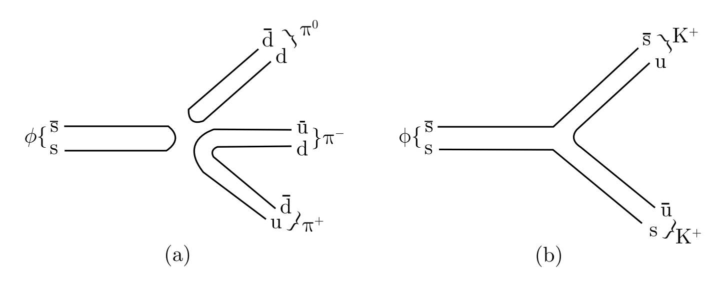


图 11-2 φ 介子衰变: 被 Zweig 规则禁止的道 (a) 和允许的道 (b)

1974 年, J/ψ(3100) 粒子被发现, 其衰变宽度极窄, 与 $\Gamma_\rho \sim 150$ MeV 和 $\Gamma_\omega \sim 8.5$ MeV 相较, 只有 $\Gamma_\psi \sim 70$ keV. 一个简单的解释是 ψ/J 是一个 $c\bar{c}$ 的束缚态, 质量低于两个含有粲夸克的介子质量和, 因此只能通过初态的 $c\bar{c}$ 湮没进行衰变. 按照 Zweig 规则, 这些衰变过程是被压低的. 因此 J/ψ 的窄宽度进一步支持了 Zweig 规则的正确性. 此后, 许多新的矢量介子如 $\psi', \Upsilon, \Upsilon'$ 等被发现, 其衰变宽度都很窄, 只能用 Zweig 规则解释. 因此 Zweig 规则在实验上得到了很好的支持. 然而在理论上, 时至今日仍无法对 Zweig 规则作量化的解释.

11.2 深度非弹性散射

强相互作用理论发展中的另一个非常重要的里程碑是对电子与质子的深度非弹性散射 (deep inelastic scattering) 的研究. 我们知道这个过程中的电子可以用 QED 很好地描述, 然而对于质子, 需要考虑强相互作用, 而强相互作用的耦合很大, 无法利用微扰论来分析. 早期我们甚至不知道一个正确的强相互作用理论应该是怎么样的. 20 世纪 60 年代, 人们做出过许多的尝试, 试图摆脱场论的框架, 利用更加复杂的 S 矩阵理论来解决它. 60 年代后期和 70 年代前期, 一系列电子质子散射实验使得强相互作用理论有了很大突破, 从而建立了 QCD 的框架. 尽管近年来 QCD 在高能区适用得很好, 但在低能情况下, 它仍然被大的耦合常数所限制. 下节将着重讨论强相互作用理论是如何发展成为 QCD 的.

11.2.1 质子结构

研究质子内部结构一个有用的过程是电子质子散射, 其中电子可以用 QED 准确描述. 我们知道探测质子结构的尺度依赖于探针的波长, 即电子的能量 —— 电子能量越高, 探测到的质子结构越精细. 下面按能量升高的顺序来看用于描述这一

过程的理论.

1. Rutherford 公式

这个公式的适用条件是电子能量低到可以认为是非相对论性粒子, 且质子可以被看成点粒子, 因为低能电子的波长远大于质子的尺寸. 忽略质子的反冲, 微分截面可以写成

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{Rutherford}}=\frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\dfrac{\theta}{2}} \tag{11-38}$$

其中, E 为入射电子动能; θ 为散射角; α 为精细结构常数.

上式可以通过经典力学的方法推导, 因为所有的量子效应都可以被忽略.

2. Mott 公式

当电子动能升高到与其质量相近时, 需要考虑电子的自旋和相对论效应, 得到 Mott 截面

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{Mott}}=\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{Rutheford}}\left(1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right),\quad \beta=v/c \tag{11-39}$$

此时质子仍可以看成没有内部结构的点粒子.

3. Rosenbluth 公式

当电子能量继续升高到接近最轻强子 π 的质量时, 需要考虑质子的强相互作用. 因为质子的电磁流是局域的, 并且这种情况下的初末态都很简单, 所以我们可以用形状因子 (form factor)将质子的强相互作用参数化, 方法如下.

如果质子是点粒子, 那么质子–光子的反应就和电子–光子的反应类似, 就是

$$\langle p'|J_\mu^{em}|p\rangle=\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) \tag{11-40}$$

如果考虑质子的强相互作用, 可以参数化为

$$\langle p'|J_\mu^{em}|p\rangle=\bar{u}(p')\left[\gamma_\mu F_1(q^2)+\mathrm{i}\frac{\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m}F_2(q^2)\right]u(p) \tag{11-41}$$

其中用到了 Lorentz 协变性和流守恒以得出这一简单的形式 (参照第 5 章的推导). 这里 $q=p-p'$, 即电子传给质子的动量. $F_1(q^2)$, $F_2(q^2)$ 是 q^2 的洛伦兹不变的函数, 将强相互作用参数化了, 一般被称为形状因子. 注意 $F_{1,2}$ 只是 q^2 的函数, 因为其他的洛伦兹不变量 (如 p^2 和 p'^2) 都固定在核子质量 M^2.

根据流守恒

$$\partial^\mu J_\mu^{em}=0 \tag{11-42}$$

可以得到

$$q^{\mu}\langle p'|J_{\mu}^{em}|p\rangle = 0 \tag{11-43}$$

推导过程如下. 由平移变换可以得出

$$J_{\mu}^{em}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}P\cdot x}J_{\mu}^{em}(0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot x} \tag{11-44}$$

从而有

$$\langle p'|J_{\mu}^{em}(x)|p\rangle = \langle p'|\mathrm{e}^{\mathrm{i}P\cdot x}J_{\mu}^{em}(0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot x}|p\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\langle p'|J_{\mu}^{em}(0)|p\rangle \tag{11-45}$$

且

$$\partial^{\mu}\langle p'|J_{\mu}^{em}(x)|p\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\mathrm{i}q^{\mu}\langle p'|J_{\mu}^{em}(0)|p\rangle \tag{11-46}$$

即可得到方程 (11-43). 显然方程 (11-41) 中的矩阵元满足流守恒. 微分截面可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{Mott}}\left[\frac{G_{\mathrm{E}}^2(Q^2)+\tau G_{\mathrm{M}}^2(Q^2)}{1+\tau} + 2\tau G_{\mathrm{M}}^2(Q^2)\tan^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{11-47}$$

上式通常被称为 Rosenbluth 公式. 在 ep 散射过程中, $q^2 = (p-p')^2$ 总是类空的 (space-like): $q^2 < 0$. 因此, 为了简单起见, 定义 $Q^2 = -q^2 > 0$ 与 $\tau = \dfrac{Q^2}{4M^2}$. 式 (11-47) 中, 这两项

$$G_{\mathrm{E}}(q^2) = F_1 + \tau F_2 \tag{11-48}$$

$$G_{\mathrm{M}}(q^2) = F_1 + F_2 \tag{11-49}$$

分别被称为电形状因子 (electric form factor)和磁形状因子 (magnetic form factor), 各自满足

$$G_{\mathrm{E}}(0) = F_1(0) = 1 \quad (\text{总电荷}) \tag{11-50}$$

$$G_{\mathrm{M}}(0) = F_1(0) + F_2(0) = 1 + F_2(0) \quad (\text{总磁矩}) \tag{11-51}$$

使用这两个定义的优势在于截面公式中不会出现 $G_{\mathrm{E}}G_{\mathrm{M}}$ 的交叉项, 从而使得这两个形状因子的测量更加简单. 实验给出结果

$$G_{\mathrm{M}}^{p}(0) = 2.79\mu_{\mathrm{N}}, \quad G_{\mathrm{M}}^{n}(0) = -1.91\mu_{\mathrm{N}}, \quad \mu_{\mathrm{N}} = \frac{e}{2M_{\mathrm{p}}}\ \text{是核磁子} \tag{11-52}$$

常被称为核子的反常磁矩

$$G_{\mathrm{E}}^{p}(Q^2) = \frac{G_{\mathrm{M}}^{P}(q^2)}{2.79} = \frac{G_{\mathrm{n}}^{M}(Q^2)}{-1.91} \approx \frac{1}{(1-q^2/0.7\mathrm{GeV}^2)^2} \tag{11-53}$$

这些行为被称为偶极子的形状因子(dipole form factor), 是质子有内部结构的强有力的证据. 形状因子 $F_1\left(q^2\right)$ 电荷分布的与 Fourier 变换有如下关系

$$F(q^2)=\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\rho(x)\mathrm{d}^3x \longrightarrow \rho(x)=\int \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}F(q^2) \tag{11-54}$$

因此测量电荷形状因子可以给出电荷分布. 假设球状电荷分布可以得到

$$F(q^2)=1-\frac{1}{6}\boldsymbol{q}^2\langle r^2\rangle+\cdots \tag{11-55}$$

其中

$$\langle r^2\rangle=4\pi\int_0^\infty r^2f(r)r^2\mathrm{d}r \quad (\text{电荷半径}) \tag{11-56}$$

对于质子则有 $\langle r^2\rangle_{\mathrm{p}}\approx(0.86\ \mathrm{fm})^2$. 这可以看成是质子的大小, 虽然它只是带电的部分.

注意, 对于较大的 $-q^2$, 形状因子以 q^{-4} 的形式迅速衰减. 一个简单的理解方式是将矩阵元 $\langle p'|J_\mu^{em}|p\rangle$ 看成质子在 ep 散射后仍保持质子的几率振幅. 当 $-q^2$ 越来越大时, 质子会因为其内部结构受到强大的冲撞而越来越难继续保持质子形态. 这与 eμ 散射的情况不同, 因为 μ 没有内部结构, 不论电子传递了多少动能, 都能够保持 μ 的形态. 因此 eμ 弹性散射不会在 $-q^2$ 变大时迅速减小.

由上面的讨论可以得到如下几个结论:

(1) 质子不是点粒子, 它有其内部结构;

(2) 质子的内部结构可以用两个形状因子 $F_1\left(q^2\right)$, $F_2\left(q^2\right)$ 来表示;

(3) 质子的电荷半径约为 0.86 fm.

11.2.2 ep 单举散射

电子能量更高时, 非弹性道对截面积的贡献会增加. 非弹性道末态的粒子数目会增加, 因而分析会变得非常复杂, 形状因子的方法也不再有用. 幸运的是, 如果将所有的强子末态加和, 对它的描述就变得简单多了. 这样得到的结果能够作为依据, 帮助我们最终建立起 QCD 作为描述强相互作用的理论. 为描述这一过程, 将非弹性散射写为

$$\mathrm{e}+\mathrm{p}\to\mathrm{e}+\mathrm{X} \tag{11-57}$$

其中, X 代表某个普适的末态, 含有一个或更多的强子. 将末态求和得到的散射截面被称为单举截面 (inclusive cross section). 例如, $\mathrm{e}+\mathrm{p}\to\mathrm{e}+\mathrm{X}$ 的单举微分截面有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}E'}\left(\text{单举}\right)=\sum_X\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}E'}\left(\mathrm{e}+\mathrm{p}\to\mathrm{e}+\mathrm{X}\right) \tag{11-58}$$

其中, E' 是末态电子能量. 单举散射截面的好处之一在于不需要考虑加和成分的具体内容. 例如, 在 ep 散射过程中, 只需要测量电子的散射角和能量, 其他的物理量则不会出现.

将这个反应的动量标记为

$$\mathrm{e}\,(k) + \mathrm{p}\,(p) \to \mathrm{e}\,(k') + \mathrm{X}\,(p_n) \tag{11-59}$$

如图 11-3 所示. 动力学变量的定义如下

$$q = k - k', \quad \nu = \frac{p \cdot q}{M}, \quad W^2 = p_n^2 = (p+q)^2 \tag{11-60}$$

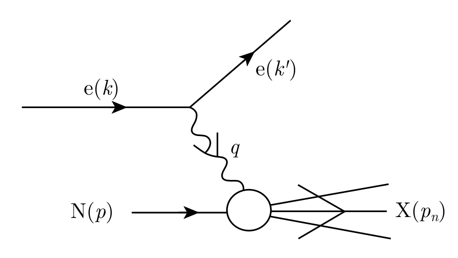


图 11-3 电子–核子深度非弹性散射

在实验室坐标系, 有

$$p_\mu = (M, 0, 0, 0)\,, \quad k_\mu = (E, \boldsymbol{k}), \quad k'_\mu = (E', \boldsymbol{k}') \tag{11-61}$$

则

$$\nu = E - E' \tag{11-62}$$

是电子损失的能量, 忽略了电子质量.

$$q^2 = (k - k')^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \leqslant 0, \quad Q^2 = -q^2 \tag{11-63}$$

其中, θ 是散射角. 定义一个新的变量 Q^2 使得它是恒为正的. 散射振幅可以写为

$$T_n = e^2 \bar{u}(k', \lambda') \gamma^\mu u(k, \lambda) \frac{1}{q^2} \left\langle n \left| J_\mu^{em} \right| p, \sigma \right\rangle \tag{11-64}$$

其中用到了强子电磁流算符 J_μ^{em} 来表示光子与强子态的作用. 对所有自旋态求和, 可以得到非极化的微分截面

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_n =& \frac{1}{|\boldsymbol{v}|} \frac{1}{2M} \frac{1}{2E} \frac{\mathrm{d}^3 k'}{(2\pi)^3\, 2k'_0} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}^3 p_i}{(2\pi)^3\, 2p_{i0}} \right] \\ & \times \frac{1}{4} \sum_{\sigma\lambda\lambda'} |T_n|^2\, (2\pi)^4\, \delta^4\, (p + k - k' - p_n) \end{aligned}$$

其中, $p_n=\sum_{i=1}^{n}p_i$ 是末态强子的总动量. 如果对所有可能的强子末态 n 求和, 就可以得到单举的截面

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}E'}=\frac{\alpha^2}{q^4}\left(\frac{E'}{E}\right)l^{\mu\nu}W_{\mu\nu} \tag{11-65}$$

这里的轻子张量 $l^{\mu\nu}$ 为

$$l_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\not{k}'\gamma_\mu\not{k}\gamma_\nu\right)=2\left(k_\mu k'_\nu+k'_\mu k_\nu+\frac{q^2}{2}g_{\mu\nu}\right) \tag{11-66}$$

强子张量 $W^{\mu\nu}$ 可以写成

$$\begin{aligned}W_{\mu\nu}(p,q)=&\frac{1}{4M}\sum_\sigma\sum_n\int\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}^3p_i}{(2\pi)^3 2p_{i0}}\right]\\&\times\left\langle p,\sigma\left|J_\mu^{em}\right|n\right\rangle\left\langle n\left|J_\nu^{em}\right|p,\sigma\right\rangle(2\pi)^3\delta^4\left(p_n-q-p\right)\\=&\frac{1}{4M}\sum_\sigma\int\frac{\mathrm{d}^4x}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle p,\sigma\left|J_\mu^{em}(x)J_\nu^{em}(0)\right|p,\sigma\right\rangle\end{aligned} \tag{11-67}$$

其中, 最后一步用到了完备性关系(completeness relation)

$$\sum_n\int\prod_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3p_i}{(2\pi)^3 2p_{i0}}|n\rangle\langle n|=1 \tag{11-68}$$

更有效的方法是用两种流的对易子的矩阵元来表示, 因为两个物理态的对易子由于因果性 (causality) 在光锥外必须是零. 因此, 写下倒序的两种流的算符

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^4x}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle p,\sigma\left|J_\nu^{em}(0)\,J_\mu^{em}(x)\right|p,\sigma\right\rangle\\=&\sum_n(2\pi)^3\delta^4\left(p_n+q-p\right)\left\langle p,\sigma\left|J_\nu^{em}\right|n\right\rangle\left\langle n\left|J_\mu^{em}\right|p,\sigma\right\rangle\end{aligned} \tag{11-69}$$

能动量守恒的 δ 函数要求中间态 $|n\rangle$ 的能量满足 $E_n=M-q_0$, 才能得到非零的结果. 但由于 $q_0>0$, 而且质子是稳定粒子, 没有比质子重的粒子能满足 δ 函数的限制条件, 矩阵元为零. 加上这一项, 可以写出对易子的结构函数 (structure function)

$$W_{\mu\nu}(p,q)=\frac{1}{4M}\sum_\sigma\int\frac{\mathrm{d}^4x}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle p,\sigma\left|\left[J_\mu^{em}(x),J_\nu^{em}(0)\right]\right|p,\sigma\right\rangle \tag{11-70}$$

从流守恒 $\partial^\mu J_\mu^{em}=0$ 可以得到

$$q^\mu\left\langle n\left|J_\mu^{em}\right|p,\sigma\right\rangle=0 \tag{11-71}$$

这意味着

$$q^\mu W_{\mu\nu}(p,q)=q^\nu W_{\mu\nu}(p,q)=0 \tag{11-72}$$

$W_{\mu\nu}$ 是一个二阶对称 Lorentz 张量, 只取决于动量 p, q. 假定对质子所有自旋态求和, 可以写出一般的依赖于 p, q 的二阶对称张量

$$W_{\mu\nu}(p,q) = g_{\mu\nu}W_1 + p_\mu p_\nu W_2 + (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu)W_2' + q_\mu q_\nu W_1' \tag{11-73}$$

这里像电磁作用中一样假定有宇称守恒. 将流守恒代入上式, 有

$$q^\mu W_{\mu\nu}(p,q) = 0 = q_\nu W_1 + (p\cdot q)\,p_\nu W_2 + [(p\cdot q)\,q_\nu + q^2 p_\nu]W_2' + q^2 q_\nu W_1' \tag{11-74}$$

由于 p, q 是独立的动量, 可以得到

$$W_1 + (p\cdot q)\,W_2' + q^2 W_1' = 0, \quad (p\cdot q)\,W_2 + W_2' q^2 = 0 \tag{11-75}$$

消去 W_1' 和 W_2', 得到

$$W_{\mu\nu}(p,q) = \left[-W_1\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) + \frac{W_2}{M^2}\left(p_\mu - \frac{p\cdot q}{q^2}q_\mu\right)\left(p_\nu - \frac{p\cdot q}{q^2}q_\nu\right)\right] \tag{11-76}$$

其中改变了 W_1 的符号, 重新标度 W_2 以适用于结构函数的标准表达形式. 这里 $W_1(q^2,\nu), W_2(q^2,\nu)$ 是靶粒子 Lorentz 不变的结构函数, 仅依赖于 Lorentz 不变量 q^2, ν. 可以利用结构函数将微分截面表达出来

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}E'} = \frac{\alpha^2}{4E'^2 \sin^4 \dfrac{\theta}{2}}\left(2W_1 \sin^2\frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{11-77}$$

通过测量不同角度和能量的微分截面, 可以得到结构函数 W_1 和 W_2.

11.2.3 Bjorken 标度

此前我们已经提及了弹性散射的截面因为质子组分的原因会在动量转移 Q^2 增加时迅速减小. 如果对于其他强子末态, 这个特点仍然保存, 那么非弹性散射截面也应该迅速减小. 但奇怪的是, 实验测得这些散射截面在 Q^2 较大时并没有变得很小. 由图 11-4 可以看出来, 对于 $W = 2 \sim 3$ GeV 的非弹性散射截面仍然是很大的, 并没有像弹性散射截面那样迅速降低.

为了定量地描述这一特征, 定义一个量纲为一的标度变量(scaling variable) x:

$$x = \frac{-q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{2M\nu}, \quad Q^2 = -q^2 \tag{11-78}$$

x 的范围是

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{11-79}$$

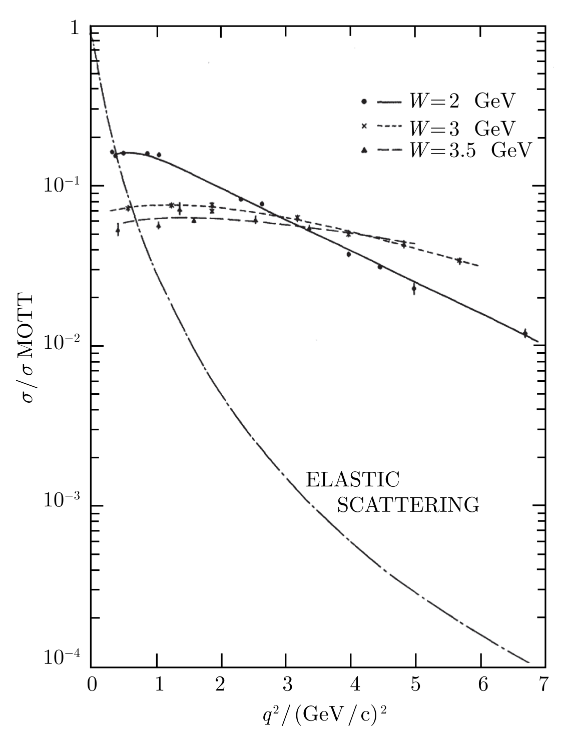


图 11-4 电子–质子的非弹性散射截面, 作为对比, 图中也给出了弹性散射截面

范围来源于末态强子的不变质量

$$W^2 = (p+q)^2 = q^2 + 2M\nu + M^2 \geqslant M^2 \Longrightarrow \frac{-q^2}{2M\nu} \leqslant 1 \tag{11-80}$$

同样定义

$$y = \frac{\nu}{E} = 1 - \frac{E'}{E} \tag{11-81}$$

是转移给强子的初态能量. 定义新的函数 F_1, F_2：

$$MW_1(Q^2,\nu) = F_1(x, q^2/M^2) \tag{11-82}$$

$$\nu W_2(Q^2,\nu) = F_2(x, q^2/M^2) \tag{11-83}$$

可以把总的反应截面写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{8\pi\alpha^2}{MEx^2y^2}\left[xy^2F_1 + \left(1 - y - \frac{M}{2E}xy\right)F_2\right] \tag{11-84}$$

Bjorken 标度性 (Bjorken scaling)[48] 是指, 在 Q^2 很大的极限条件下, F_i 仅是 x 的函数, 不是分别依赖于变量 q^2 和 ν. 所有的结构函数都有这样的极限行为

$$\lim_{|q^2|\to\infty,\ x\ 固定} F_i(x, q^2/M^2) = F_i(x) \tag{11-85}$$

实验上, 对于 $Q^2 \geqslant 2\ \mathrm{GeV}^2$ 的情况, Bjorken 标度性已经是一个很好的近似了. 如图 11-5 所示, 在 x 不是太小的情况下, Q^2 值不同的实验点是重叠的, 在 Q^2 较大的情况下也没有迅速减小. 这意味着质子内部有点状成分, 因为电子在点状粒子上的散射没有形状因子的关系, 是不会迅速减小的.

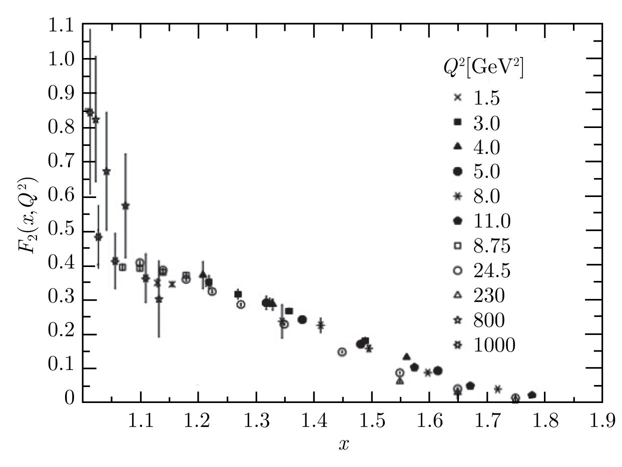


图 11-5 结构函数 F_2 和标度变量 x 的关系

中微子–核子散射

中微子在质子上散射是另外一种可以用于探测质子内部结构的反应, 因为中微子只有弱相互作用, 而我们对弱相互作用已经有很好的理解了. 反应如下

$$\nu_l(k) + N(p) \longrightarrow l^-(k') + X(p_n) \tag{11-86}$$

这个反应里没有出现电磁作用, 而有弱相互作用

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{G_{\text{F}}}{\sqrt{2}} J_\lambda J^\lambda + h.c. \tag{11-87}$$

其中, G_{F} 是 Fermi 常数. 弱相互作用用流相互作用 (current-current interaction) 描述, 在能量低于弱相互作用玻色子 W 的情况下, 这是一个很好的近似. 带电流 J^λ 可以分为轻子部分和强子部分

$$J^\lambda = J_l^\lambda + J_h^\lambda \tag{11-88}$$

轻子部分是

$$J_l^\lambda = \bar{\nu}_{\text{e}}\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\,e + \bar{\nu}_{\mu}\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\,\mu \tag{11-89}$$

可以写出用结构函数表示的微分截面

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{(\nu)}}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}E'}=\frac{\mathrm{G}_\mathrm{F}^2}{2\pi}E'^2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}W_1^{(\nu)}+\cos^2\frac{\theta}{2}W_2^{(\nu)}-\frac{E+E'}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}W_3^{(\nu)}\right) \tag{11-90}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{(\bar\nu)}}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}E'}=\frac{\mathrm{G}_\mathrm{F}^2}{2\pi}E'^2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}W_1^{(\bar\nu)}+\cos^2\frac{\theta}{2}W_2^{(\bar\nu)}+\frac{E+E'}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}W_3^{(\bar\nu)}\right) \tag{11-91}$$

其中结构函数定义为

$$\begin{aligned}W_{\mu\nu}^{(\nu)}(p,q)=&\frac{1}{4M}\sum_\sigma\int\frac{\mathrm{d}^4x}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle p,\sigma\left|\left[J_{h\mu}(x),\ J_{h\nu}^\dagger(0)\right]\right|p,\sigma\right\rangle\\=&-W_1^{(\nu)}g_{\mu\nu}+\frac{W_2^{(\nu)}p_\mu p_\nu}{M^2}-\mathrm{i}W_3^{(\nu)}\frac{\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}p^\alpha q^\beta}{M^2}+\frac{W_4^{(\nu)}q_\mu q_\nu}{M^2}\\&+\frac{W_5^{(\nu)}(p_\mu q_\nu+q_\mu p_\nu)}{M^2}+\mathrm{i}\frac{W_6^{(\nu)}(p_\mu q_\nu-q_\mu p_\nu)}{M^2}\end{aligned}$$

结构函数变多是因为 V-A 流不守恒, 而且破坏了宇称. 上式中两个流不是全同的, 而是互为共轭. 结构函数的 Bjorken 标度性有如下形式

$$MW_1^{(\nu)}(q^2,\nu)\longrightarrow F_1^{(\nu)}(x) \tag{11-92}$$

$$\nu W_2^{(\nu)}(q^2,\nu)\longrightarrow F_2^{(\nu)}(x) \tag{11-93}$$

$$\nu W_3^{(\nu)}(q^2,\nu)\longrightarrow F_3^{(\nu)}(x) \tag{11-94}$$

轻子张量满足如下关系

$$q^\mu l_{\mu\nu}=0 \tag{11-95}$$

因为通常可以忽略轻子质量. 为了说明这一点, 写出 $j_\mu j_\nu^\dagger$ 表示的轻子张量 $l_{\mu\nu}$,

$$j_\mu=\bar u(k')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(k) \tag{11-96}$$

如果忽略轻子质量, 即可得到

$$\begin{aligned}q^\mu j_\mu=&\bar u_l(k')(\not k'-\not k)(1-\gamma_5)u_\nu(k)\\=&\bar u_l(k')[m_l(1-\gamma_5)-m_\nu(1+\gamma_5)]u_\nu(k)=0\end{aligned} \tag{11-97}$$

这个关系原本是守恒流的特性. 但在这里, 弱流 j_μ 在轻子质量可以忽略的情况下也可以进行守恒流处理. 从上式可以得到 $q^\mu l_{\mu\nu}=0$. 这就是 $W_4,\cdots,W_6$ 对非极化的单举微分截面没有贡献的原因. 在确定螺旋度的情况下, 很容易给出结构函数. 在实验室坐标系下, 选择 z 轴使之满足

$$p_\mu=(M,0,0,0),\quad q_\mu=(q_0,0,0,q_3) \tag{11-98}$$

虚光子的纵向极化为

$$\varepsilon_{\mu}^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{-q^2}}\left(q_3, 0, 0, q_0\right) \tag{11-99}$$

对应的结构函数为

$$W_s = \varepsilon_{\mu}^{(s)*} W^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu}^{(s)} = -W_1 - \frac{q_3^2}{q^2 W_2} = \left(1 - \frac{\nu^2}{q^2}\right) W_2 - W_1 \tag{11-100}$$

左右手的极化矢量分别为

$$\varepsilon_{\mu}^{(\mathrm{R})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, 1, i, 0\right), \quad \varepsilon_{\mu}^{(\mathrm{L})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, 1, -\mathrm{i}, 0\right) \tag{11-101}$$

对应的结构函数为

$$W_{\mathrm{R}} = W_1 + \frac{1}{2M}\sqrt{\nu^2 - q^2} W_3, \quad W_{\mathrm{L}} = W_1 - \frac{1}{2M}\sqrt{\nu^2 - q^2} W_3 \tag{11-102}$$

在标度极限的情况下有

$$2MW_s \longrightarrow F_S = \frac{1}{x} F_2 - 2F_1 \tag{11-103}$$

$$MW_{\mathrm{L}} \longrightarrow F_{\mathrm{L}} = F_2 - \frac{1}{2} F_3 \tag{11-104}$$

$$MW_{\mathrm{R}} \longrightarrow F_{\mathrm{R}} = F_2 + \frac{1}{2} F_3 \tag{11-105}$$

微分截面可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{(\nu)}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \mathrm{G}_{\mathrm{F}}^2 \frac{MEx}{\pi}\left[\left(1-y\right) F_S^{(\nu)} + F_{\mathrm{L}}^{(\nu)} + \left(1-y\right)^2 F_{\mathrm{R}}^{(\nu)}\right] \tag{11-106}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{(\bar{\nu})}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \mathrm{G}_{\mathrm{F}}^2 \frac{MEx}{\pi}\left[\left(1-y\right) F_S^{(\bar{\nu})} + F_{\mathrm{R}}^{(\bar{\nu})} + \left(1-y\right)^2 F_{\mathrm{L}}^{(\bar{\nu})}\right] \tag{11-107}$$

注意中微子截面随着能量升高呈线性增长.

11.2.4 部分子模型

Feynman[49] 建议, 深度非弹性散射可以看成与核子内部点状组分 (point-like constituents) 进行的非相干 (incoherent) 弹性散射的总和, 如图 11-6 所示. 这些点状粒子就叫做**部分子**(parton).

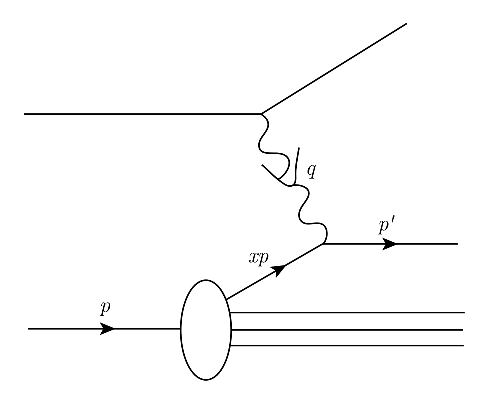


图 11-6　与部分子的非相干弹性散射模型

假定部分子有自旋 1/2, 携带质子一部分动量 ξp 且 $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, 那么它对强子张量的贡献为

$$\begin{aligned}K_{\mu\nu}(\xi) =& \frac{1}{4\xi M}\sum_{\sigma\sigma'}\int\left[\frac{\mathrm{d}^3 p'}{(2\pi)^3\, 2p'_0}\right] \\ &\times\left\langle \xi p,\sigma\left|J_\mu^{em}\right|p',\sigma'\right\rangle\left\langle p',\sigma'\left|J_\nu^{em}\right|\xi p,\sigma\right\rangle (2\pi)^3\,\delta^4(p'-q-\xi p) \\ =& \frac{1}{4\xi M}\sum_{\sigma\sigma'}\bar u(\xi p,\sigma)\gamma_\mu u(p',\sigma')\,\bar u(p',\sigma') \\ &\cdot\gamma_\nu u(\xi p,\sigma)\,\delta(p'_0-q_0-\xi p_0)/2p'_0\end{aligned}\tag{11-108}$$

能量守恒 δ 函数可以写为

$$\begin{aligned}\delta(p'_0-q_0-\xi p_0)/2p'_0 =& \theta(p'_0)\,\delta\left[p'^2-(q-\xi p)^2\right] \\ =& \theta(q_0+\xi p_0)\,\delta\left(2M\nu\xi+q^2\right) = \theta(q_0+\xi p_0)\frac{\delta(\xi-x)}{2M\nu}\end{aligned}$$

这个关系显示了标度变量 x 就是部分子带的动量. 对自旋求和, 可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'}\bar u(\xi p,\sigma)\gamma_\mu u(p',\sigma')\,\bar u(p',\sigma')\gamma_\nu u(\xi p,\sigma) \\ =& \frac{\xi}{2}\mathrm{tr}\left[\not p\gamma_\mu(\xi\not p+\not q)\gamma_\nu\right] \\ =& 2\xi\left[p_\mu(\xi p+q)_\nu + p_\nu(\xi p+q)_\mu - p\cdot(\xi p+q)\,g_{\mu\nu}\right] \\ =& 4M^2\xi^2\left(\frac{p_\mu p_\nu}{M^2}\right) - 2M\nu\xi g_{\mu\nu}+\cdots\end{aligned}$$

其中假设可以忽略部分子质量. 部分子张量可以写成

$$K_{\mu\nu}(\xi) = \delta(\xi-x)\left(\frac{\xi p_\mu p_\nu}{M^2\nu} - \frac{1}{2M}g_{\mu\nu}+\cdots\right)\tag{11-109}$$

令 $f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 为动量占比 ξ 到 $\xi+\mathrm{d}\xi$ 之间的部分子的数目, 则强子张量为

$$\begin{aligned}W_{\mu\nu} &= \int_0^1 f(\xi)\, K_{\mu\nu}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{xf(x)}{\nu}\frac{p_\mu p_\nu}{M^2} - \frac{f(x)}{2M}g_{\mu\nu} + \cdots\end{aligned}$$

从上式可以得到结构函数

$$MW_1 \to F_1(x) = \frac{1}{2}f(x) \tag{11-110}$$

$$\nu W_2 \to F_2(x) = xf(x) \tag{11-111}$$

因此标度函数 $F_{1,2}$ 可以描述靶质子内部的部分子动量分布.

注意方程 (11-110)、(11-111) 意味着

$$2xF_1(x) = F_2(x) \tag{11-112}$$

这被称为 **Callan-Gross 关系**[50], 是部分子有 1/2 自旋的一个结果.

对于自旋为 0 的部分子有

$$\begin{aligned}K_{\mu\nu} &\propto \left\langle xp\left|J_\mu^{\mathrm{em}}\right|xp+q\right\rangle\left\langle xp+q\left|J_\nu^{\mathrm{em}}\right|xp\right\rangle \\ &\propto (2xp+q)_\mu\,(2xp+q)_\nu\end{aligned}$$

上式没有 $g_{\mu\nu}$ 项, 意味着

$$F_1(x) = 0 \tag{11-113}$$

方程 (11-104)~ 方程 (11-106) 给出的结构函数意味着对于不同螺旋度有

$$\begin{aligned}&F_S = 0, &&\text{对自旋为 } 1/2 \text{ 的部分子}\\ &F_T = F_{\mathrm{L}} + F_{\mathrm{R}} = 2F_1 = 0, &&\text{对自旋为 } 0 \text{ 的部分子}\end{aligned} \tag{11-114}$$

对此有一个简单的解释方法. 在 Breit 参考系 (Breit frame) 下, 部分子与虚光子碰撞后动量反向, 大小不变

$$\begin{aligned}q_\mu &= (0,0,0,-2xp)\\ xp_\mu &= (xp,0,0,xp)\\ p'_\mu &= (xp,0,0,-xp)\end{aligned} \tag{11-115}$$

如果部分子自旋为 0, 则只有螺旋度为零 (ε^S) 的虚光子态有贡献, 而螺旋度为 ±1 的态 ($\varepsilon^{\mathrm{L}},\varepsilon^{\mathrm{R}}$) 在运动方向上无法保持角动量守恒. 另外, 对于自旋 $-1/2$ 的部分子, 忽略其质量, 碰撞时自旋同样反向, 这要求虚光子必须在螺旋度为 ±1 的态上, 因此 $F_S = 0$. 实验上, 在标度区 $F_S = 0$ 能够被满足, 因此核子内部确定有自旋 $-1/2$ 的点状组分.

11.2.5　部分子模型的求和规则和应用

最简单的设想是将部分子与组成质子的组分 —— 夸克当成相同的粒子. 夸克被认为是通过胶子的相互作用束缚起来的. 设想从一个简单的模型出发, 认为质子一开始内部有 3 个自由夸克, 则结构函数应该是 $x = 1/3$ 处一个的 δ 函数, 即 $f(x) \sim \delta(x-1/3)$. 当开始作用时, 这个分布将被改变, 胶子可以产生 $\mathrm{q\bar{q}}$ 夸克对, 夸克也可以韧致辐射出胶子. 这些过程都会在 x 较小时产生 $\mathrm{q\bar{q}}$. 这种由胶子在 x 很小时产生的 $\mathrm{q\bar{q}}$ 通常称为海夸克 (sea quark). 只考虑有 3 个轻夸克的夸克模型, 可以写出电磁流

$$J_\mu^{\mathrm{em}} = \frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma_\mu d - \frac{1}{3}\bar{s}\gamma_\mu s \tag{11-116}$$

给出的结构函数为

$$F_1^{\mathrm{ep}}(x) = \frac{4}{9}[u(x)+\bar{u}(x)] + \frac{1}{9}[d(x)+\bar{d}(x)] + \frac{1}{9}[s(x)+\bar{s}(x)] \tag{11-117}$$

其中, $q_i(x)$ 表示质子中一个纵向动量分数为 x, 携带夸克量子数 q_i 的部分子的概率. 例如, $u(x)$ 是质子中一个纵向动量分数为 x 的 u 夸克的概率. 由同位旋对称性, 中子的结构函数可以通过在质子结构函数中交换 $\mathrm{u} \leftrightarrow \mathrm{d}$ 得到

$$F_1^{en}(x) = \frac{4}{9}[d(x)+\bar{d}(x)] + \frac{1}{9}[u(x)+\bar{u}(x)] + \frac{1}{9}[s(x)+\bar{s}(x)] \tag{11-118}$$

这些部分子分布函数被质子的量子数所限制. 例如,

同位旋: $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \left\{[u(x)-\bar{u}(x)] - \left[d(x)-\bar{d}(x)\right]\right\}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

奇异数: $\displaystyle\int_0^1 [s(x)-\bar{s}(x)]\,\mathrm{d}x = 0$

电荷 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3}[u(x)-\bar{u}(x)]\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^1 \left[d(x)-\bar{d}(x)\right]\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^1 [s(x)-\bar{s}(x)]\,\mathrm{d}x = 1$

这些关系式为部分子分布函数提供了一个全局的限制, 对于实验上测量这些分布函数有很大的意义.

中微子深度非弹性散射

$$\nu_{\mu} + \mathrm{N} \to \mu + \mathrm{X} \tag{11-119}$$

$$\nu_{\mathrm{e}} + \mathrm{N} \to \mathrm{e} + \mathrm{X} \tag{11-120}$$

弱作用流为

$$J_\mu^W \approx \cos\theta_{\mathrm{c}}\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d + \sin\theta_{\mathrm{c}}\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)s + \cdots \tag{11-121}$$

结构函数同样可以用部分子分布函数 $q_i(x)$ 表示出来, 下面列出了简单的结果

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{L}}^{\nu \mathrm{p}} &= 2d(x), \quad F_{\mathrm{L}}^{\nu \mathrm{n}} = 2u(x) \\ F_{\mathrm{R}}^{\nu \mathrm{p}} &= 2\bar{u}(x), \quad F_{\mathrm{R}}^{\nu \mathrm{n}} = 2\bar{d}(x) \\ F_{\mathrm{L}}^{\bar{\nu} \mathrm{p}} &= 2u(x), \quad F_{\mathrm{L}}^{\bar{\nu} \mathrm{n}} = 2d(x) \\ F_{\mathrm{R}}^{\bar{\nu} \mathrm{p}} &= 2\bar{d}(x), \quad F_{\mathrm{R}}^{\bar{\nu} \mathrm{n}} = 2\bar{u}(x) \end{aligned}$$

系数 2 反映了弱作用流里矢量部分和轴矢量部分同时存在. 这里假设了 $\theta_{\mathrm{c}} = 0$. 可以将奇异夸克分布单独列出来. 利用 $F_2 = x(F_{\mathrm{L}} + F_{\mathrm{R}} + F_S)$, 有

$$F_2^{\nu \mathrm{p}} + F_2^{\nu \mathrm{n}} = 2x(u + \bar{u} + d + \bar{d}) \tag{11-122}$$

由 ep 散射

$$F_2^{\mathrm{ep}} + F_2^{\mathrm{en}} = x\left[\frac{5}{9}(u + \bar{u} + d + \bar{d}) + \frac{2}{9}(s + \bar{s})\right] \tag{11-123}$$

并由以上关系式可以解出

$$F_2^{ep} + F_2^{en} - \frac{5}{18}(F_2^{\nu p} + F_2^{\nu n}) = \frac{2x}{9}(s + \bar{s}) \tag{11-124}$$

实验数据与上式大致吻合, 除了 $x < 0.2$ 的区域.

动量求和规则 (momentum sum rule)

如果夸克携带靶核子的全部动量, 将有以下求和规则

$$\int_0^1 \left[u(x) + d(x) + s(x) + \bar{u}(x) + \bar{d}(x) + \bar{s}(x)\right] x\mathrm{d}x = 1 \tag{11-125}$$

由于 $x \approx 0$ 的区域对于求和并不重要, 可以忽略海夸克的影响

$$\int_0^1 [u(x) + d(x)]\, x\mathrm{d}x = 1 \tag{11-126}$$

或者用测量到的结构函数表示

$$\int [F_2^{\mathrm{ep}}(x) + F_2^{\mathrm{en}}(x)]\mathrm{d}x = \frac{5}{9} \tag{11-127}$$

实验上, 这个积分的结果约为 0.28. 这意味着核子几乎 50% 的动量都不是由部分子携带的. 也就是说, 核子内部还有不少不带电的物质 (胶子).

11.3 光锥奇异性和 Bjorken 标度

我们发现 Bjorken 标度的物理意义与场论中的光锥行为关系密切. 下面将对这一点进行说明. 我们在前面提过, 强子张量可以写成两个电磁流矢量的对易子的矩阵元

$$W_{\mu\nu}(p,q)=\frac{1}{4M}\sum_{\sigma}\int\frac{\mathrm{d}^4x}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle p,\sigma\left|\left[J_{\mu}^{em}(x),J_{\nu}^{em}(0)\right]\right|p,\sigma\right\rangle \tag{11-128}$$

指数上的标量积可以写成

$$q\cdot x=\frac{q_0+q_3}{\sqrt{2}}\frac{x_0-x_3}{\sqrt{2}}+\frac{q_0-q_3}{\sqrt{2}}\frac{x_0+x_3}{\sqrt{2}}-\boldsymbol{q}_T\cdot\boldsymbol{x}_T \tag{11-129}$$

其中 $\boldsymbol{q}_T=(q_1,q_2),\boldsymbol{x}_T=(x_1,x_2)$ 是 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 的横向分量. 在核子的静止系中, 有

$$p_{\mu}=(M,0,0,0),\quad q_{\mu}=(\nu,0,0,\sqrt{\nu^2-q^2}) \tag{11-130}$$

在标度极限下, 有 $-q^2$, $\nu\to\infty$, 同时 $-q^2/2M\nu$ 保持不变, 得到

$$q_0+q_3\sim 2\nu,\quad q_0-q_3\sim\frac{q^2}{2\nu} \tag{11-131}$$

我们期望式 (11-128) 中积分的主要贡献来自于没有快速振荡的部分, 即 $q\cdot x=O(1)$. 这意味着

$$x_0-x_3\sim O\left(\frac{1}{\nu}\right),\quad \text{以及}\quad x_0+x_3\sim O\left(\frac{1}{xM}\right) \tag{11-132}$$

或

$$x_0^2-x_3^2\sim O\left(\frac{1}{-q^2}\right) \tag{11-133}$$

因此 $x^2=x_0^2-x_3^2-\boldsymbol{x}_{\mathrm{T}}^2\leqslant x_0^2-x_3^2\sim O\left(\frac{1}{-q^2}\right)$, 它在 $-q^2\to\infty$ 时是 0. 换句话说, 在标度极限下, 我们探讨的是光锥附近的流矢量乘积.

11.3.1 自由场的光锥奇异性

1. 场的乘积

一般情况下要研究有相互作用的场在光锥附近的行为是非常困难的. 下面我们会发现 ep 散射中的标度行为是和自由场在光锥附近的行为有关. 这简化了理论的推导. 因为自由场的计算都可以简单地做出来. 我们现在来讨论场在光锥附近的行为. 在自由场的理论中, 场的乘积, 例如, 对易子或传播子在光锥 $(x^2\approx 0)$ 上是奇

异的, 并且最主要的贡献与质量无关. 这一点可以通过下面的简单计算看出来. 考虑标量场的传播子

$$\langle 0|T[\phi(x)\phi(0)]|0\rangle = \mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F}}(x) = \mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{k^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{11-134}$$

计算这个动量的积分得到

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{F}}(x) = &\frac{-1}{4\pi}\delta\left(x^2\right)+\frac{m}{8\pi\sqrt{x^2}}\theta\left(x^2\right)\left[J_1\left(m\sqrt{x^2}\right)-\mathrm{i}N_1\left(m\sqrt{x^2}\right)\right]\\ &-\frac{\mathrm{i}m}{4\pi^2\sqrt{x^2}}\theta\left(-x^2\right)K_1\left(m\sqrt{-x^2}\right)\end{aligned} \tag{11-135}$$

其中, J_n, N_n 和 K_n 是 Bessel 函数. 当 $x^2\approx 0$ 时, 给出下列简单的结果

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi^2}\frac{1}{(x^2-\mathrm{i}\varepsilon)}+O\left(m^2x^2\right) \tag{11-136}$$

不难看出来, 这个奇异性 (singularity) 可以被看成由正规乘积 (normal ordering) 带来的 c 数. 这是因为正规乘积的真空矩阵元是 0. 同样地, 也可以得到对易子在光锥上的行为

$$\begin{aligned}\langle 0|[\phi(x),\phi(0)]|0\rangle = \mathrm{i}\Delta(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^4k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\varepsilon(k_0)\,\delta\left(k^2-m^2\right)\\ &=\frac{-\mathrm{i}}{2\pi}\varepsilon(x_0)\,\delta\left(x^2\right),\quad 当x^2\approx 0时\end{aligned}$$

令 $m^2\to 0$, 由上式得到

$$\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\varepsilon(k_0)\,\delta\left(k^2\right) = (2\pi)^2\varepsilon(x_0)\,\delta\left(x^2\right) \tag{11-137}$$

它将动量空间与坐标空间的奇异性联系了起来. 另外, 对易子 $\Delta(x)$ 与传播子 $\Delta_{\mathrm{F}}(x)$ 的光锥奇异性也有如下的关系

$$\Delta(x) = 2\varepsilon(x_0)\,\mathrm{Im}\,(\mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F}}(x)) \tag{11-138}$$

这可以从如下的恒等式得到

$$\frac{1}{-x^2+\mathrm{i}\varepsilon}-\frac{1}{-x^2-\mathrm{i}\varepsilon} = -2\pi\mathrm{i}\varepsilon(x_0)\,\delta\left(x^2\right) \tag{11-139}$$

更一般性的等式关系是

$$\left(\frac{1}{-x^2+\mathrm{i}\varepsilon}\right)^n-\left(\frac{1}{-x^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right)^n = -\frac{2\pi\mathrm{i}}{(n-1)!}\varepsilon(x_0)\,\delta^{(n-1)}\left(x^2\right) \tag{11-140}$$

在下面的计算中, 我们将从传播子的奇异性得到对易子的奇异性, 只要作如下的替换

$$\left(\frac{1}{-x^2+\mathrm{i}\varepsilon}\right)^n \longrightarrow \frac{2\pi\mathrm{i}}{(n-1)!}\varepsilon\left(x_0\right)\delta^{(n-1)}\left(x^2\right) \tag{11-141}$$

同样地, 对于费米子, 也可以得到下列关系

$$\left\{\psi_\alpha\left(x\right), \bar{\psi}_\beta\left(y\right)\right\} = \mathrm{i}S_{\alpha\beta}\left(x-y\right), \quad \langle 0|T[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)]|0\rangle = \mathrm{i}S^F_{\alpha\beta}\left(x-y\right) \tag{11-142}$$

其中

$$S_{\alpha\beta}(x) = (\mathrm{i}\gamma\cdot\partial+m)_{\alpha\beta}\,\Delta(x), \quad S^F_{\alpha\beta}(x) = (\mathrm{i}\gamma\cdot\partial+m)_{\alpha\beta}\,\Delta^F(x) \tag{11-143}$$

当 $x^2\approx 0$ 时, 有

$$S_{\alpha\beta}(x) \approx (\mathrm{i}\gamma\cdot\partial)_{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2\pi}\varepsilon\left(x_0\right)\delta\left(x^2\right)\right] \tag{11-144}$$

$$S^F_{\alpha\beta}(x) \approx (\mathrm{i}\gamma\cdot\partial)_{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2\pi}\frac{1}{x^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right] \tag{11-145}$$

2. 标量流的乘积

现在我们来讨论复合算符, 如流矢量算符. 为简单起见, 先考虑如下形式的标量算符

$$J(x) =: \phi^2(x): \tag{11-146}$$

以避免自旋和其他的 Lorentz 指标会带来的复杂情况. 为了方便, 我们将取它的正规乘积的形式. 正规乘积是为了将乘积 $\phi(x+\zeta)\phi(x-\zeta)$ 在 $\zeta^\mu\to 0$ 时的奇异性消除. 为了看明白这一点, 可以将场算符用产生和湮没算符写出来

$$\phi(x) = \int_k \left[a\left(k\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + a^\dagger\left(k\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right] \tag{11-147}$$

其中

$$\int_k \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{(2\pi)^3\,2\omega_k}} \tag{11-148}$$

于是场算符的乘积可以写成

$$\begin{aligned}
\phi\left(x\right)\phi\left(y\right) =& \int_{k'}\int_k \left[a\left(k\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + a^\dagger\left(k\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right]\left[a\left(k'\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot y} + a^\dagger\left(k'\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\cdot y}\right] \\
=& \int_k\int_{k'}\Big[a\left(k\right)a\left(k'\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+k'y)} + a^\dagger\left(k\right)a^\dagger\left(k'\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+k'y)} \\
&+ a^\dagger\left(k\right)a\left(k'\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx-k'y)} + a\left(k\right)a^\dagger\left(k'\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-kx+k'y)}\Big]
\end{aligned}$$

只有最后一项不是正规乘积. 当将它写成正规乘积时, 会得到额外的一项

$$\begin{aligned}&\int_k\int_{k'}\left[a^\dagger(k)\,a(k')+\delta^3(k-k')\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(-kx+k'y\right)}\\=&\int_k\int_{k'}[a^\dagger(k)\,a(k')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(-kx+k'y\right)}]+\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}\end{aligned}$$

这个额外的项是一个 c 数, 且在 $x\to y$ 的极限下是奇异的. 显然, 正规乘积 (normal ordered) 的算符作用在初态和末态上不会产生这样的奇异性. 在这个简单的例子中, 我们看到化为正规乘积的操作会消除算符乘积中的奇异性. 因此, 对于更复杂的对象, 可以通过 Wick 定理将它写成正规乘积, 来找出在小距离极限下 c 数的奇异性.

流算符乘积中的奇异性可以用 Wick 定理按如下方式得到

$$\begin{aligned}T\left(J(x)J(0)\right)=&T(:\phi^2(x)::\phi^2(0):)=2\left[\langle 0|T\left(\phi(x)\phi(0)\right)|0\rangle\right]^2\\&+4\left\langle 0\left|T\left(\phi\left(x\right)\phi\left(0\right)\right)\right|0\right\rangle:\phi(x)\phi(0):+:\phi^2(x)\phi^2(0):\\=&-2\left[\Delta_{\mathrm{F}}(x,m)\right]^2+4\mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F}}\left(x,m\right):\phi(x)\phi(0):+:\phi^2(x)\phi^2(0):\end{aligned}$$

根据前面得到的 $x^2\approx 0$ 时的传播子的奇异性, 有

$$T\left(J\left(x\right)J\left(0\right)\right)\approx\frac{1}{8\pi^4\left(x^2-\mathrm{i}\varepsilon\right)^2}-\frac{:\phi\left(x\right)\phi\left(0\right):}{\pi^2\left(x^2-\mathrm{i}\varepsilon\right)}+:\phi^2\left(x\right)\phi^2\left(0\right): \tag{11-149}$$

这就称为在光锥附近的**算符乘积展开**(operator product expansion)[51], 各项按照奇异函数的阶数依次写出. 也就是说, 第一项 $\dfrac{1}{\left(x^2-\mathrm{i}\varepsilon\right)^2}$ 是奇点阶数最高的项, 第二项 $\dfrac{1}{\left(x^2-\mathrm{i}\varepsilon\right)}$ 是阶数略小的, 等等. 注意, 在这个展开式中, $x^2\approx 0$ 处的奇异性都被包含在 c 数的函数中. 当把展开式放在物理态之间时, 这些函数与初末态无关. 如果把它放在任意两个态之间, 得到

$$\begin{aligned}\left\langle A\left|T\left(J(x)J(0)\right)\right|B\right\rangle\approx&\frac{\langle A|B\rangle}{8\pi^4\left(x^2-\mathrm{i}\varepsilon\right)^2}-\frac{\langle A|:\phi\left(x\right)\phi(0):|B\rangle}{\pi^2\left(x^2-\mathrm{i}\varepsilon\right)}\\&+\left\langle A\left|:\phi^2\left(x\right)\phi^2\left(0\right):\right|B\right\rangle\end{aligned} \tag{11-150}$$

这对应于图 11-7.

上文中的例子说明了将算符在光锥附近展开的程序. 这里的算符乘积展开的一般形式是按照奇异性的阶数排列, 而每一项都是奇异性的 c 数乘上正规乘积 (normal ordered product) 的算子.

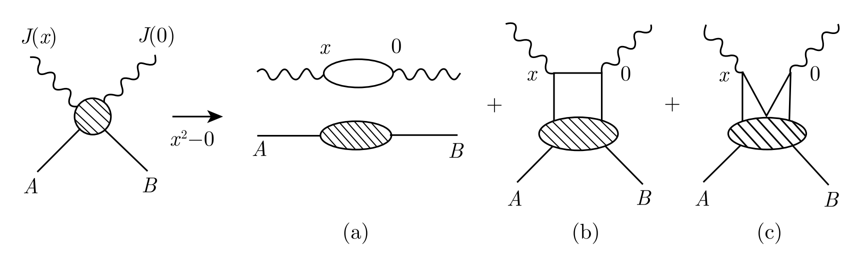


图 11-7 在光锥处有奇异的图

11.3.2 自由场奇异性和标度

现在我们来考虑真正的电磁流矢量, 它的费米子组成形式如下

$$J_\mu(x) =: \bar{\psi}(x)\gamma_\mu Q\psi(x): \tag{11-151}$$

其中, Q 是电荷算符, $\psi(x)$ 是一个费米场的多重态, 事实上就是指夸克场. 首先用 Wick 定理来计算编时 (time-ordered) 乘积

$$\begin{aligned} T[J_\mu(x)J_\nu(0)] &= T\left[:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu Q\psi(x)::\bar{\psi}(0)\gamma_\nu Q\psi(0):\right] \\ &= Tr\left[\mathrm{i}S_\mathrm{F}(-x)\gamma_\mu \mathrm{i}S_\mathrm{F}(x)\gamma_\nu Q^2\right] \\ &\quad +:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu Q S_\mathrm{F}(x)\gamma_\nu Q\psi(0): \\ &\quad +:\bar{\psi}(0)\gamma_\nu Q S_\mathrm{F}(-x)\gamma_\mu Q\psi(x): \\ &\quad +:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu Q\psi(x)\bar{\psi}(0)\gamma_\nu Q\psi(0): \end{aligned} \tag{11-152}$$

利用等式

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda = (S_{\mu\nu\lambda\rho} + \mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho})\gamma^\rho, \quad S_{\mu\nu\lambda\rho} = g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} + g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} \tag{11-153}$$

可以将 $x^2 \approx 0$ 极限下的式 (11-152) 写成

$$\begin{aligned} T(J_\mu(x)J_\nu(0)) \approx{}& \left(\mathrm{tr}Q^2\right)\frac{x^2 g_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu}{\pi^4\left(x^2 - \mathrm{i}\varepsilon\right)^4} + \frac{\mathrm{i}x^\alpha}{2\pi^2\left(x^2 - \mathrm{i}\varepsilon\right)^2} \\ & \times\left\{S_{\mu\alpha\nu\beta}\left[V^\beta(x,0) - V^\beta(0,x)\right] + \mathrm{i}\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta}\left[A^\beta(x,0) - A^\beta(0,x)\right]\right\} \\ & +:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu Q\psi(x)\bar{\psi}(0)\gamma_\nu Q\psi(0): \end{aligned}$$

其中

$$V^\beta(x,y) =: \bar{\psi}(x)\gamma^\beta Q^2\psi(y): \tag{11-154}$$

$$A^\beta(x,y) =: \bar{\psi}(x)\gamma^\beta\gamma_5 Q^2\psi(y): \tag{11-155}$$

依赖于两个时空坐标 x, y, 被称为**双定域算符**(bi-local operator). 此外, 有

$$\frac{x^2 g_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu}{(x^2 - \mathrm{i}\varepsilon)^4} = \frac{2}{3}\frac{g_{\mu\nu}}{(x^2 - \mathrm{i}\varepsilon)^3} - \frac{1}{12}\partial_\mu\partial_\nu\frac{1}{(x^2 - \mathrm{i}\varepsilon)^2} \tag{11-156}$$

及

$$\frac{x^\alpha}{(x^2 - \mathrm{i}\varepsilon)^2} = -\frac{1}{2}\partial^\alpha\left(\frac{1}{x^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\right) \tag{11-157}$$

这样就可以得到对易子的算符展开式

$$\begin{aligned}[J_\mu(x), J_\nu(0)] \approx \frac{\mathrm{i}\mathrm{tr}Q^2}{\pi^3}&\left\{\frac{2}{3}g_{\mu\nu}\delta''\left(x^2\right)\varepsilon\left(x_0\right) + \frac{1}{6}\partial_\mu\partial_\nu\left[\delta'\left(x^2\right)\varepsilon\left(x_0\right)\right]\right\} \\ &+ \left\{S_{\mu\alpha\nu\beta}\left[V^\beta\left(x,0\right) - V^\beta\left(0,x\right)\right] + \mathrm{i}\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta}\left[A^\beta\left(x,0\right) - A^\beta\left(0,x\right)\right]\right\} \\ &\times\partial^\alpha\frac{\left[\delta\left(x^2\right)\varepsilon\left(x_0\right)\right]}{2\pi} + :\bar{\psi}\left(x\right)\gamma_\mu Q\psi\left(x\right)\bar{\psi}\left(0\right)\gamma_\nu Q\psi\left(0\right):\end{aligned} \tag{11-158}$$

我们可以用它来计算 $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 湮没和 eN 非弹性散射的单举截面 (inclusive cross section).

1. $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to$ 强子

遵循讨论非弹性 eN 散射时的流程, 可以得到总的强子反应截面, 即对 $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 湮没所有可能的末态求和后的结果, 可以写成流矢量对易子的一个矩阵元

$$\sigma\left(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \text{强子}\right) = \frac{8\pi^2\alpha^2}{3\left(q^2\right)^2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle 0\left|\left[J_\mu\left(x\right), J^\mu\left(0\right)\right]\right|0\right\rangle \tag{11-159}$$

注意这里的 q^2 是类时的 (time-like), 即 $q^2>0$. 阶数最高的光锥奇异项是式 (11-158) 右侧的第一项, 由此在 $q^2 \to \infty$ 的极限下, 得到

$$\begin{aligned}\sigma\left(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \text{强子}\right) \approx \frac{8\pi^2\alpha^2\mathrm{i}\left(\mathrm{tr}Q^2\right)}{3\pi^3\left(q^2\right)^2}&\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x} \\ &\times\left\{\frac{8}{3}\delta''\left(x^2\right)\varepsilon\left(x_0\right) + \frac{1}{6}\partial^2\left[\delta'\left(x^2\right)\varepsilon\left(x_0\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{11-160}$$

根据等式

$$\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\varepsilon\left(q^0\right)\delta\left(q^2\right) = \left(2\pi\right)^2\varepsilon\left(x^0\right)\delta\left(x^2\right) \tag{11-161}$$

可以计算对 x 的积分得到

$$\begin{aligned}\sigma\left(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \text{强子}\right) &\approx \frac{8\pi^2\alpha^2\mathrm{i}\left(\mathrm{tr}Q^2\right)}{3\pi^3\left(q^2\right)^2}\left[\frac{8}{3}\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{6}\right]\varepsilon\left(q^0\right)\delta\left(q^2\right) \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2}\mathrm{tr}\left(Q^2\right)\end{aligned}$$

我们知道

$$\sigma\left(\mathrm{e}^{+}\mathrm{e}^{-}\to\mu^{+}\mu^{-}\right)=\frac{4\pi\alpha^{2}}{3q^{2}} \tag{11-162}$$

因此有如下的简单结果

$$R=\frac{\sigma\left(\mathrm{e}^{+}\mathrm{e}^{-}\to\text{强子}\right)}{\sigma\left(\mathrm{e}^{+}\mathrm{e}^{-}\to\mu^{+}\mu^{-}\right)}=\mathrm{tr}(Q^{2}) \tag{11-163}$$

这证明了这样一个简单朴素的图景, 即在 $q^2\to\infty$ 的深度非弹极限下, 虚光子首先生成夸克 —— 这里的作用类似于点粒子间的耦合, 然后夸克再通过某种强相互作用过程结合成强子, 而最后这一过程则是很难计算的, 需要知道强子写成夸克的波函数. 但如果只测量总面积, 就不需要弄清楚这一复杂的过程.

上述结果在 $q^2\geqslant 1$ GeV 时与实验吻合得很好 (图 11-8), 除了共振态, 如 J/ψ, ψ′, ϒ, ϒ′ 出现的区域之外. 这表明自由场的光锥行为确实能正确地给出实验结果.

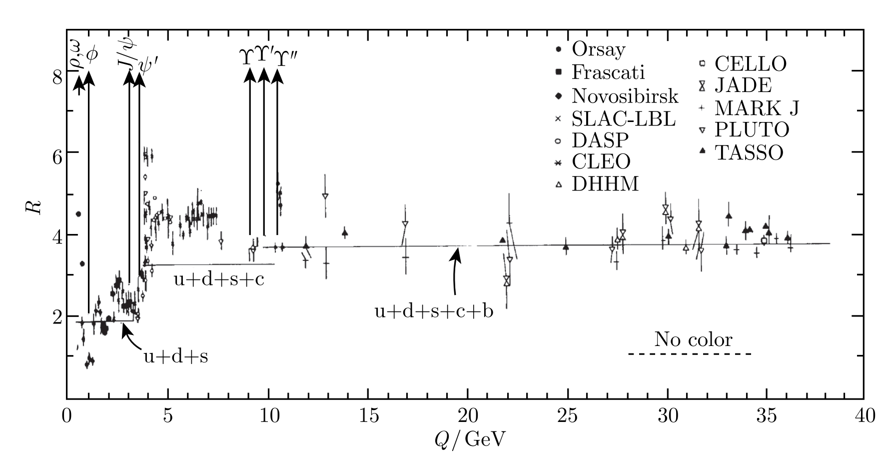


图 11-8 不同的 $\mathrm{e}^{+}\mathrm{e}^{-}$ 实验得到的 R 值

2. 轻子–强子散射

对于深度非弹性的 $\mathcal{L}$N 散射, 式 (11-158) 右手边的第一项没有贡献. 因为它是一个 c 数, 不会对外部物理态非真空态的情况有贡献, 所以主要的奇异项来自于第二项. 为了方便, 可以写成

$$\begin{aligned}
&\left[J_{\mu}\left(\frac{x}{2}\right),J_{\nu}\left(-\frac{x}{2}\right)\right]\\
\approx&\left\{S_{\mu\alpha\nu\beta}\left[:\bar{\psi}\left(\frac{x}{2}\right)\gamma^{\beta}Q^{2}\psi\left(-\frac{x}{2}\right):-:\bar{\psi}\left(-\frac{x}{2}\right)\gamma^{\beta}Q^{2}\psi\left(\frac{x}{2}\right):\right]\right.\\
&\left.+\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta}\left[:\bar{\psi}\left(\frac{x}{2}\right)\gamma^{\beta}\gamma_{5}Q^{2}\psi\left(-\frac{x}{2}\right):-:\bar{\psi}\left(-\frac{x}{2}\right)\gamma^{\beta}\gamma_{5}Q^{2}\psi\left(\frac{x}{2}\right):\right]\right\}\\
&\times\partial^{\alpha}\frac{\left[\delta\left(x^{2}\right)\varepsilon\left(x_{0}\right)\right]}{2\pi}
\end{aligned} \tag{11-164}$$

可以用定域算符 (local operator) 将双定域算符 Taylor 展开, 得到

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\left(\frac{x}{2}\right)\psi\left(-\frac{x}{2}\right)=&\bar{\psi}(0)\left[1+\overleftarrow{\partial}_{\mu_1}\frac{x^{\mu_1}}{2}+\frac{1}{2!}\overleftarrow{\partial}_{\mu_1}\overleftarrow{\partial}_{\mu_2}\frac{x^{\mu_1}}{2}\frac{x^{\mu_2}}{2}+\cdots\right]\\&\times\left[1-\frac{x^{\nu_1}}{2}\overrightarrow{\partial}_{\nu_1}+\frac{1}{2!}\frac{x^{\nu_1}}{2}\frac{x^{\nu_2}}{2}\overrightarrow{\partial}_{\nu_1}\overrightarrow{\partial}_{\nu_2}+\cdots\right]\psi(0)\\=&\sum_n\frac{1}{n!}\frac{x^{\mu_1}}{2}\frac{x^{\mu_2}}{2}\cdots\frac{x^{\mu_n}}{2}\bar{\psi}(0)\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_2}\cdots\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_n}\psi(0)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\left[J_\mu\left(\frac{x}{2}\right),J_\nu\left(-\frac{x}{2}\right)\right]\\=&\sum_{n\ \text{为奇数}}\frac{1}{n!}\frac{x^{\mu_1}}{2}\frac{x^{\mu_2}}{2}\cdots\frac{x^{\mu_n}}{2}O^{(n+1)}_{\beta\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(0)\,S_{\mu\alpha\nu\beta}\partial^\alpha\frac{\left[\delta\left(x^2\right)\varepsilon\left(x_0\right)\right]}{2\pi}\\&+\sum_{n\ \text{为偶数}}\frac{1}{n!}\frac{x^{\mu_1}}{2}\frac{x^{\mu_2}}{2}\cdots\frac{x^{\mu_n}}{2}O'^{(n+1)}_{\beta\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(0)\,\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta}\partial^\alpha\frac{\left[\delta\left(x^2\right)\varepsilon\left(x_0\right)\right]}{2\pi}\end{aligned}$$

其中

$$O^{(n+1)}_{\beta\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(0)=\bar{\psi}(0)\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_2}\cdots\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_n}\gamma_\beta Q^2\psi(0)\tag{11-165}$$

$$O'^{(n+1)}_{\beta\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(0)=\bar{\psi}(0)\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_2}\cdots\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_n}\gamma_\beta\gamma_5 Q^2\psi(0)\tag{11-166}$$

为了计算结构函数, 取它在核子态之间的矩阵元

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_\sigma\left\langle p,\sigma\left|O^{(n+1)}_{\beta\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(0)\right|p,\sigma\right\rangle\\=&A^{(n+1)}p^\beta p_{\mu_1}p_{\mu_2}\cdots p_{\mu_n}+\text{求迹项 (trace term)}\end{aligned}\tag{11-167}$$

其中, $A^{(n+1)}$ 是某个常数. 求迹项包含一个或多个 $g_{\mu_i\mu_j}$ 因子, 它在与 $x^{\mu_i}x^{\mu_j}$ 缩并时会给出二次项 x^2. 在标度极限下, 有 $x^2\approx 0$, 因而这些项可以略去. 此外, 因为 $\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta}$ 的反对称性质, $O'^{(n+1)}$ 项也不会对自旋平均的结构函数有贡献. 这里我们所依据的性质是, 算符 $O^{(n+1)}_{\beta\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(0)$ 是一个 $(n+1)$ 阶的张量并且只依赖于 p_μ, 所以这个矩阵元才会有上面给出的简单形式. 于是对于结构函数有

$$\begin{aligned}W_{\mu\nu}(p,q)\approx&\frac{1}{2M}\int\frac{\mathrm{d}^4x}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\\&\times\sum_{\text{奇数的}n}^{\infty}\left(\frac{x\cdot p}{2}\right)^n\frac{p^\beta}{n!}A^{(n+1)}S_{\mu\alpha\nu\beta}\partial^\alpha\frac{\left[\delta\left(x^2\right)\varepsilon\left(x_0\right)\right]}{2\pi}\end{aligned}\tag{11-168}$$

定义 $f(\xi)$ 为

$$\sum_{\text{奇数的}n}^{\infty}\left(\frac{x\cdot p}{2}\right)^n\frac{A^{(n+1)}}{n!}=\int \mathrm{d}\xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi p}f(\xi) \tag{11-169}$$

那么

$$\begin{aligned}W_{\mu\nu}(p,q)\approx&\frac{1}{2M}\int\frac{\mathrm{d}^4x}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\int\mathrm{d}\xi\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi p}\\&\times f(\xi)S_{\mu\alpha\nu\beta}(q+\xi p)^\alpha p^\beta\frac{\left[\delta\left(x^2\right)\varepsilon(x_0)\right]}{2\pi}\end{aligned} \tag{11-170}$$

根据等式

$$\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4x}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot(q+\xi p)}\delta\left(x^2\right)\varepsilon(x_0)=\delta\left[(q+\xi p)^2\right]\varepsilon(q_0+\xi p_0) \tag{11-171}$$

得到

$$\begin{aligned}W_{\mu\nu}(p,q)\approx&\frac{1}{M}\int\mathrm{d}\xi f(\xi)\,\delta\left(q^2+2M\nu\xi\right)\\&\times\left(g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}+g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}-g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\right)(q+\xi p)^\alpha p^\beta\\=&\frac{1}{2M^2\nu}\int\mathrm{d}\xi f(\xi)\,\delta\left(\xi+\frac{q^2}{2M\nu}\right)\left(-M\nu g_{\mu\nu}+2\xi p_\mu p_\nu+\cdots\right)\\=&f(x)\left[-\frac{g_{\mu\nu}}{2M}+\frac{x}{\nu}\frac{p_\mu p_\nu}{M^2}+\cdots\right]\end{aligned}$$

这里 $x=-\dfrac{q^2}{2M\nu}$. 于是我们就又得到了部分子模型的结果

$$MW_1\quad\longrightarrow F_1(x)=\frac{1}{2}f(x) \tag{11-172}$$

$$\nu W_2\quad\longrightarrow F_2(x)=xf(x) \tag{11-173}$$

这意味着正则自由场光锥结构 (canonical free-field light-cone structure) 的假设和部分子模型等价, 可以导出 Bjorken 标度性. 换句话说, 尽管强相互作用理论可能是非常复杂的, 但对 Bjorken 标度的实验观测意味着在光锥附近, 强相互作用理论应当或多或少表现得像一个自由场论.

11.4 量子色动力学

11.4.1 渐近自由

因为 Bjorken 标度意味着光锥附近的自由场行为, 所以我们要找到一个符合这种表现的场论. 我们把这种理论称为渐近自由的场论. 在之前重整化群方程的部分

曾讨论过, 依赖于能量的耦合常数的渐近行为由 β 函数的零点控制. 因此, 渐近自由的场论要求耦合常数空间的原点是 β 函数的一个稳定不动点 (stable fixed point). β 函数零点的位置需要非微扰的计算, 在大多数情况下是难以进行的. 但是, 微扰理论可以告诉我们 β 在耦合常数空间原点附近的行为. 现在我们来考察各种不同类型的场论, 看它们是否会表现出这种自由场行为 [52].

1. $\lambda\phi^4$ 理论

它的拉氏量是

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}[(\partial_\mu\phi)^2-m^2\phi^2]-\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{11-174}$$

在这种简单情况下, 可以这样计算 β 函数. 重整化的耦合常数 λ 和未重整化的量 λ_0 的关系是

$$\lambda=\bar{Z}\lambda_0,\quad \bar{Z}=Z_\phi^2Z_\lambda^{-1} \tag{11-175}$$

β 函数等于

$$\begin{aligned}\beta&=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda\left(\lambda_0,\Lambda/\mu\right)=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}[\bar{Z}\left(\lambda_0,\Lambda/\mu\right)\lambda_0]\\&=-\lambda_0\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}\bar{Z}\left(\lambda_0,\Lambda/\mu\right)=-\lambda\frac{\partial}{\partial\ln\Lambda}\ln\bar{Z}\left(\lambda_0,\Lambda/\mu\right)\end{aligned} \tag{11-176}$$

到单圈近似有

$$Z_\lambda=1+\frac{3\lambda_0}{32\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}+\cdots \tag{11-177}$$

因此

$$\beta(\lambda)=\frac{3\lambda^2}{16\pi^2}+O(\lambda^3) \tag{11-178}$$

取最低阶近似, 有效耦合常数 $\bar{\lambda}$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}}{\mathrm{d}t}=\beta(\bar{\lambda}),\quad \beta(\lambda)=\frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \tag{11-179}$$

在 $\lambda>0$ 这个正确范围内, β 函数是正数, 不可能是稳定的不动点 (如果 $\lambda<0$, 则会有 $H\to-\infty$, 这是不稳定的). 因此这不是一个渐近自由的理论.

通过如下替换, 还可以推广到包含多个标量场的情况

$$\lambda\phi^4\to\lambda_{ijkl}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l,\quad \lambda_{ijkl}\ \text{是完全对称的} \tag{11-180}$$

于是微分方程变成

$$\beta_{ijkl}=\frac{\mathrm{d}\lambda_{ijkl}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{16\pi^2}\left[\lambda_{ijmn}\lambda_{mnkl}+\lambda_{ikmn}\lambda_{mnjl}+\lambda_{ilmn}\lambda_{mnjk}\right] \tag{11-181}$$

考虑一个特殊情况：$i=j=k=l=1$. 我们看到 $\beta_{1111}=\dfrac{3}{16\pi^2}\lambda_{11mn}\lambda_{mn11}>0$, 所以它也不是渐近自由的. 因此综上所述, 仅有标量场的理论不可能是渐近自由的.

2. Yukawa 作用

为了让理论是可重整化的, 这里需要包括标量场自相互作用 $\lambda\phi^4$：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}[(\partial_\mu\phi)^2 - \mu^2\phi^2] - \lambda\phi^4 + f\bar{\psi}\psi\phi \tag{11-182}$$

计算 β 函数的方法和 $\lambda\phi^4$ 理论相同, 得到的结果是一组相耦合的微分方程

$$\begin{aligned} \beta_\lambda &= \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = A\lambda^2 + B\lambda f^2 + Cf^4, \quad A > 0 \\ \beta_f &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = Df^3 + E\lambda^2 f, \qquad\qquad D > 0 \end{aligned} \tag{11-183}$$

因为 $A > 0$, 那么为了使 $\beta_\lambda < 0$, 需要 $f^2 \sim \lambda$. 这意味着可以舍掉 β_f 里 E 的那项. 又因为 $D > 0$, 所以 Yukawa 耦合 f 不是渐近自由的. 推广到有更多费米子或标量场的情况也同样如此.

3. Abel 规范理论 (QED)

拉氏量取通常的形式

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{11-184}$$

有效耦合常数 $\bar{e}$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\bar{e}}{\mathrm{d}t} = \beta_e = \frac{\bar{e}^3}{12\pi^2} + O(e^5) \tag{11-185}$$

对于标量 QED 理论, 有

$$\frac{\mathrm{d}\bar{e}}{\mathrm{d}t} = \beta'_e = \frac{\bar{e}^3}{48\pi^2} + O(e^5) \tag{11-186}$$

可以看出来, 这两者都不是渐近自由的.

4. 非 Abel 规范理论

最后我们发现, 只有非 Abel 的规范理论才可能是渐近自由的. 将它的拉氏量写成

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \tag{11-187}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \mathrm{i}g[A_\mu, A_\nu], \quad A_\mu = T_a A_\mu^a \tag{11-188}$$

表示矩阵满足下列关系

$$[T_a, T_b] = \mathrm{i}f_{abc}T_c, \quad \mathrm{tr}(T_aT_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{11-189}$$

有效耦合常数的演化取决于如下方程

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2}\frac{11}{3}t_2(V) < 0 \tag{11-190}$$

对 β 函数有贡献的 Feynman 图在图 11-9 中列出.

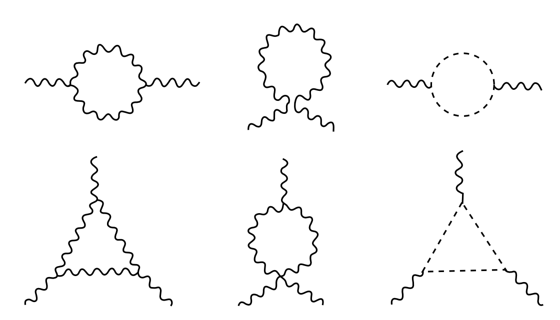


图 11-9 矢量场自能图 (第一行) 和三线规范玻色子顶点修正 (第二行), 其中点线圈是 FP 鬼场

当 $g>0$ 时, $\beta(g)<0$; 当 $g<0$ 时, $\beta(g)>0$, 所以这个理论是有渐近自由的. 这里有

$$t_2(V)\delta^{ab}=\mathrm{tr}[T^a(V)T^b(V)],\quad 其中对于SU(n)有t_2(V)=n \tag{11-191}$$

如果规范场分别通过表示矩阵 $T^a(F)$ 和 $T^a(S)$ 耦合到费米场和标量场上, 那么 $\beta(g)$ 变为

$$\beta(g)=\frac{g^3}{16\pi^2}\left[-\frac{11}{3}t_2(V)+\frac{4}{3}t_2(F)+\frac{1}{3}t_2(S)\right] \tag{11-192}$$

其中

$$t_2(F)\delta^{ab}=\mathrm{tr}[T^a(F)T^b(F)] \tag{11-193}$$

$$t_2(S)\delta^{ab}=\mathrm{tr}[T^a(S)T^b(S)] \tag{11-194}$$

注意费米场和标量场的贡献与规范场的贡献符号相反. 所以, 如果并没有太多的标量场或费米子场, 这个理论依然可以保持是渐近自由的. 因此非 Abel 的规范理论不同于其他的场论, 是唯一可以有渐近自由的理论.

11.4.2 QCD 拉氏量

夸克模型需要加入色对称性来克服简单的夸克模型中的悖论. 另外, 深度非弹性散射中的 Bjorken 标度似乎要求渐近自由的理论. 因为只有非 Abel 规范理论才是渐近自由的, 那么很自然的一个做法就是将夸克的这种色对称性变成一个局域对称性. 由此所产生的理论就是量子色动力学 (quantum chromodynamics, QCD)[53]. 可以直接写下它的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})+\sum_k\bar{q}_k(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu-m_k)q_k \tag{11-195}$$

其中

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \mathrm{i}g[A_\mu, A_\nu]$$

$$D_\mu q_k = (\partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu)q_k, \quad A_\mu = A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}$$

这里的 $\lambda^a(a=1,\cdots,8)$ 是 8 个 3×3 的无迹厄米矩阵, 构成 $SU(3)$ 群生成元的表示. 取到 g 的最低阶计算出来的 β 函数的形式为

$$\beta_g = \frac{-1}{16\pi^2}\left(11 - \frac{2}{3}n_f\right)g^3 = -bg^3, \quad n_f\text{：夸克的味数} \tag{11-196}$$

有效耦合常数所满足的方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\bar{g}}{\mathrm{d}t} = -b\bar{g}^3, \quad t = \ln\lambda \tag{11-197}$$

这里的 λ 是将动量按比例增加的参数：$p_i \to \lambda p_i$. 方程的解为

$$\bar{g}^2(t) = \frac{g^2}{1+2bg^2t}, \quad g = \bar{g}(g,0) \tag{11-198}$$

对于大动量 λp_i, 即 λ 很大时, $\bar{g}^2(t)$ 以 $\dfrac{1}{\ln\lambda}$ 的形式减小. 为了方便, 定义

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\bar{g}^2(t)}{4\pi} \tag{11-199}$$

代入上面的解之后有

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1+4\pi b\alpha_s(\mu^2)\ln(Q^2/\mu^2)} \tag{11-200}$$

引入参数 $\varLambda^2$, 它满足

$$\ln\varLambda^2 = \ln\mu^2 - \frac{1}{4\pi b\ \alpha_s(\mu^2)} \tag{11-201}$$

于是有效耦合常数可以写成

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\left(11-\dfrac{2}{3}n_f\right)\ln Q^2/\varLambda^2} \tag{11-202}$$

在这种形式下, 关系式中就只有一个参数 $\varLambda$, 非常有利于与实验测量相比较. 因此得到, 有效耦合常数 $\alpha_s(Q^2)$ 是以 $\dfrac{1}{\ln Q^2}$ 的形式慢慢变小.

上述的讨论给出了一个简单的图景. 如果对 $\alpha_s(Q^2)$ 取到第 0 阶近似, 便得到一个夸克的自由场论, 这可以导出 Bjorken 标度. 若取到 $\alpha_s(Q^2)$ 的第一阶, 会得到

对 Bjorken 标度律的偏离. 因为当 Q^2 很大时, $\alpha_s(Q^2)$ 是小量, 所以我们希望可以可靠地计算对标度的修正. 但是, 在重整化群的分析中, 渐近区域是所有的动量都很大的区域, 即随着 $\lambda \to \infty$ 时, $(\lambda p_i)^2 \to \infty$. 这意味着所有的粒子都远离它们的质壳 (mass shell), 而这明显不符合 ep 散射的情况. 在 ep 散射中, 质子始终都是在壳的, 所以我们需要找到某种方法来绕过这个困境. 这将在 11.4.3 节中讨论. 到时我们会看到, QCD 能够以对结构函数积分的形式预言 (小的)标度破坏 (scaling violation) 的情况.

在分析标度破坏之前, 我们先来讨论两个重要的课题.

(1) 夸克禁闭 (Quark confinement). 既然 $\alpha_s(Q^2)$ 在 Q^2 很大时是个小量, 那么就有理由相信 $\alpha_s(Q^2)$ 在 Q^2 较小时会变得较大. 这就使得夸克被束缚在一起结合成各种各样的强子. 但是因为此时耦合常数 $\alpha_s(Q^2)$ 很大, 所以定量地研究强子谱就变得很困难.

如果 $\alpha_s(Q^2)$ 足够大, 夸克之间的相互作用就会强到它永远都不能从强子中逃离出来. 这就称为**夸克禁闭**(quark confinement). 这是“解释”为什么观测不到自由的夸克粒子以及 qq 和 qqqq 态最有说服力的方式. QCD 的夸克禁闭的性质是对理论的一个合理的猜测, 虽然它从未被令人信服地直接从 QCD 推导出来. 不过人们坚定地相信这应该是正确的, 因为没有其他的方法来解释为什么找不到夸克和其他的一些态.

(2) QCD 和味对称. 既然我们有了一个强相互作用的理论, 就要来看看是否可以对味对称性 (flavor symmetry) (如同位旋和八重道) 多一些了解.

QCD 拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) + \sum_k \bar{q}_k \mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu q_k + \sum_k \bar{q}_k m_k q_k \tag{11-203}$$

其中

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \mathrm{i}g[A_\mu, A_\nu]\ , \quad A_\mu = A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \\ D_\mu q_k &= (\partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu)q_k\ , \quad q_k = (u, d, s\cdots) \end{aligned}$$

考虑只有 3 种味的简单情形, 用夸克分量 $q_k = (u, d, s)$ 将拉氏量展开来

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = &-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) + (\bar{u}i\gamma^\mu D_\mu u + \bar{d}i\gamma^\mu D_\mu d + \bar{s}i\gamma^\mu D_\mu s) \\ &+ m_u\bar{u}u + m_d\bar{d}d + m_s\bar{s}s \end{aligned} \tag{11-204}$$

在 $m_u = m_d = m_s = 0$ 的极限下, $\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}$ 对于 $SU(3)_{\mathrm{L}} \times SU(3)_{\mathrm{R}}$ 变换保持不变, 即

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}_{\mathrm{L}} \to U_{\mathrm{L}} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}, \quad \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}_{\mathrm{R}} \to U_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}_{\mathrm{R}} \tag{11-205}$$

其中, U_{L} 和 U_{R} 是 3×3 的幺正矩阵. 然而, 强子谱只表现出近似的 $SU(3)$ 对称性 —— 八重道, 而不是 $SU(3)_{\mathrm{L}} \times SU(3)_{\mathrm{R}}$ 对称. 要解决这个矛盾, 可以认为 $SU(3)_{\mathrm{L}} \times SU(3)_{\mathrm{R}}$ 对称性自发破缺到 $SU(3)$ 对称性, 使得粒子组成 $SU(3)$ 多重态, 而非 $SU(3)_{\mathrm{L}} \times SU(3)_{\mathrm{R}}$ 的多重态. 这就需要 8 个无质量的 Goldstone 玻色子. 然而在现实世界中, 夸克质量不为 0, 这些 Goldstone 玻色子也不是严格无质量的. 但是如果这个对称性破缺并不是很大, 那么这些 Goldstone 玻色子的质量就该很轻, 因此可以将它们当成 Goldstone 玻色子来处理. 换句话说, 赝标量介子因为质量较小, “几乎” 就是 Goldstone 玻色子. 我们可以认为它们是赝标量介子的八重态, 即 π, K 和 η.

这样我们得到的图像就是, 当将夸克质量 $m_{\mathrm{u}}, m_{\mathrm{d}}, m_{\mathrm{s}}$ 取得比较小时, QCD 有近似的 $SU(3)_{\mathrm{L}} \times SU(3)_{\mathrm{R}}$ 对称性. 这个对称性是自发破缺的, 而破缺所产生的这些 “几乎” 是 Goldstone 玻色子的介子 π, K 和 η 有正比于夸克质量的较轻的质量.

11.4.3 重整化群和 QCD

既然 QCD 的渐近自由性质会产生标度律, 那么我们现在要研究的是标度破坏是否可以联系到 QCD 中的高阶效应. 因为 QCD 是渐近自由的, 乍看起来这使得我们可以用重整化群和微扰论来计算很多的高能过程. 可事实却并非如此：重整化群的分析是一个标度变换的理论, 它涉及等比地增加四动量的所有分量; 而紫外渐近极限是在深欧几里得区域 (deep Euclidean region), 这里所有的粒子都远离它们的质壳. 好在有些情况下, 一些 “外部” 粒子是远离它们的质壳的. 特别是在电弱耦合的最低阶, 半轻子的单举过程 (inclusive processes) 可以被分解为一个已知的轻子部分和一个强子量. 这个量对应于一个可变质量为 $-q^2$ 的虚光子 (或虚的 W 玻色子) 的前向散射 (forward scattering) 振幅. 更具体地说就是, $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 湮没和轻子–强子散射的散射截面衡量的是电弱流矢量乘积在某个态 $|A\rangle$ 下的矩阵元的有吸收性的部分 (absorptive part)

$$\langle A | T\left(J_\mu(x) J_\nu(0)\right) | A\rangle \tag{11-206}$$

高能量和高 q^2 值极限确实对应于深欧几里得区域.

还有一个难题是, 对于有外部强子态的过程, 我们感兴趣的振幅不能用 QCD 拉氏量中基本的场 (即夸克和胶子场) 来写成 Green 函数, 并且重整化群方程也不能使用. 比如, 在 ep 散射中, 外部的物理态是质子：$|A\rangle = |\text{质子}\rangle$. 我们不知道怎样用夸克和胶子场的 Green 函数写出矩阵元 $\langle \text{质子} | T\left[J_\mu(x) J_\nu(0)\right] | \text{质子}\rangle$, 但是在某些

情况下, 我们可以把物理振幅分解为一个可以用 QCD 理论来计算的硬散射 (hard scattering) 部分和一个难以计算的软的部分 (soft part). 这种分解在将实验测量和理论预测作比较时显得非常有用. 我们将通过下面的例子进行具体说明. 完整的讨论会有点复杂, 会涉及比较技术性的手段. 我们会忽略许多细节, 只讨论主要的概念.

$\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 湮没

对于 $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 湮没的例子, 有式 (11-159)

$$\sigma\left(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \text{强子}\right) = \frac{8\pi^2\alpha^2}{3\left(q^2\right)^2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle 0\left|\left[J_\mu\left(x\right), J^\mu\left(0\right)\right]\right|0\right\rangle \tag{11-207}$$

可以看到式 (11-206) 中的 $|A\rangle$ 就是真空态. 因此, 虚光子质量 q^2 是唯一的质量标度, 可以直接进行重整化群的分析.

动量空间中的光子传播子被定义为

$$\mathrm{i}\Delta_{\mu\nu}\left(q\right) = \int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle 0\left|T\left(A_\mu\left(x\right)A_\nu\left(0\right)\right)\right|0\right\rangle \tag{11-208}$$

可以用光子自能图 (1PI 图) 将它展开

$$\mathrm{i}\Delta_{\mu\nu}\left(q\right) = \mathrm{i}\Delta_{0\mu\nu}\left(q\right) + \mathrm{i}\Delta_{0\mu\rho}\left(q\right)\mathit{\Gamma}^{\rho\sigma}\left(q\right)\mathrm{i}\Delta_{0\sigma\nu}\left(q\right) + \cdots \tag{11-209}$$

这里的 $\mathrm{i}\Delta_{0\mu\nu}(q)$ 是自由光子的传播子, $\mathit{\Gamma}^{\rho\sigma}(q)$ 是去掉了外部光子传播子的 1PI 图. 不难看出来, 它可以写成

$$\mathit{\Gamma}^{\mu\nu}\left(q\right) = \int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle 0\left|T(J_\mu\left(x\right)J_\nu\left(0\right))\right|0\right\rangle \tag{11-210}$$

下面我们来推导流矢量编时乘积的矩阵元和流矢量对易子的矩阵元之间的关系. 在 $\mathit{\Gamma}^{\mu\nu}(q)$ 中插入一组完备集, 得到

$$\begin{aligned}\mathit{\Gamma}^{\mu\nu}\left(q\right) &= \sum_n\int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}[\left\langle 0\right|J_\mu\left(x\right)\left|n\right\rangle\left\langle n\right|J_\nu\left(0\right)\left|0\right\rangle\theta\left(x_0\right)\\ &\quad+\theta\left(-x_0\right)\left\langle 0\right|J_\nu\left(0\right)\left|n\right\rangle\left\langle n\right|J_\mu\left(x\right)\left|0\right\rangle]\\ &= \sum_n\int \mathrm{d}^4x[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-p_n)\cdot x}\left\langle 0\right|J_\mu\left(0\right)\left|n\right\rangle\left\langle n\right|J_\nu\left(0\right)\left|0\right\rangle\theta\left(x_0\right)\\ &\quad+\theta\left(-x_0\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q+p_n)\cdot x}\left\langle 0\right|J_\nu\left(0\right)\left|n\right\rangle\left\langle n\right|J_\mu\left(0\right)\left|0\right\rangle]\\ &= \sum_n\left[\frac{\left(2\pi\right)^3\delta^3\left(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}_n\right)}{q_0-p_0+\mathrm{i}\varepsilon}\left\langle 0\right|J_\mu\left(0\right)\left|n\right\rangle\left\langle n\right|J_\nu\left(0\right)\left|0\right\rangle\right.\\ &\quad\left.+\frac{\left(2\pi\right)^3\delta^3\left(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}_n\right)}{q_0+p_0-\mathrm{i}\varepsilon}\left\langle 0\right|J_\nu(0)\left|n\right\rangle\left\langle n\right|J_\mu(0)\left|0\right\rangle\right]\end{aligned}$$

取它的虚数部分得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\Gamma^{\mu\nu}(q) &= \sum_n [(2\pi)^3\delta^4(q-p_n)\langle 0|J_\mu(0)|n\rangle\langle n|J_\nu(0)|0\rangle \\ &\quad -(2\pi)^3\delta^4(q+p_n)\langle 0|J_\nu(0)|n\rangle\langle n|J_\mu(0)|0\rangle] \\ &= \int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}\langle 0|[J_\mu(x),J_\nu(0)]|0\rangle\end{aligned}$$

这里使用了等式

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im}\frac{1}{x-a\pm\mathrm{i}\varepsilon}=\mp\delta(x-a) \tag{11-211}$$

因此两个流矢量对易子的矩阵元与编时乘积矩阵元的虚部有关. 这又是一个表现编时的 (time-ordered) 矩阵元的虚部和对易子矩阵元关系的例子. 这个关系式可以被推广到外部态是质子的情况, 比如, 在 ep 散射中的情形.

由结构常数和流守恒, 有

$$\Gamma^{\mu\nu}(q)=\left(-g^{\mu\nu}+\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)\Pi\left(q^2\right) \tag{11-212}$$

其中真空极化 $\Pi\left(q^2\right)$ 的简单量纲 (naive dimension) 为 2, 所以相关的重整化群方程就变成

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\beta\frac{\partial}{\partial g}+2\gamma_A-2\right]\Pi\left(q^2\right)=0 \tag{11-213}$$

其中, γ_A 是光子场的反常量纲 (anomalous dimension):

$$\gamma_A=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\ln\Lambda}\left[\ln Z_3\left(e,g,\frac{\Lambda}{\mu}\right)\right] \tag{11-214}$$

Z_3 是通常的光子波函数 (即真空极化) 重整化常数 (它的一圈和两圈图如图 11-10 所示), 将它代入之后可以得到

$$\gamma_A=C\left(3\sum_k^{n_f}e_k^2\right)\left[1+\frac{3s_2(V)}{16\pi^2}g^2+\cdots\right] \tag{11-215}$$

其中, e_k 是 k 味夸克的电荷量, $s_2(V)$ 则与规范玻色子的表示矩阵有关.

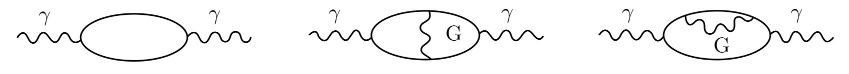


图 11-10　光子真空极化的一圈和两圈图

由 $SU(n)$ 对称性的 $T^a(V)$ 可以得到

$$s_2(V)\delta_{ij}=(T^a(V)T^a(V))_{ij}=\frac{n^2-1}{2n}\delta_{ij},\quad 对于SU(n) \tag{11-216}$$

对于 $SU(3)$ 胶子则有 $s_2(V)=4/3$. 我们没有写出比例常数 C 的准确形式, 因为它在要引用的结果中会被消掉. 解出式 (11-213), 对于 $Q^2=-q^2$, 有

$$\begin{aligned}\mathit{\Pi}\left(Q^2\right) &\simeq Q^2\exp\left[-2\int_0^t \gamma_A\left(g\left(t'\right)\right)\mathrm{d}t'\right]\\ &=Q^2\left[1-2C\left(3\sum_k^{n_f}e_k^2\right)\left(t+\frac{3s_2\left(V\right)}{16\pi^2}\ln t+\cdots\right)\right]\end{aligned}$$

取吸收性的部分, 得到散射截面 $\sigma(\mathrm{e^+e^-}\to \text{强子})$

$$R\left(Q^2\right)\equiv\frac{\sigma(\mathrm{e^+e^-}\to\text{强子})}{\sigma(\mathrm{e^+e^-}\to\mu^+\mu^-)}=\left(3\sum_k^{n_f}e_k^2\right)\left[1+\frac{\alpha_s\left(Q^2\right)}{\pi}+\cdots\right] \tag{11-217}$$

于是我们在这里重新得到了式 (11-163) 中得到过的简单的部分子标度性的结果, 连同一个 QCD 的修正项. 其中 $\alpha_s\left(Q^2\right)$ 由式 (11-202) 给出. 因此 $R(Q^2)$ 是从上面趋近于 $R(Q^2=\infty)$. 这个次渐近 (subasymptotic) 的修正项至少在高于粲夸克临界值的区域内可能是小于实验不确定度的. 因此, 虽然 $\mathrm{e^+e^-}$ 湮没的总反应截面不是测量 $\alpha_s\left(Q^2\right)$ 的理想场所, 但总的实验数据是符合 QCD 的预测的.

非弹性 $\mathcal{L}$N 散射

在 $\mathcal{L}$N 散射中, 式 (11-206) 的 $|A\rangle$ 是核子态. 我们必须要设计出一种方法, 将矩阵元分解成两个量的乘积：一个是与动量无关的量, 它会被看成结构函数和部分子的分布函数; 还有一个是依赖于 q^2 的函数, 它要根据重整化群来按比例变化. 在 QCD 框架下, 这类过程的完整分析相当复杂. 我们只讨论里面涉及的主要概念并给出结果.

1. 算符乘积的展开

我们在前面讨论过, 两个电磁流乘积在光锥附近的奇异行为会控制结构函数的标度行为. 在算符乘积展开中, 算符的乘积会被表示成非奇异算符的和, 其中这些非奇异算符的系数是奇异的 c 数函数. 例如, Wick 定理将算符的编时乘积表示成一系列缩并与算符的正规乘积的和, 前者是 c 数的奇异函数, 后者则是非奇异的. 这样的分离操作将散射振幅分解成与过程无关的 (processes independent) 奇异的 c 数函数与非奇异算符的乘积, 而这些非奇异算符的矩阵元则是与过程相关的 (processes dependent). 这些奇异的 c 数函数可以在 QCD 理论的框架中用重整化群方程计算出来, 是 QCD 理论主要的预测. 无法计算的非奇异算符矩阵元则必须从实验测量中得到. 作这样展开的物理基础是：和系统的特征长度相比, 距离比较小的两个定域算符的乘积看起来应该像一个定域算符. 有两种不同类型的展开, 下面将要进行讨论.

1) 短距离 (Short-distance) 展开

$$A(x)B(y) \approx \sum_i C_i(x-y)O_i(\frac{1}{2}(x+y)), \quad \text{当 } (x-y)_\mu \to 0\text{时} \tag{11-218}$$

其中, A, B 和 O_i 都是定域算符. 展开式中出现的 O_i 一定要和等式左侧的乘积 AB 拥有相同的量子数. $C_i(x)'s$ 是奇异的 c 数函数, 称为 **Wilson 系数**. 对于可重整理论, 这个展开的一般特征已经被证明到微扰论的任意有限阶都是成立的. 这个结果也是很合理的. Wilson 系数的短距离行为 (short-distance behaviour) 被认为能通过单纯的量纲分析推算得到, 再乘上一些对数的乘积因子 (multiplicative factor):

$$C_i(x) \longrightarrow (x)^{d_i-d_A-d_B} (\ln xm)^p \left[1+O\left(xm\right)\right], \quad x \text{ 表示 } \sqrt{x^2} \tag{11-219}$$

这里 d_A, d_B 和 d_i 分别是 A, B 和 O_i 的 (以质量为单位的) 量纲. 算符 O_i 的量纲越大, 系数 $C_i(x)$ 的奇异性阶数就越小, 因此在短距离上即能量很高时, 最重要的是量纲最小的那些算符, 通常这些算符数目不多. 换句话说, 在对算符的求和中, d_i 最小的那些将占主导地位.

这个展开的好处在于它的普遍性: Wilson 系数是与我们所要考虑的物理态 (初末态) 无关的. 过程的相关性则是在短距离上非奇异的局域算符 O_i 的矩阵元之中体现的.

2) 光锥展开

我们已经在等式 (11-150) 和 (11-158) 中遇到过这种展开. 它们是如下的一般性光锥展开的实例

$$A\left(\frac{x}{2}\right)B\left(-\frac{x}{2}\right) \approx \sum_i C_i\left(x\right)O_i(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}), \quad \text{当}x^2 \approx 0\text{时} \tag{11-220}$$

这里我们所感兴趣的区域是 $x^2 \approx 0$, 但 x_μ 本身的分量却未必很小. 当然, 它也会包含 $x_\mu \approx 0$ 的短距离区域. 我们需要把双定域算符用 Taylor 级数展开

$$O_i\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = \sum_i x^{\mu_i} \cdots x^{\mu_j} O^{(j,i)}_{\mu_1\cdots\mu_j}(0) \tag{11-221}$$

这样两个定域算符的乘积就可以表示成定域算符的和, 我们便可以研究它的矩阵元

$$A\left(\frac{x}{2}\right)B\left(-\frac{x}{2}\right) \approx \sum_{i,j} C^{(j)}_i\left(x^2\right)\ x^{\mu_i} \cdots x^{\mu_j} O^{(j,i)}_{\mu_1\cdots\mu_j}(0), \quad \text{当 } x^2 \to 0\text{时} \tag{11-222}$$

如果将基底 $O^{(j,i)}_{\mu_1\cdots\mu_j}(0)$ 取为有 j 个指标的无迹对称张量, 那么它们就相当于自旋为 j 的算符. 通过单纯的量纲推算, 可以得到 Wilson 系数在 $x^2 \to 0$ 处的光锥行为. 除了一些对数因子, 可以得到

$$C^{(j)}_i\left(x^2\right) \longrightarrow \left(\sqrt{x^2}\right)^{d_{ji}-j-d_A-d_B} \left(\ln x^2m^2\right)^p \tag{11-223}$$

其中, $d_{j,i}$ 是 $O^{(j,i)}_{\mu_1\cdots\mu_j}(0)$ 的量纲. 对于给定的算符 A, B, 最重要的项对应于 $(d_{j,i}-j)$ 的最小值, 即 $O^{(j,i)}_{\mu_1\cdots\mu_j}$ 的量纲减去它的自旋. 这个量称为算符的**扭度**(twist).

$$\tau = d - j \tag{11-224}$$

表示扭度 = 量纲− 自旋. 在光锥展开中, 扭度最小的算符占主导地位.

很显然标量场 ϕ, 费米子场 ψ 和规范场 $F_{\mu\nu}$ 的扭度都是 1. 例如, 费米场有 $d=\dfrac{3}{2}$, $j=\dfrac{1}{2}$, 所以扭度 $\tau=d-j=1$. 对这些场求导不会减小扭度, 最多是让它保持不变. 因为求导会让量纲增加 1, 同时使自旋改变 1 或 0. 因此一个包含 m 个场的算符扭度的最小值就是 m. 最重要的光锥算符扭度是 2, 举例如下：

$$\text{标量}\qquad O^{(j,s)}_{\mu_1\cdots\mu_j} = \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_2} \cdots \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_j} \phi \tag{11-225}$$

$$\text{费米子}\qquad O^{(j,f)}_{\mu_1\cdots\mu_j} = \bar{\psi}\gamma_{\mu_1} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_2} \cdots \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_j} \psi + \text{置换指标项 (permutations)} \tag{11-226}$$

$$\text{矢量}\qquad O^{(j,g)}_{\mu_1\cdots\mu_j} = F_{\mu_1\alpha} \overleftrightarrow{D}_{\mu_2} \cdots \overleftrightarrow{D}_{\mu_j} F^{\alpha}_{\mu_j} + \text{置换指标项} \tag{11-227}$$

在标量场和费米子场中的导数算符 ∂_μ 要被规范理论的协变导数算符 $\overleftrightarrow{D}_\mu$ 所代替. 我们已经见到过, 自由场论中正则扭度 (canonical twist) 为 2 的算符的主导地位会导致 Bjorken 标度性.

因此 $\mathcal{L}$N 散射截面可以被分解为两部分: 一部分与动量无关, 另一部分则依照重整化群方程所控制的方式来按比例变化, 在这里 $\mathcal{L}$N 散射截面被联系到虚光子与核子的前向散射 (forward scattering) 振幅的吸收性部分 (absorptive part). 我们可以对 (从光子的耦合来的) 电流算符的算符乘积作光锥展开 (light-cone expansion). 定域算符的矩阵元则会给出动量无关的部分以及满足重整化群方程的 c 数的 Wilson 系数. 首先说明, 这些 Wilson 系数是与 $\mathcal{L}$N 结构函数的矩有关系的.

2. 结构函数的矩和 Wilson 系数

现在我们来举例说明结构函数的矩 (moments) 与 Wilson 系数的关联. 我们用标量算符 $J(x)$ 作为例子, 以避免复杂的 Lorentz 指标. 考虑前向散射振幅 (图 11-11)：

$$T\left(q^2,\nu\right) = \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \left\langle p \left| T\left[J\left(\frac{x}{2}\right)J\left(-\frac{x}{2}\right)\right]\right| p \right\rangle \tag{11-228}$$

其中, $\nu = p\cdot q/M$. 这里的主要想法是用定域算符写出流乘积的算符乘积展开式, 展开式的系数就是 c 数的 Wilson 系数：

$$T\left[J\left(\frac{x}{2}\right)J\left(-\frac{x}{2}\right)\right] \approx \sum_{i,j} C^{(j)}_i\left(x^2\right)\ x^{\mu_i}\cdots x^{\mu_j} O^{(j,i)}_{\mu_1\cdots\mu_j}(0), \quad \text{当} x^2\to 0 \text{时} \tag{11-229}$$

其中, i 指标要遍及所有扭度为 2 的算符. Wilson 系数 $C_i^{(j)}\left(x^2\right)$ 可以在 QCD 理论中求得. 将展开式代入式 (11-228), 散射振幅变为

$$
\begin{aligned}
T\left(q^2,\nu\right) &= \sum_{i,j}\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} C_i^{(j)}\left(x^2\right) x^{\mu_i}\cdots x^{\mu_j}\left\langle p\left|O_{\mu_1\cdots\mu_j}^{(j,i)}(0)\right|p\right\rangle \\
&= \sum_{i,j}(i)^j \frac{\partial}{\partial q_{\mu_1}}\frac{\partial}{\partial q_{\mu_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial q_{\mu_j}}\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} C_i^{(j)}\left(x^2\right)\left\langle p\left|O_{\mu_1\cdots\mu_j}^{(j,i)}(0)\right|p\right\rangle
\end{aligned}
$$

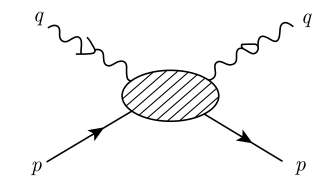


图 11-11 等式 (11-228) 中的 J-p 散射

在上面的最后一步, 我们将 $x^{\mu_i}\cdots x^{\mu_j}$ 因子转换成了 $\frac{\partial}{\partial q_{\mu_1}}\frac{\partial}{\partial q_{\mu_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial q_{\mu_j}}$. 定域算符 $O_{\mu_1\cdots\mu_j}^{(j,i)}$ 作用在态 $|p\rangle$ 上得到的矩阵元将依赖于强相互作用的细节. 然而, 根据它的张量性质和局域性可以对它作一个简单的参数化

$$
\left\langle p\left|O_{\mu_1\cdots\mu_j}^{(j,i)}(0)\right|p\right\rangle = O_i^{(j)}\left[p_{\mu_1}p_{\mu_2}\cdots p_{\mu_j} - \text{求迹项}\right] \tag{11-230}
$$

其中, $O_i^{(j)}$ 是一个常数, 而求迹的项会含有至少一个 $g_{\mu\nu}$ 因子, 因而是不重要的. 作下面的替换

$$
\frac{\partial}{\partial q_{\mu_1}}\frac{\partial}{\partial q_{\mu_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial q_{\mu_j}} = 2^j q^{\mu_1}q^{\mu_2}\cdots q^{\mu_j}\left(\frac{\partial}{\partial q^2}\right)^j + \text{求迹项} \tag{11-231}
$$

保持 $-q^2/2M\nu$ 不变, 当 $-q^2$ 很大时, 得到

$$
\begin{aligned}
T\left(q^2,\nu\right) &= \sum_{i,j}(2i)^j (p\cdot q)^j\left(\frac{\partial}{\partial q^2}\right)^j\left[\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} C_i^{(j)}\left(x^2\right)\right] O_i^{(j)} \\
&= \sum_{i,j}\left(\frac{p\cdot q}{-q^2}\right)^j \tilde{C}_i^j\left(q^2\right) O_i^{(j)}
\end{aligned} \tag{11-232}
$$

其中

$$
\tilde{C}_i^j\left(q^2\right) = \left(-\mathrm{i}q^2\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial q^2}\right)^j\left[\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} C_i^{(j)}\left(x^2\right)\right] \tag{11-233}
$$

基本上就是 $x^{\mu_i}\cdots x^{\mu_j}C_i^{(j)}(x^2)$ 的 Fourier 变换. 求迹项包含 $(2p\cdot q)$ 较低的阶, 在标度极限下可以放心地被忽略. 此外, 这里的 j 指标与自旋有关. 可以用自选投影将

振幅 $T(q^2, v)$ 分解, 分离出每个 j 各自的贡献

$$T\left(q^2, \nu\right) = \sum_j T_j\left(q^2, \nu\right) \tag{11-234}$$

这样便从式 (11-232) 得到

$$T_j\left(q^2, \nu\right) \approx x^{-j} \sum_i \tilde{C}_i^{(j)}(q^2) O_i^{(j)} \tag{11-235}$$

其中, $x = -q^2/2M\nu$. 这说明, 为了分离出给定自旋 j 的算符, 只需要将 $T(q^2, \nu)$ 在 $-q^2$ 很大的区域展开成 x^{-1} 的级数. 在深度非弹性散射中, 实际测量的是前向散射振幅 $T(q^2, \nu)$ 的吸收性部分

$$W\left(q^2, \nu\right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} T\left(q^2, \nu\right) \tag{11-236}$$

这可由 e^+e^- 散射中给出的类似的理由得到. 通过色散关系 (dispersion relation), 散射振幅可以由所测量的量 $W\left(q^2, \nu\right)$ 重新构造出来

$$T\left(q^2, \nu\right) = \int \frac{\nu^s \mathrm{d}\nu'}{\nu'^s\left(\nu' - \nu\right)} W\left(q^2, \nu\right) + P_{s-1}\left(q^2, \nu\right) \tag{11-237}$$

这里假设色散关系需要 s 次的分离 (subtraction), 这样积分才会收敛. 而引进的分离项 $P_{s-1}\left(q^2, \nu\right)$ 是 ν 的 $(s-1)$ 次的多项式. 分离的次数与 $W\left(q^2, \nu\right)$ 在 ν 很大时的行为有关. 例如, 如果当 $\nu \to \infty$ 时, 有 $W\left(q^2, \nu\right) \to 0$, 那么就不需要分离, 即 $s = 0$, 因为此时积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\nu'}{\nu' - \nu} W\left(q^2, \nu\right)$ 是收敛的; 但如果 $W\left(q^2, \nu\right) \to$ 常数, 那就需要一次分离, 此时 $s = 0$, 积分 $\displaystyle\int \frac{\nu \mathrm{d}\nu'}{\nu'\left(\nu' - \nu\right)}$ 是收敛的; 依此类推. 如果再假设来自分离的多项式 $P_{s-1}\left(q^2, \nu\right)$ 也有标度性行为, 即当 q^2 很大时, 有 $P_{s-1}\left(q^2, \nu\right) \longrightarrow P_{s-1}(x)$——$x^{-1}$ 的一个 $s-1$ 阶的多项式. 那么得到

$$\begin{aligned} T\left(q^2, \nu\right) &= \int \frac{x^s \mathrm{d}x'}{x'^s\left(x' - x\right)} W\left(q^2, x'\right) + P_{s-1}(x) \\ &\approx P_{s-1}(x) + \sum_{J=s}^{\infty} x^{-J} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x' \left(x'\right)^{J-1} W\left(q^2, x'\right) \end{aligned}$$

由于未知的分离常数, 展开式中的第一项待定. 但是对于 $J > s$ 的情况, 有

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\,(x)^{J-1} W\left(q^2, x\right) \approx \sum_i \tilde{C}_i^{(J)}\left(q^2\right) O_i^{(j)}, \quad \text{在} J \geqslant s, \quad -q^2 \longrightarrow \infty \text{时} \tag{11-238}$$

因此结构函数的矩衡量的是 Wilson 系数(的 Fourier 变换)$\tilde{C}_i^{(J)}(q^2)$. 对于更真实点的电磁流的情况 $J \to J_{em}$, 也可以作类似的分析. 在关于前向 Compton 振幅高能行为的通常假设下 (根据 Regge 理论), 如果 Compton 散射的 t 道有真空的量子数, 则关系式 (11-238) 对所有 $J > 2$ 的情况都成立; 而如果不是真空的量子数, 则对于 $J > 1$ 就成立. 在用两个不变的 eN 非弹性结构常数 $F_{1,2}(x, Q^2)$ 分解之后, 结果是

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\,(x)^{J-2} F_2\left(x, Q^2\right) \approx \frac{1}{4} \sum_i \tilde{C}_i^{(J)}\left(Q^2\right) O_i^{(J)} \tag{11-239}$$

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\,(x)^{J-2} F_1\left(x, Q^2\right) \approx \frac{1}{2} \sum_i \tilde{C}_i^{(J)}\left(Q^2\right) O_i^{(J)} \tag{11-240}$$

我们知道精确的 Bjorken 标度性——$F_i(x, Q^2) \longrightarrow F_i(x)$, 对应于自由场行为

$$\tilde{C}_i^{(J)}\left(Q^2\right) \longrightarrow 常数, \quad 当 Q^2 \to \infty 时 \tag{11-241}$$

通常我们预期这会被相互作用所改变. 对标度行为可能的最简单的偏离是, 微扰每一阶的 $\ln(Q^2/m^2)$ 的乘方相加得到的 Q^2 的幂次, 即

$$\tilde{C}_i^{(J)}\left(Q^2\right) \sim \left(\frac{1}{Q^2}\right)^{\gamma_J/2} \tag{11-242}$$

对于通常的矩, 式 (11-242) 则意味着

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\,(x)^{J-2} F_2\left(x, Q^2\right) \approx \left(\frac{1}{Q^2}\right)^{\gamma_J/2}, \quad 当 Q^2 \to \infty 时 \tag{11-243}$$

3. Wilson 系数的重整化群方程

现在我们用重整化群来探讨 Wilson 系数的行为. 从式 (11-238) 可以看到, 结构函数的矩与 Wilson 系数 $\tilde{C}_i^{(J)}(Q^2)$ 有密切的联系, 其中 $\tilde{C}_i^{(J)}(Q^2)$ 包含了 Q^2 的变化. 基本的构想就是, Wilson 系数把算符的乘积联系到定域的算符 (local operators) 上. 如果考虑包含算符乘积的 Green 函数, 根据之前的讨论, 它们满足重整化群方程. 同样地, 在算符乘积展开中出现的定域算符的 Green 函数也会满足重整化群方程. 我们现在要说明 Wilson 系数 $\tilde{C}_i^{(J)}$ 也会因此满足某种重整化群方程, 由此可以导出 Q^2 的演化. 比较算符乘积的 Green 函数和定域算符的 Green 函数所满足的重整化群方程, 可以得到 Wilson 系数的重整化群方程.

算符乘积的展开式可以简单地写成

$$A\left(x\right) B\left(0\right) \approx \sum_i C_i\left(x, g, \mu\right) O_i(0) \tag{11-244}$$

这里, g 是耦合常数, μ 是重整化的减除点. 对于插入 AB 和 O_i 的 n 点 Green 函数, 可以得到

$$\mathit{\Gamma}_{AB}^{(n)} \approx \sum_i C_i(x,g,\mu)\,\mathit{\Gamma}_{O_i}^{(n)} \tag{11-245}$$

其中

$$\mathit{\Gamma}_{AB}^{(n)} = \left\langle 0 \left| T\left(A(x)\,B(0)\prod_{k=1}^{n}\phi_k(y_k)\right)\right| 0 \right\rangle \tag{11-246}$$

$$\mathit{\Gamma}_{O_i}^{(n)} = \left\langle 0 \left| T\left(O_i(0)\prod_{k=1}^{n}\phi_k(y_k)\right)\right| 0 \right\rangle \tag{11-247}$$

Green 函数分别满足如下重整化群方程

$$\left[D + \sum_k \gamma_k(g) - \gamma_A(g) - \gamma_B(g)\right]\mathit{\Gamma}_{AB}^{(n)}(g,\mu) = 0 \tag{11-248}$$

$$\left[D + \sum_k \gamma_k(g) - \gamma_i(g)\right]\mathit{\Gamma}_{O_i}^{(n)}(g,\mu) = 0 \tag{11-249}$$

其中

$$D = \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} \tag{11-250}$$

$\gamma_A, \gamma_B, \gamma_i$ 分别是算符 A, B 和 O_i 的反常量纲 (anomalous dimension). 对比上面这些方程, 得到

$$\left[D + \gamma_A(g) + \gamma_B(g) - \gamma_i(g)\right]C_i(x,g,\mu) = 0 \tag{11-251}$$

上式的解是

$$\begin{aligned}&C_i\left(\mathrm{e}^{-t}x_0, g, \mu\right)\\&= \mathrm{e}^{t(d_A+d_B-d_i)}\exp\left\{\int_0^t \left[\gamma_A(\bar g(t')) + \gamma_B(\bar g(t')) - \gamma_i(\bar g(t'))\right]\right\}C_i(x_0,g,\mu)\end{aligned} \tag{11-252}$$

其中, d_A, d_B 和 d_i 是 A, B 和 O_i 的简单量纲 (naive dimension). 同样地, Wilson 系数 $\tilde C_i\left(q^2, g, \mu\right)$ 的 Fourier 变换也满足类似的方程和解. 在深度非弹性碰撞中, 需要把光锥展开写成无穷多个定域算符的和. 在这些求和项中, 自旋 n 会越来越大, 而 Wilson 系数 $\tilde C_i\left(q^2, g, \mu\right)$ 通过式 (11-246) 可以写成结构函数的积分

$$\begin{aligned}M_n\left(Q^2\right) &= \int_0^1 \mathrm{d}x\,(x)^{n-2}\,F_2\left(x,Q^2\right) \approx \frac{1}{8}\sum_i \tilde C_i^n\left(Q^2,g,\mu\right)O_i^n\\&= \frac{1}{8}\sum_i \tilde C_i^n\left(Q_0^2,\bar g(t),\mu\right)\exp\left[-\int_0^t \gamma_n^i(\bar g(t'))\mathrm{d}t'\right]O_i^n\end{aligned}$$

其中, γ_n^i 是算符 $O_{\mu_1\cdots\mu_j}^{(n;i)}$ 的反常量纲. 这就是对结构函数的积分做重整化分析的主要结果. Wilson 系数 $\tilde{C}_i^n$ 和反常量纲 γ_n^i 可以用 QCD 计算出来 (详细的计算参照 Cheng 和 Li 的“Gauge Theory of Elementary Physics”).

11.4.4 附录: 色散关系

本部分对色散关系 (dispersion relation) 作一个简单的说明. 色散关系是指将一个复变量的函数值用其在边界上的不连续性 (discontinuity) 的积分表示出来.

考虑复变函数 $f(z)$, 假设它除了沿实轴正方向从 0 到 $+\infty$ 的边界之外都是解析的. 首先, 假定当 $|z|\to\infty$ 时, 有 $|f(z)|\to 0$. 由此, 根据 Cauchy 定理, 可以写出

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z')}{z'-z}\mathrm{d}z' \tag{11-253}$$

其中积分区域从实轴正方向的边界上开始, 以原点为中心逆时针画圆到实轴正方向的边界下 (图 11-12). 容易看出这个积分可以写成

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\int_0^\infty\frac{f(x+\mathrm{i}\varepsilon)}{x-z}\mathrm{d}x+\int_\infty^0\frac{f(x-\mathrm{i}\varepsilon)}{x-z}\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^\infty\frac{[f(x+\mathrm{i}\varepsilon)-f(x-\mathrm{i}\varepsilon)]}{x-z}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{Dis}f(x+\mathrm{i}\varepsilon)}{x-z}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{Dis}f(x)=[f(x+\mathrm{i}\varepsilon)-f(x-\mathrm{i}\varepsilon)],\quad x>0 \tag{11-254}$$

是函数 $f(x)$ 在边界上的不连续性 (discontinuity). 注意, 无限远处的积分为 0. 因为当 $|z|\to\infty$ 时, $|f(z)|\to 0$. 此外, 如果 $f(z)$ 满足 Schwarz 反射原理

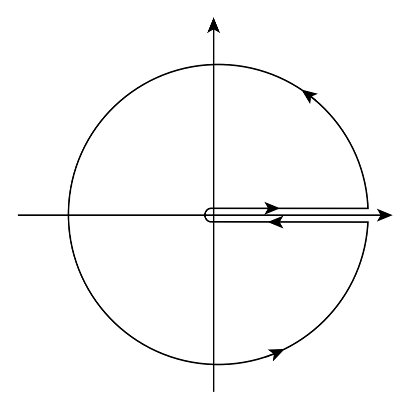


图 11-12 积分围道

$$f\left(z^{*}\right)=f^{*}\left(z\right) \tag{11-255}$$

则有

$$\mathrm{Dis}f(x)=\left[f\left(x+\mathrm{i}\varepsilon\right)-f^{*}\left(x+\mathrm{i}\varepsilon\right)\right]=2\mathrm{i}\mathrm{Im}f\left(x+\mathrm{i}\varepsilon\right) \tag{11-256}$$

且

$$f\left(z\right)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}f\left(x+\mathrm{i}\varepsilon\right)}{x-z}\mathrm{d}x \tag{11-257}$$

这就是一种色散关系. 也就是说, 复变函数 $f(z)$ 在任意一点的值都可以写成它的不连续性的积分.

现在来研究不同的渐近行为的情况, 例如, 当 $|z|\to\infty$ 时 $|f(z)|$ 趋于常数的情况. 可以对函数 $g(z)=\dfrac{f(z)-f(0)}{z}$ 重复同样的推导过程以得到类似的结果, 因为当 $|z|\to\infty$ 时, $|g(z)|\to 0$：

$$g\left(z\right)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}g\left(x+\mathrm{i}\varepsilon\right)}{x-z}\mathrm{d}x \tag{11-258}$$

对于 $f(z)$ 可以得到

$$\frac{f\left(z\right)-f\left(0\right)}{z}=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x\left(x-z\right)}\left[\mathrm{Im}f\left(x+\mathrm{i}\varepsilon\right)-\mathrm{Im}f\left(0\right)\right]\mathrm{d}x \tag{11-259}$$

或者

$$f\left(z\right)=f\left(0\right)+z\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x\left(x-z\right)}\left[\mathrm{Im}f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x \tag{11-260}$$

其中令 $\mathrm{Im}f(0)=0$. 注意到令式 (11-257) 中 $z=0$ 将得到

$$f\left(0\right)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}f\left(x+\mathrm{i}\varepsilon\right)}{x}\mathrm{d}x \tag{11-261}$$

将此式从式 (11-257) 中分离出来, 同样可以得到式 (11-260). 注意式 (11-260) 中, 随着 $|z|\to\infty$, $|f\left(z\right)|\to$ 常数时, 积分收敛. 这被称为单次分离的色散关系 (once subtracted dispersion relation). 换言之, 通过分离 (subtraction), 可以令一些积分变得收敛, 从而可以计算一些在 $|z|\to\infty$ 时发散的函数. 因此, 对一个 $|z|\to\infty$ 时行为变差的函数, 可以利用分离得到一个收敛的色散关系. 例如, 从式 (11-260) 可以计算 $z=0$ 的斜率

$$f'(0)=\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}f\left(x+\mathrm{i}\varepsilon\right)}{x^{2}}\mathrm{d}x \tag{11-262}$$

如果从式 (11-260) 分离出 $zf'(0)$, 则结果变成

$$f(z)-zf'(0)=f(0)+z\int_0^\infty\left[\frac{1}{x(x-z)}-\frac{1}{x^2}\right]\mathrm{Im}f(x)\mathrm{d}x \tag{11-263}$$

或

$$f(z)=f(0)+zf'(0)+z^2\int_0^\infty\left[\frac{1}{x^2(x-z)}\right]\mathrm{Im}f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11-264}$$

上式是二次分离的色散关系, 适用于随着 $|z|\to\infty$, $|f(z)|\sim|z|$ 的函数. 由此我们可以想象, 更加普适的色散关系将有如下的形式

$$f(z)=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+z^N\int_0^\infty\left[\frac{1}{x^N(x-z)}\right]\mathrm{Im}f(x)\mathrm{d}x \tag{11-265}$$

参 考 文 献

[1] E. Noether, Kgl. Ges. d. Wiss. Nachrichten, Math.-phys Klasse, Gottingen, p.235 (1918).

[2] Dirac, P. A. M. (1930) Proc. Roy. Soc. (London) A126, 360.

[3] Lehman, H., Symanzik, K. and Zimmerman, W. (1955). Nuovo Cimento 1, 205.

[4] J. C. Ward, Phys. Rev. 78, 1824, (1950).

[5] R. P. Feynman, Phys. Rev. 74, 939, 1430 (1948), J. Schwinger , Phys. Rev. 73, 416 (1948), 75, 898 (1949), S. Tomonaga, Phys. Rev. 74, 224 (1948), F. J. Dyson, Phys. Rev. 75, 486 (1949).

[6] G. t' Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. B44, 189, (1972), C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, Phys. Lett. 40B, 566, (1972), J. F. Ashmore, Nuovo Cimento Lett. 4, 289, (1972), G. M. Cicuta and Mortaldi, Nuovo Cimento Lett. 4, 329, (1972).

[7] Bogoliubov, N. N. and Parasiuk, O. S. (1957), Acta. Math. 97, 227; Hepp, K. Comm. Math. Phys. 2, 301.

[8] S. Weinberg, Phys. Rev. 118, 838, (1960).

[9] C. Itzykson, and J.-B. Zuber, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill, New York, (1980). N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, "Introduction to Theories of Quantized Fields" (3rd edition) Wiley-Interscience, New York, (1980). M. E. Peskin and D. Schroeder, "An Introduction to Quantum Field Theory", Addison-Wiley, New York, 1995. S. Weinberg, " The Quantum Theory of Fields" Vol, 1, 2, and 3, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[10] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B35, 173, (1971).

[11] C. G. Callan, Phys. Rev. D2, 1541, (1970), K. Szymanzik, Comm. Math. Phys. 18, 227, (1970).

[12] C. N. Yang and R. Mills, Phys. Rev. 96, 191, (1954).

[13] Faddeev, L. D. and Popov, V. N. (1967). Phys. Lett. 25B, 29.

[14] For a simple discussion see K. Gottfried and Tung-Mow Yan, "Quantum Mechanics: Fundamentals", second edition, Springer, (2003).

[15] Y. Nambu, Phys. Rev. 117, 648 (1960).

[16] J. Goldstone, Nuovo Cimento 19, 154 (1961).

[17] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, Phys. Rev. 127, 965 (1962).

[18] Y. Nambu, Phy. Rev. Lett. 4, 380 (1960).

[19] P. W. Higgs, Phys. Lett., 12 132 (1964), Phys. Rev. Lett., 13 508 (1964).

[20] F. Englert and R. Barout, Phy. Rev. Lett. 13, 321 (1964).

[21] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. Kibble, Phys. Rev. Lett. 13, 585 (1964).

[22] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 27, 1264 (1967).

[23] A. Salam, In Elementary Particle Theory Proceedings of the 8th Nobel Symposium , edited by N. Svartholm(Almqvist and Wiksell, Stockholm).

[24] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B33, 173 (1971), Nucl. Phys. B35, 167 (1971).

[25] See for example, Ta-Pei Cheng, and Ling-Fong Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, (1984).

[26] V. L. Ginzburg and L. D. Landau (1950), J. Expl. Theoret. Phys. USSR 20, 1064.

[27] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. 106, 162 (1957).

[28] Y. Nambu and G. Jona-Lasino, Phys. Rev. 122, 345 (1961).

[29] N. Bogoliubov. J. Phys. USSR 11, 23 (1947).

[30] L. D. Landau, J. Phys. USSR 5, 71 (1941).

[31] Fermi, E. Nouvo Cimento 11, 1, (1934), Z. Phys 88, 161, (1934).

[32] Lee, T. D.; Yang, C. N. (1956). Phys. Rev. 104.
[33] Wu, C. S.; Ambler, E; Hayward, R. W.; Hoppes, D. D.; Hudson, R. P. (1957).Phys. Rev. 105: 1413.Garwin, R. L.; Lederman, L. M.; Weinrich, M. (1957). Phys. Rev. 105 1415.
[34] Feynman, R and M. Gell-mann (1958), Phys. Rev. 109, 193; Sudarshan, E. C. G. and Marshak, R. E. (1958).
[35] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. 10, 531 (1963).
[36] S. Glashow, Nucl. Phys. 22, 579 (1961).
[37] Geogi, H. and Glashow, S. L. (1972), Phys. Rev. Lett. 28, 1494.
[38] Levin, D. and G. Tiktopoulos, Phys. Rev. D12, 420, (1975).
[39] Glashow,S. L., J. Iliopoulos, and L. Maiani, (1970) Phys. Rev. D2, 1285.
[40] M. Kobayashi and K. Maskawa, Progr. Theor. Phys. 49, 652 (1973).
[41] Pontecorvo, B(1958). Sov.Phys. JETP 6, 429, 26, 984, (1968).
[42] M. Gell-mann, Phys. Rev. 92, 833 (1953), Nishijima, K. and Nakano, Prog. theor. Phys. 10, 581(1953).
[43] M. Gell-Mann, Phys. Rev. 125 1067 (1961);Y. Ne'eman, Nucl. Phys. 26 222 (1961); M. Gell-Mann and Y. Ne'eman, The Eightfold Way, W.A. Benjamin, New York.
[44] V. Barnes, et al, Phys. Rev. Lett. 12, 204, (1964).
[45] M. Gell-Mann, Phys. Lett. 8 214. (1964); G. Zweig, Cern-reports TH-8182/TH 401.
[46] M. Gell-Mann, The Eightfoldway (1961), S. Okubo, Prog. Theor. Phys. 27 (1962) 949.
[47] G. Zweig, Cern-reports TH-8419/TH 412.
[48] J.D. Bjorken, Phys. Rev. 179 (1969) 1547.
[49] Feynman, R. P. (1969). in "High Energy Collisions: Third International Conference at Stony Brook", N.Y. Gordon & Breach. pp. 237–249. ISBN 978-0-677-13950-0. Bjorken, J.; Paschos, E. (1969). Phys. Rev. 185.
[50] Callan, C. G. and D. Gross, Phys. Rev. Lett. 22, 156 (1969).
[51] K.G. Wilson, (1969) Phys. Rev. 179 1499; (1974) D10 2445.
[52] H.D. Politzer,(1973) Phys. Rev. Lett. 30, 157; D.J. Gross and F. Wilczek, (1973) Phys. Rev. Lett. 30 1343.
[53] For QCD reviews, see, H.D. Politzer, (1974) Phys. Rep. 14 C 129; W. Marciano and H. Pagels, (1978) Phys. Rep. 36 C 137.

参 考 书 目

我们在这里列出了一些相关主题的参考书目。显然这不是一个完整的目录，难以避免会有些重要的贡献被遗漏掉，对此深表歉意。不过我们还是希望这样的一份非正式的指南可以帮助到想要更进一步了解相关主题的读者.

基础知识

1. Goldstein, H. (1980). Classical Mechanics (2nd edition). Addison-Wesley, Reading, Masschussetts.
2. Fetter, A. and Waleckka, J. (1980). Theoreticl Mechanics of Particle and Contiua. McGraw-Hill, New York.
3. Jackson, J. (1998). Classical Electrodynamics (3rd edition). Wiley, New York.
4. Sakurai, J. and Napolitano, J. (2010). Modern Quantum Mechanics. Addison-Wesley, Reading, Masschussetts.
5. Landau, L. and Lifshitz, E. (1975). Classical Theory of Fields (4th edition). Pergamon, Oxford.
6. Zangwill, A. (2012). Modern Electrodynamics. Cambridge University Press, New York.
7. Griffiths, D. (2004). Introduction to Quantum Mechanics (2nd edition). Pearson Prentice Hall.
8. Shankar, R. (2008). Principle of Quantum Mechanics (2nd edition). Plenum Press.
9. Townsend, J. (2012). Modern Approach to Quantum Mechanics (2nd edition). University Science Books.
10. Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. and Laloe, F. Quantum Mechanics. Vol 1&2, Wiley-VCH.
11. Weinberg, S. (2012). Lectures on Quatum Mechaincs. Cambridge University Press, New York.
12. Merzbacher, E. (1997). Quantum Mechanics (3rd edition). Wiley.
13. Liboff, R. (2002). Introductory Quantum Mechanics (4th edition). Addison-Wesley.
14. Holstein, B. (2014). Topics in Advanced Quantum Mechanics. Dover Books.

15. Landau, L. and Lifshitz, E. (1976). Quantum Mechanics : Non-relativistic Theory (3rd edition). Butterworth-Heinemann.
16. Gottfried, K. and Yan, T. (2004). Quantum Mechanics: Fundamentals (2nd edition). Springer.
17. Ballentine, L. (1998). Quantum Mechanics: A Modern Development. World Scientific. Singapore.
18. Robinett, R. (2006). Quantum Mechanics : Classical Results, Modern Systems and Visualized Examples (2nd edition). Oxford University Press.

粒子物理

1. Gasiorowicz, S. (1966). Elementary particle physics. Wiley, New York.
2. Frazer, W. R. (1966). Elementary particle physics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs,
3. Close, F. (1979). An Introduction to Quarks and Partons Academic Press, New York.
4. Lee, T. D. (1981). Particle physics and introduction to field theory. Harwood, New York.
5. Perkins, D. H. (1982). Introduction to high energy physics (2nd edn). Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
6. Okun, L. (1982). Quarks and Leptons. Elsevier Science Publisher.
7. Commins, E. and Bucksbaum, P. (1983). Weak interactions of Leptons and Quarks. Cambridge University Press, Cambridge.
8. Halzen, F. and Martin, A. (1984). Quarks and Leptons: An Introduction Course in Modern Particle Physics. Wiley, New York.
9. Perkins, D. (1987). Introduction to High Energy Physics (3rd edition). Addison-Wesley, Menlo Park, California.
10. Nachtmann, O. (1990). Elementaty Particle Physics. Springer-Verlag.
11. Smith, J. (1996). Introduction to Special Relativity. Dover, New York.
12. Martin, B. and Shaw, G. (2008). Particle Physics 3rd ed. Wiley.
13. Griffiths, D. (2008). Introduction to Elementary Particles. Wiley -VCR, second edition.
14. Georgi, H. (2009). Weak Interactions and Modern Particle Theory. Dover Books.
15. Tully, C. (2011). Elementaty Particle Physics in a Nutshell. Princeton University Press, Princeton.

量子场论

1. Bjorken, J. D. and Drell, S. D. (1964). Relativistic Quantum Mechanics. McGraw-Hill, New York.
2. Bjorken, J. D. and Drell, S. D. (1965). Relativistic Quantum Fields. McGraw-Hill, New York.
3. Itzykson, C. and Zuber, J. (1980). Quantum Field Theory. MeGraw- Hill, New York.
4. Lee, T. D. (1981). Particle physics and introduction to field theory. Harwood, New York.
5. Bogoliubov, N. and Shirkov,D. (1982). Quantum Fields. Benjamin-Cummings, New York.
6. Ryder, L. (1985). Quantum Field Theory. Cambridge University Press, New York.
7. Ramond, P. (1989). Field theory: a modern primer (2nd edition). Addison-Wesley, Massachusetts.
8. Brown, L. (1992). Quantum Field Theory. Cambridge University Press, New York.
9. Sterman, G. (1993). Introduction to Quantum Field Theory. Cambridge University Press, New York.
10. Kaku, M. (1993). Quantum Field Theory: A modern Introduction. Oxford University Press, New York.
11. Mandl, F. and Shaw, G. (1993). Quantum Field Theory (revised edition). Wiely, New York.
12. Peskin, M. and Schroeder, D. (1995). Quantum Field Theory. Addison-Wesley.
13. Lahiri, A. and Pal P. (2004). A First Book of Quantum Field Theory. 2nd ed Alpha Science.
14. Weinberg, S. (2005). Quantum Field Theory. Volume 1, Cambridge University Press.
15. Srednicki, M. (2007). Quantum Field Theory. Cambridge University Press.
16. Bank, T. (2008). Modern Quantum Field Theory : A Concise Introduction. Cambridge University Press, New York.
17. Zee, A. (2010). Quantum Field Theory in a Nutshell (2nd edition). Princeton University Press, Princeton.
18. Huang, K. (2010). Quantum Field Theory : From Operator to Path Integrals.

Addison-Wesley.

19. Alvarez-Gaume, L. and Vazqure-Mozo, M. (2012). An Invitation to Quantum Field Theory. Springer.

Feynman 路径积分

1. Feynman, R. P. and Hibbs, A. R. (1965). Quantum mechamcs and path mtegrals. McGraw-Hill, New York.
2. Faddeev, L. and Slavnov, A. A. (1980). Gauge fields, introduction to quantum theory. Benjamin Cummings, Reading, Massachusetts.
3. Ramond, P. (1990). Field theory:a modern primer. Benjamin Cummings, Reading, Massachusetts.
4. Marinov, M. S. (1980). Path integrals in quantum theory-an outlook of basic concepts. Phys. Rep. 60C, 1.

规范理论

1. Taylor, J. (1976). Gauge Theory of Weak Interactions. Cambridge University Press, Cambridge.
2. Itzykson, C. and Zuber, J.B. (1980). Quantum field theory. McGraw-Hill, New York.
3. Lee, T. D. (1981). Particle physics and introduction to field theory. Harwood, New York.
4. Cheng, T. and Li, L. (1984). Gauge Theory of Elementary Particle Physics. Oxford University Press, New York.
5. Pokorski, S. (1987), Gauge Field Theory. Cambridge University Press, New York.
6. O'Raifeartaigh, L. (1988). The Group Structure of Gauge Theories. Cambridge University Press, Cambridge.
7. Faddeev, L. and Slavnov, A. Gauge Fields, Introduction to Quantum Theory. (2nd edition), Addison-Wesley
8. Bailin, D. and Love, A. (1993). Introduction to Gauge Field Theory (revised edition). Institute of Physics Publishing, Bristol.
9. Leader, E. and Predazzi, E. (1996). An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics. Vol 1, Cambridge University Press, New York.
10. O'Raifeartaigh, L. (1997). The Dawning of Gauge Theory. Princeton University Press, Princeton.
11. Guidry, M. (1999). Gauge Field Theories: An Introduction with Application.

Wiley-VCH.

12. Fujikawa, K.
13. Weinberg, S. (2005). Quantum Field Theory. Volume 2, Cambridge University Press.
14. Frampton, P. (2008). Gauge Field Theories (3rd edition). Wiley-VCH.
15. Aitchison, I. J. R. and Hey, A. J. G. (2012). Gauge theories in particle physics (4th edition). Hilger, Bristol.
16. Quigg, C. (2013). Guage Theory of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions (2nd edition). Princeton University Press, Princeton.

量子色动力学

1. Marciano, W. and Pagels, H. (1978). Quantum chromodynamics. Phys. Rep. 36C, 137.
2. Buras, A. J. (1980). Asymptotic f1eedom in deep inelastic processes in the leading order and beyond. Rev. mod. Phys. 52, 199.
3. Dokshitzer, Yu. L., Dyakonov, D. L. and Troyan, S. I. (1980). Hard processes in quantum chromodynamics. Phys. Rep. 58C, 269.
4. Muller, A. H. (1981). Perturbative QCD at high energies. Phys. Rep. 73C, 237.
5. Wilczek, F. (1982). Quantum chromodynamics: the modern theory of the strong interaction. Ann. Rev. Nucl. and Part. Sci. 32, 177.
6. Muta, T. (1998). Foundation of Quantum Chromodynamics. World Scientific

电弱相互作用的标准模型

1. Taylors, J. C. (1976). Gauge theories of weak interactions. Cambridge University Press, Cambridge.
2. Commins, E. and Bucksbaum, P. H. (1983). Weak interactions of leptons and quarks. Cambridge University Press, Cambridge.
3. Donoghue, J., Golowich, E. and Holstein, B. (1992). Dynamics of the Standard Model. Cambridge University Press, Cambridge.
4. Abers, E. and Lee, B. W. (1973). Gauge Theories. Phys. Rep. 9C, 1.
5. Beg, M. A. B. and Sirlin, A. (1974). Gauge theories of weak interactions. Ann. Rev. Nucl. Sci. 24, 379.
6. Langacker, P. (2009). Standard Model and Beyond. CRC press.

附录：群论

1. 群的基本概念

群 G 是由一些元素 $(a,b,c,\ldots)$ 构成的集合和它们间的运算 $*$ 组成, 并满足下列性质.

(1) 封闭性：如果 $a,b\in G$, 则 $c=a*b$ 也在 G 中;

(2) 结合律：$a*(b*c)=(a*b)*c$;

(3) 恒元 (单位元)：G 中存在元素 e, 满足 $a*e=e*a=a$, $\forall\, a\in G$;

(4) 逆元：$\forall\, a\in G$, 存在元素 a^{-1} 满足 $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$.

为方便起见我们用 ab 表示群运算 $a*b$.

我们在物理中经常会遇到的群有：

(1) **Abel 群**—— 群元素的乘积对易, 即 $ab=ba$, $\forall\, a,b\in G$.

例如：n 阶循环群 Z_n, 群元素为 $a,a^2,a^3,\cdots,a^n=E$

(2) **正交群**——$n\times n$ 的正交矩阵群：$RR^{\mathrm{T}}=R^{\mathrm{T}}R=1$, 其中 R 是 $n\times n$ 的矩阵.

例如, 表示二维旋转的矩阵 $R(\theta)$ 就组成了一个正交群：

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{A-1}$$

(3) **幺正群**——$n\times n$ 的幺正矩阵群：$UU^{\dagger}=U^{\dagger}U=1$.

重排定理　考虑群 $\{E,A_2,A_3,\cdots,A_h\}$. 左乘任意群元素 A_k 得到 A_kE, A_kA_2, $A_kA_3,\cdots,A_kA_h$, 那么这些元素各自不同.

证明　假设其中某两个元素相同, 比如 $A_kA_i=A_kA_j$, 其中 $A_i\neq A_j$. 左乘 A_k^{-1} 可得 $A_i=A_j$, 矛盾. 因此这些元素全不相同. 这个新的集合刚好有 h 元素, 并且由封闭性, 这个集合一定与原群相同, 因此每个元素恰好出现一次. 或者说, 以某群元素乘该群得到的集合只是原群的重新排列, 这就是称之为**重排定理**的原因.

如果将群元素的某函数对群元素求和, 那么根据重排定理可得

$$\sum_{A_i}f(A_i)=\sum_{A_i}f(A_iA_k),\quad \forall\, A_k\in G \tag{A-2}$$

这个结果在有限群表示中很重要, 并且我们还希望能够将这个结果在一定条件下推广到连续群.

1) 群的表示

在物理应用中, 群的表示是最重要的结构, 可以用来描述物理系统对称性的内涵. 一般来说, 一个群的表示就是用某种方法 (通常比群本身容易掌握) 来实现相同的群运算. 其中大多数物理应用最感兴趣的是用矩阵来实现, 矩阵乘积表示群乘积. 矩阵也与线性算子作用到向量空间相关.

群表示的定义 给定群 $G=\{A_1,A_2,\cdots\}$, 如果对每个 $A_i\in G$ 都有一个对应的 $n\times n$ 矩阵 $D(A_i)$, 并且它们能够保持群的乘积法则, 即

$$D(A_i)\,D(A_j)=D(A_iA_j),\quad \forall\, A_i,A_j\in G \tag{A-3}$$

那么 $D(G)$ 就构成了群 G 的一个 n 维表示. 换句话说, $A_i\to D(A_i)$ 的对应关系是同态 (homomorphism) 映射. 式 (A-3) 说明矩阵 $D(A_i)$ 和群元素满足相同的乘法律.

如果 $D^{(1)}(A)$ 和 $D^{(2)}(A)$ 都是群的表示, 则

$$D^{(3)}(A)=\begin{pmatrix} D^{(1)}(A) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(A)\end{pmatrix}\quad (\text{分块对角形式}) \tag{A-4}$$

也构成群的表示. 我们用直和 $\oplus$ 来表示

$$D^{(3)}(A)=D^{(1)}(A)\oplus D^{(2)}(A) \tag{A-5}$$

如果 $D^{(1)}(A)$ 和 $D^{(2)}(A)$ 表示维数相同, 并且相似, 即

$$D^{(1)}(A_i)=UD^{(2)}(A_i)\,U^{-1},\quad \forall\, A_i\in G, \tag{A-6}$$

则 $D^{(1)}$ 和 $D^{(2)}$ 称为**等价表示**. 我们知道相似矩阵是同一个线性算子在不同基下的表示, 因此我们认为这两个表示是等价的.

可约和不可约表示

表示 D 如果定义在一个有非平庸不变子空间的线性空间 $V(D)$ 上, 那么 D 就是一个**可约 (reducible) 表示**, 反之就是**不可约 (irreducible) 表示**. 这个定义实质上是说对一个可约表示, 群元素对应的线性算子会使某些子空间不变, 那么所有的群操作可以在这个子空间上实现.

我们将这个抽象的定义进一步阐释. 假设表示 D 在向量空间 V 上可约, 则存在子空间 S 在 D 下不变. 任意向量 $v\in V$ 可分解为

$$v=s+s_{\perp} \tag{A-7}$$

其中 $s\in S$, $s_{\perp}$ 属于 S 的补空间 $S_{\perp}$. 将 v 写成分块的形式

$$v=\begin{pmatrix} s \\ s_{\perp} \end{pmatrix} \tag{A-8}$$

则表示矩阵可写为

$$Av=D(A)v=\begin{pmatrix} D_1(A) & D_2(A) \\ D_3(A) & D_4(A) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ s_{\perp} \end{pmatrix} \tag{A-9}$$

空间 S 在群运算下不变, 说明

$$D_3(A_i)=0, \quad \forall A_i \in G \tag{A-10}$$

因此矩阵 $D(A_i)$ 为上三角形式

$$D(A_i)=\begin{pmatrix} D_1(A_i) & D_2(A_i) \\ 0 & D_4(A_i) \end{pmatrix}, \quad \forall A_i \in G \tag{A-11}$$

上三角矩阵相乘仍为上三角矩阵

$$D=\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & D_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1' & D_2' \\ 0 & D_4' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1D_1' & D_1D_2'+D_2D_4' \\ 0 & D_4D_4' \end{pmatrix} \tag{A-12}$$

因此不变子空间不管经过多少次运算仍是不变子空间.

一个表示称为**完全可约**, 如果所有矩阵 $D(A_i)$ 可以被同一个相似变换分块对角化

$$UD(A_i)U^{-1}=\begin{pmatrix} D_1(A_i) & 0 \\ 0 & D_2(A_i) \end{pmatrix}, \quad \forall\ A_i \in G \tag{A-13}$$

也就是说式 (A-11) 中的 $D_2(A_i)=0$, 则 S 的补空间也是不变子空间. 表示矩阵为幺正矩阵就属于这种情况.

定理 任意**幺正的**可约表示一定完全可约.

证明 为简单起见, 假设向量空间 V 定义有内积 (u,v), 则可以定义 S 的正交补 $S_{\perp}$：

$$(u,v)=0, \quad 如果\ u\in S, v\in S_{\perp} \tag{A-14}$$

内积在幺正变换下不变

$$0=(u,v)=(D(A_i)u, D(A_i)v) \tag{A-15}$$

因此, 如果 $D(A_i)u\in S$, 则 $D(A_i)v\in S_{\perp}$, 说明 $S_{\perp}$ 在群运算下不变.

幺正表示

因为幺正算子保持了向量空间的内积, 所以幺正表示可以简化对群的分析. 每一个有限群的表示都可以变换为幺正表示, 这就是下面的定理.

基本定理 有限群的每一个表示都等价于幺正表示.

证明 设 $D(A_r)$ 为 $G=\{E, A_2 \cdots A_n\}$ 的表示. 考虑

$$H=\sum_{r=1}^{n} D(A_r) D^{\dagger}(A_r), \quad \text{则} H^{\dagger}=H \tag{A-16}$$

由于 H 半正定, 可以定义其平方根 h 为

$$h^2=H, \quad h^{\dagger}=h \tag{A-17}$$

这可以由相似变换对角化 H 并对特征值取平方根再由相似变化变回原来的基来实现. 定义新矩阵

$$\bar{D}(A_r)=h^{-1} D(A_r) h, \quad r=1,2, \cdots, n \tag{A-18}$$

由于为相似变换, $\bar{D}(A_r)$ 为 $D(A_r)$ 的等价表示. 下面说明 $\bar{D}(A_r)$ 是幺正的.

$$\begin{aligned}
\bar{D}(A_r) \bar{D}^{\dagger}(A_r) &= \left[h^{-1} D(A_r) h\right]\left[h D^{\dagger}(A_r) h^{-1}\right] \\
&= h^{-1} D(A_r) \sum_{s=1}^{n}\left[D(A_S) D^{\dagger}(A_S)\right] D^{\dagger}(A_r) h^{-1} \\
&= h^{-1}\left[\sum_{s=1}^{n} D(A_r A_s) D^{\dagger}(A_r A_s)\right] h^{-1} \\
&= h^{-1} \sum_{s'=1}^{n} D(A_{S'}) D^{\dagger}(A_{s'}) h^{-1}=h^{-1} h^2 h^{-1}=1
\end{aligned}$$

其中利用了重排定理. 既然有限群的每一个表示都等价于幺正表示, 因而在物理中通常处理幺正表示, 因为它们是完全可约的.

2) Schur 引理

在不可约表示的研究中最重要的定理就是 Schur 引理, 具体内容如下.

(1) 如果一个矩阵与不可约表示的所有矩阵对易, 它一定是单位阵乘以某常数.

证明 假设存在 M, 使得

$$M D(A_r)=D(A_r) M, \quad \forall A_r \in G \tag{A-19}$$

厄米共轭为

$$D^{\dagger}(A_r) M^{\dagger}=M^{\dagger} D^{\dagger}(A_r) \tag{A-20}$$

如前文所述, $D(A_r)$ 可取为幺正

$$M^\dagger = D(A_r) M^\dagger D^\dagger(A_r) \quad 或 \quad M^\dagger D(A_r) = D(A_r) M^\dagger \tag{A-21}$$

则 $M^\dagger$ 也与所有 D 对易, 组成的共轭矩阵 $M+M^\dagger$ 和 $\mathrm{i}\left(M-M^\dagger\right)$ 也是, 因此只需考虑 M 是厄米矩阵的情况. 对角化 M

$$M = UdU^\dagger, \quad d为对角矩阵 \tag{A-22}$$

定义 $\bar{D}(A_r) = U^\dagger D(A_r) U$, 则

$$d\bar{D}(A_r) = \bar{D}(A_r) d \tag{A-23}$$

或

$$\sum_\beta d_{\alpha\beta} \bar{D}_{\beta r}(A_s) = \sum_\beta \bar{D}_{\alpha\beta}(A_s) d_{\beta\gamma} \tag{A-24}$$

由于 d 为对角阵

$$(d_{\alpha\alpha} - d_{\gamma\gamma}) \bar{D}_{\alpha\gamma}(A_s) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 如果 \quad d_{\alpha\alpha} \neq d_{\gamma\gamma},\ 则 \bar{D}_{\alpha\gamma}(A_s) = 0 \tag{A-25}$$

这说明如果对角元 d_{ii} 全不相同, 则 $\bar{D}$ 的非对角元均为 0. 只有当某些 $d'_{\alpha\alpha}s$ 相等时, $\bar{D}$ 的非对角元不为 0. 例如, 如果 $d_{11} = d_{22}$, 则 $\bar{D}_{12}$ 可以非零. 因此 $\bar{D}$ 为块对角形式

$$如果 d = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & & & \\ & d_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & d_1 & & & & \\ & & & & d_2 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & d_2 & \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad 那么 \bar{D} = \begin{bmatrix} \boxed{D_1} & 0 & \\ 0 & \boxed{D_2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \tag{A-26}$$

这对表示中的每个矩阵都成立, 所有矩阵都为块对角矩阵. 但 D 是一个不可约表示, 这就矛盾了, 因此所有 d_i 都要相等.

$$d = cI, \quad 或 \quad M = UdU^\dagger = dUU^\dagger = d = cI \tag{A-27}$$

由上面这一条可以得出一些有用的结论：

① Abel 群的所有不可约表示都是一维表示. 因为任给元素 $A, D(A)$ 和 $D(A_i)$ 对易, 由 Schur 引理 $D(A) = cI, \quad \forall A \in G$. 但 D 是不可约表示, 因此 D 必为 1×1 矩阵.

② 在不可约表示中, 单位元 E 总是由单位矩阵表示. 根据定义, 有 $D(E)D(A_i) = D(A_i)D(E) = D(A_i)$, 所以 $D(E) = I$.

③ 由 $D(A)D(A^{-1}) = D(E) = I$ 可知 $D(A^{-1}) = [D(A)]^{-1}$; 对幺正表示 $D(A^{-1}) = D^{\dagger}(A)$.

(2) 如果和一个表示的所有矩阵都对易的矩阵只有单位阵乘上一个常数, 则这个表示是不可约表示.

证明 假设 D 可约, 则可以变换为

$$D(A_i) = \begin{bmatrix} D^{(1)}(A_i) & \\ & D^{(2)}(A_i) \end{bmatrix}, \quad \text{对所有} A_i \in G \tag{A-28}$$

构造 $M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 2I \end{bmatrix}$, 显然有

$$D(A_i)M = MD(A_i), \quad \text{对所有} i \tag{A-29}$$

但 M 不是单位阵乘常数, 矛盾. 因此 D 一定是不可约的.

(3) 如果 $D^{(1)}$ 和 $D^{(2)}$ 分别为 l_1 维和 l_2 维不可约表示, 且

$$MD^{(1)}(A_i) = D^{(2)}(A_i)M \tag{A-30}$$

那么, (a) 如果 $l_1 \neq l_2$, 则 $M = 0$; (b) 如果 $l_1 = l_2$, 则 $M = 0$, 或 $\det M \neq 0$, 即两表示等价.

证明 不失一般性, 取 $l_1 \leqslant l_2$. 取式 (A-30) 的厄米共轭得

$$D^{(1)\dagger}M^{\dagger} = M^{\dagger}D^{(2)\dagger} \tag{A-31}$$

则

$$MM^{\dagger}D^{(2)}(A_i)^{\dagger} = MD^{(1)}(A_i)^{\dagger}M^{\dagger} = D^{(2)}(A_i)^{\dagger}MM^{\dagger} \tag{A-32}$$

即

$$\left(MM^{\dagger}\right)D^{(2)}(A_i) = D^{(2)}(A_i)\left(MM^{\dagger}\right), \quad \forall (A_i) \in G \tag{A-33}$$

由 Schur 引理 (1) 有 $MM^{\dagger} = cI$, 其中 I 为 l_2 维单位矩阵.

① 首先考虑 $l_1 = l_2$ 的情况, 有 $|\det M|^2 = c^{l_1}$. 则要么 $\det M \neq 0$ 可逆, 有

$$D^{(1)}(A_i) = M^{-1}D^{(2)}(A_i)M, \quad \forall (A_i) \in G \tag{A-34}$$

即 $D^{(1)}(A_i)$ 和 $D^{(2)}(A_i)$ 等价; 要么不可逆, 有

$$\det M = 0 \Longrightarrow c = 0, \quad MM^{\dagger} = 0 \Longrightarrow \sum_{\gamma} M_{\alpha\gamma} M^{*}_{\beta\gamma} = 0, \quad \forall\, \alpha, \beta \tag{A-35}$$

特别地, 令 $\alpha = \beta$, 有 $\sum\limits_{\gamma} |M_{\alpha\gamma}|^2 = 0$, 因此对于任意的 α, γ 都有 $M_{\alpha\gamma} = 0$, 即 $M = 0$.

② 如果 $l_1 < l_2$, 则 M 为 $l_2 \times l_1$ 的长方阵:

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{l_1} l_2 \tag{A-36}$$

可以将 M 补成如下一个 $l_2 \times l_2$ 的方块矩阵

$$N = \overbrace{(M, 0)}^{l_2}\} l_2 \tag{A-37}$$

则

$$N^{\dagger} = \begin{pmatrix} M^{\dagger} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad NN^{\dagger} = (M, 0) \begin{pmatrix} M^{\dagger} \\ 0 \end{pmatrix} = MM^{\dagger} = cI \tag{A-38}$$

其中, I 为 $l_2 \times l_2$ 的单位矩阵. 而由构造可知 $\det N = 0$, 因此 $c = 0 \Longrightarrow NN^{\dagger} = 0$ 或 $M = 0$.

3) 大正交定理

有限群表示中最重要的定理是如下定理.

大正交定理 设 G 为一个 n 阶有限群 (有 n 个元素): $\{A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$. $D^{(\alpha)}(A_i)$ $(\alpha = 1, 2, \cdots)$ 为群 G 的 l_α 维不等价不可约表示, 则有

$$\sum_{\alpha=1}^{n} D^{(\alpha)}_{ij}(A_\alpha) D^{(\beta)*}_{k\ell}(A_\alpha) = \frac{n}{l_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} \delta_{j\ell} \tag{A-39}$$

证明 定义

$$M = \sum_{a} D^{(\alpha)}(A_a) X D^{(\beta)}\left(A_a^{-1}\right) \tag{A-40}$$

其中, X 为任意 $l_\alpha \times l_\beta$ 矩阵. 用 M 右乘表示矩阵有

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)}(A_b) M &= D^{(\alpha)}(A_b) \sum_{a} D^{(\alpha)}(A_a) X D^{(\beta)}\left(A_a^{-1}\right) \left[D^{(\beta)}\left(A_b^{-1}\right) D^{(\beta)}(A_b)\right] \\ &= \sum_{a} D^{(\alpha)}(A_b A_a) X D^{(\beta)}\left((A_b A_a)^{-1}\right) D^{(\beta)}(A_b) = M D^{(\beta)}(A_b) \end{aligned}$$

(1) 如果 $\alpha \neq \beta$, 则 $M = 0$(Schur 引理), 有

$$M = \sum_a D_{ir}^{(\alpha)}(A_a) X_{rs} D_{sk}^{(\beta)}\left(A_a^{-1}\right) = \sum_a D_{ir}^{(\alpha)}(A_a) X_{rs} D_{ks}^{(\beta)*}(A_a) = 0 \tag{A-41}$$

取 $X_{rs} = \delta_{rj}\delta_{sl}$(也就是说 X 除 jl 元素外为 0), 则有

$$\sum_a D_{ij}^{(\alpha)}(A_\alpha) D_{k\ell}^{(\beta)*}(A_\alpha) = 0 \tag{A-42}$$

这说明对不同的不可约表示, 矩阵元对群元素求和后彼此正交.

(2) 如果 $\alpha = \beta$, 则 $M = \sum\limits_a D^{(\alpha)}(A_a) X D^{(\alpha)}\left(A_a^{-1}\right)$. 这说明

$$D^{(\alpha)}(A_a) M = M D^{(\alpha)}(A_b) \quad \Longrightarrow \quad M = cI \tag{A-43}$$

从而

$$\sum_a T_r\left[D^{(\alpha)}(A_a) X D^{(\alpha)}\left(A_a^{-1}\right)\right] = cl_2 \quad \text{或} nT_rX = cl_2, \quad \text{或} c = \frac{(T_rX)\,n}{l_\alpha} \tag{A-44}$$

取 $X_{rs} = \delta_{rj}\delta_{s\ell}$ 则有 $T_rX = \delta_{j\ell}$ 以及

$$\sum_a D^{(\alpha)}(A_a)_{ij} D^{(\alpha)}(A_a)_{k\ell}^* = \frac{n}{l_\alpha}\delta_{ik}\delta_{j\ell} \tag{A-45}$$

这给出了给定不可约表示不同矩阵元的正交性.

4)　直积群

对于任意两个群 $G_1 = \{E, A_2, \cdots, A_n\}, G_2 = \{E, B_2, \cdots, B_m\}$, 如果群元素 A_i 和 B_j 对易, 则可以定义直积群 $G_1 \otimes G_2 = \{A_iB_j | A_i \in G_1,\ B_j \in G_2m\}$, 它的乘积法则是

$$(A_kB_\ell) * (A_{k'}B_{\ell'}) = (A_kB_{k'})(B_\ell B_{\ell'}) \tag{A-46}$$

$G_1 \otimes G_2$ 的不可约表示就是 G_1 和 G_2 不可约表示的直积. 设 $D^{(\alpha)}(A_i)$ 为 G_1 的不可约表示, $D^{(\beta)}(B_j)$ 为 G_2 的不可约表示, 那么 $G_1 \otimes G_2$ 的不可约表示就是

$$D^{(\alpha\times\beta)}(A_iB_j)_{ab,cd} \equiv D^{(\alpha)}(A_i)_{ac} D^{(\beta)}(B_j)_{bd} \tag{A-47}$$

它满足如下运算

$$\begin{aligned}
&\left[D^{(\alpha\times\beta)}(A_iB_j) D^{(\alpha\times\beta)}(A_kB_\ell)\right]_{ab,cd} \\
=&\sum_{e,f}\left[D^{(\alpha\times\beta)}(A_iB_j)\right]_{ab,ef}\left[D^{(\alpha\times\beta)}(A_kB_\ell)\right]_{ef,cd}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{e,f} \left[D^{(\alpha)}\left(A_i\right)_{ac} D^{(\alpha)}\left(A_k\right)_{ec} \right] \left[D^{(\beta)}\left(B_j\right)_{bf} D^{(\beta)}\left(B_e\right)_{fd} \right] \\
&= D^{(\alpha)}\left(A_i A_k\right)_{ac} D^{(\beta)}\left(B_j B_\ell\right)_{bd} \\
&= D^{(\alpha\times\beta)}\left(A_i A_k B_j B_\ell\right)_{ab,cd}
\end{aligned}
$$

2. 连续群

前面讨论的内容基本都是以有限群为例, 群中元素的个数是有限的. 如果一个群有无穷多个元素, 那么就称为**无限群**. 为了方便, 可以用一个或多个实参数 (群参数)来标记群元素

$$
A\left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\right), \quad \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \text{ 为群参数} \tag{A-48}
$$

由一组连续的参数来表示的群称为**连续群**. 如果群参数是在紧致集 (compact domain) 上变化, 那这个群就是一个**紧致群**(compact group). 例如, 三维空间旋转群是一个紧致群, 因为其群参数 (转动角度) 定义在闭区间 $[0, 2\pi]$ 上; 而 Lorentz 群则不是紧致群, 因为它有一个群参数 $\beta = v/c$ 定义在开区间 $[0, 1)$ 上.

例子：二维空间旋转群是一个单参数连续群, 同时也是一个紧致群. 它的一个表示是 $SO(2)$ 群 (由行列式为 1 的 2×2 的实正交矩阵构成). 群参数可以取为旋转角度 θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, 群元素表示为 $R(\theta)$, 群乘积为

$$
R\left(\theta_1\right) R\left(\theta_2\right) = R\left(\theta_1 + \theta_2\right) \tag{A-49}
$$

我们可以单位元上的点来表示群元素, 用角度标记. 这称为群参数空间.

1) 群上的积分

在有限群的理论中, 重排定理

$$
\sum_{i=1}^{n} f\left(A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(A_i B\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(B A_i\right), \quad B, A_i \in G \tag{A-50}
$$

对许多群表示的定理的证明都起着重要的作用. 对连续群, 对群元素求和可以推广为群上的积分, 定义在群参数空间上

$$
\int \mathrm{d}A \equiv \int W\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_n\right) \mathrm{d}\alpha_1 \cdots \mathrm{d}\alpha_n \tag{A-51}
$$

其中, $W\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_n\right)$ 为测度 (或权函数, measure). 为了能继续使用有限群的有用的结果, 我们想要定义一个合适的群上的积分 (或选择一个合适的测度 W) 使得重排定理依然成立. 这称为**群上的不变积分 (测度)**. 意思是说需要选择测度

$W(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 使得对任意群元素 B 和任意定义在群参数空间的连续函数 $u(A)\equiv u(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 满足

$$\int u(A)\,\mathrm{d}A=\int u(AB)\,\mathrm{d}A=\int u(BA)\,\mathrm{d}A \tag{A-52}$$

其中

$$\int u(A)\,\mathrm{d}A\equiv\int u(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\,W(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\,\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n \tag{A-53}$$

使用更简单的符号

$$A=A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=A(\boldsymbol{\alpha}),\quad B=A(\beta_1,\cdots,\beta_n)=A(\boldsymbol{\beta}) \tag{A-54}$$

则

$$BA=A(\boldsymbol{\beta})\,A(\boldsymbol{\alpha})=A(\boldsymbol{\gamma}) \tag{A-55}$$

其中

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}) \tag{A-56}$$

为群参数 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 的函数. 这些函数由群乘积决定, 包含了群结构的所有信息. 将积分写成

$$\mathrm{d}A=W(\boldsymbol{\alpha})\,\mathrm{d}^n\alpha=W(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\,\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n \tag{A-57}$$

$$\mathrm{d}(BA)=W(\boldsymbol{\gamma})\,\mathrm{d}^n\gamma=W(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\,\mathrm{d}\gamma_1\cdots\mathrm{d}\gamma_n \tag{A-58}$$

那么群不变测度应该有如下性质

$$\mathrm{d}A=\mathrm{d}(BA)\quad \text{或}\quad W(\boldsymbol{\alpha})\,\mathrm{d}^n\alpha=W(\boldsymbol{\gamma})\,\mathrm{d}^n\gamma \tag{A-59}$$

注意左乘 (右乘) 某个群元素 (如 B) 是一个到 G 本身的一一映射. 因此对某区域 V 中的一些元素, 在左乘 (右乘)B 时会移动到另一个区域 V'. 由于 V 中的元素数目与 V' 中相同, 有如下关系

$$\rho V=\rho' V' \tag{A-60}$$

其中, $\rho\,(\rho')$ 为 $V\,(V')$ 中的元素密度. 这说明如果将测度 $W(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 取为 $\boldsymbol{\alpha}$ 附近的群元素密度, 可以得到

$$W(\boldsymbol{\alpha})\,\mathrm{d}^n\alpha=W(\boldsymbol{\gamma})\,\mathrm{d}^n\gamma,\quad \boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}) \tag{A-61}$$

也就是说 $W(\boldsymbol{\alpha})$ 是一个群不变测度.

为了得到群元素密度 $W(\boldsymbol{\alpha})$, 考虑原点 (单位元)$I=A(0)$ 附近的无穷小体积元 $V_0=\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n$. 左乘 B 这个体积元移动到 V_1

$$W(\boldsymbol{\alpha})\,V_0=W(\boldsymbol{\gamma})\,V_1 \tag{A-62}$$

或

$$\frac{W(\boldsymbol{\alpha})}{W(\boldsymbol{\gamma})}=\frac{V_1}{V_0} \tag{A-63}$$

因此权函数的比值由体积元的比值确定. 将密度归一化使得 $W(\mathbf{0})=1$, 即密度在原点为 1. 取 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 有

$$W(\boldsymbol{\alpha})=W(\mathbf{0})=1 \quad 以及 \quad W(\boldsymbol{\gamma})=W(\boldsymbol{\beta}) \tag{A-64}$$

则

$$W(\boldsymbol{\beta})=\frac{V_0}{V_1} \tag{A-65}$$

注意到在变换 $B=A(\boldsymbol{\beta})$ 下体积元的变化为 $\boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$ 的 Jacobian, 因此

$$V_0=\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n=\left.\frac{\partial(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}{\partial(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)}\right|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}}\mathrm{d}\gamma_1\cdots\mathrm{d}\gamma_n=\left.\frac{\partial(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}{\partial(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)}\right|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}}V_1 \tag{A-66}$$

最终不变测度为

$$W(\boldsymbol{\beta})=\left[\left.\frac{\partial(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)}{\partial(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}\right|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}}\right]^{-1} \tag{A-67}$$

因此为了得到群不变测度, 我们需要知道群参数在群乘积下如何改变.

例 A-1 $SO(2)$ 群.

$SO(2)$ 群和二维空间旋转群等价, 群乘积为

$$R(\alpha)R(\beta)=R(\gamma),\quad \gamma=\alpha+\beta \tag{A-68}$$

其中, α,β,γ 为旋转角度. 群不变测度为

$$W(\beta)=\left[\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\right]^{-1}=1 \tag{A-69}$$

注意, $SO(2)$ 群的群元素在单位圆上均匀分布, 这说明点的密度在各处相同. 这就是 $W(\beta)=1$ 的原因. 群上的积分为

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha \tag{A-70}$$

由于它是一个 Abel 群, 所有的不可约表示都是一维的, 并有如下形式

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\alpha},\quad m为整数 \tag{A-71}$$

正交定理的形式如下

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\alpha}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m'\alpha}\right)^*=\delta_{mm'}2\pi \tag{A-72}$$

如果选择的测度 $f(\alpha) \neq$ 常数, 就得不到正交定理.

例 A-2　$SU(2)$ 群

$SU(2)$ 群由所有行列式为 1 的 2×2 幺正矩阵组成

$$UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = 1, \quad \det U = 1 \tag{A-73}$$

将幺正矩阵 U 写为

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{A-74}$$

则

$$U^{-1} = \frac{1}{\det U}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad U^{\dagger} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \tag{A-75}$$

那么由

$$U^{-1} = U^{\dagger} \text{ 且} \det U = 1 \tag{A-76}$$

可以推出

$$a^* = d, \quad c^* = -b, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{A-77}$$

所以 2×2 幺正矩阵最一般的形式为

$$U = \begin{pmatrix} a & -b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad \text{其中} \ |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{A-78}$$

如果用实参数表示 a 和 b:

$$a = u_1 + \mathrm{i}u_2, \quad b = u_3 + \mathrm{i}u_4, \quad u_i \text{ 为实数} \tag{A-79}$$

则有如下约束

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1 \tag{A-80}$$

因此 $SU(2)$ 的群元素可以用四维球面上的点表示. 因此, 不变测度可选为

$$\int \mathrm{d}R = \int \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_4 \delta\left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 - 1\right) \tag{A-81}$$

直觉上可以理解 $SU(2)$ 的作用对应球面上的旋转, 这个测度是不变的. 为了证明它, 需要证明

$$\int \mathrm{d}R' f(R) = \int \mathrm{d}R f(R) \tag{A-82}$$

其中, $R' = SR$ 和 f 为任意函数. 利用下面的参数化

$$
\begin{aligned}
R' &= \begin{pmatrix} u_1' + \mathrm{i}u_2' & -u_3' - \mathrm{i}u_4' \\ u_3' - \mathrm{i}u_4' & u_1' - \mathrm{i}u_2' \end{pmatrix} \\
S &= \begin{pmatrix} s_1 + \mathrm{i}s_2 & -s_3 - \mathrm{i}s_4 \\ s_3 - \mathrm{i}s_4 & s_1 - \mathrm{i}s_2 \end{pmatrix} \\
R &= \begin{pmatrix} u_1 + \mathrm{i}u_2 & -u_3 - \mathrm{i}u_4 \\ u_3 - \mathrm{i}u_4 & u_1 - \mathrm{i}u_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A-83}
$$

由 $R' = SR$ 可知

$$
\begin{cases}
u_1' = s_1u_1 - s_2u_2 - s_3u_3 - s_4u_4 \\
u_2' = s_2u_1 + s_1u_2 - s_4u_3 + s_3u_4 \\
u_3' = s_3u_1 + s_4u_2 + s_1u_3 - s_2u_4 \\
u_4' = s_4u_1 - s_3u_2 + s_2u_3 + s_1u_4
\end{cases} \tag{A-84}
$$

变换的 Jacobian 为

$$
J = \frac{\partial\left(u_1', u_2', u_3', u_4'\right)}{\partial\left(u_1, u_2, u_3, u_4\right)} = \begin{vmatrix} s_1 & -s_2 & -s_3 & -s_4 \\ s_2 & s_1 & -s_4 & s_3 \\ s_3 & s_4 & s_1 & -s_2 \\ s_4 & -s_3 & s_2 & s_1 \end{vmatrix} \tag{A-85}
$$

可以看出 $J = 1$, 因为它是正交矩阵的行列式：$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 = 1$. 因而有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}u_1' \cdots \mathrm{d}u_4' \delta\left(u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2 + u_4'^2 - 1\right) \\
={}& \frac{\partial\left(u_1', u_2', u_3', u_4'\right)}{\partial\left(u_1, u_2, u_3, u_4\right)} \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_4 \delta\left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 - 1\right) \\
={}& \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_4 \delta\left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 - 1\right)
\end{aligned} \tag{A-86}
$$

2) 代数方法

对于比 $SU(2)$ 大的群, 用代数方法更加有效. 它用生成元的对易关系来研究群的结构, 类似于用角动量代数来研究旋转群. 实际上角动量代数构成了研究更一般的群的基础. 下面来讨论一般 $SU(n)$ 群的生成元 ($SU(n)$ 群代数).

$SU(n)$ 群是由 $n \times n$ 且行列式为 1 的幺正矩阵组成的群. 下面寻找表示群元素的独立实参数. 幺正条件 $UU^\dagger = 1$ 说明

$$
\sum_k U_{ik} U_{jk}^* = \delta_{ij} \tag{A-87}
$$

我们可以把 U 矩阵看成 n 个 n 维行向量

$$\boldsymbol{U_i} = (U_{i1}, U_{i2}, \ldots, U_{in}), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{A-88}$$

则幺正条件可写为

$$(\boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{U}_j) = \sum_k U_{ik} U_{jk}^* = \delta_{ij} \tag{A-89}$$

这说明 $\boldsymbol{U}_i$ 组成正交归一的向量集. 其中

$$(\boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{U}_j) = 0 \ (i \neq j) \implies \text{给出 } \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - n \text{ 个约束}$$
$$(\boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{U}_i) = 1 \implies \text{给出 } n \text{ 个约束}$$

最后还有 $\det U = 1$ 给出一个约束. 因此 $SU(n)$ 的独立实参数的个数为

$$2n^2 - \left(n^2 - n\right) - n - 1 = n^2 - 1 \tag{A-90}$$

另一种方法是由幺正矩阵 U 和厄米矩阵 H 的关系

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H} \tag{A-91}$$

利用恒等式

$$\det\left(\mathrm{e}^A\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A} \tag{A-92}$$

可以得到

$$\det U = 1 \implies \mathrm{tr}H = 0 \tag{A-93}$$

线性无关的 $n \times n$ 无迹厄米矩阵有 $n^2 - 1$ 个, 因此 $SU(n)$ 有 $n^2 - 1$ 个参数. 下面讨论具体的例子.

$SU(2)$ 代数

$SU(2)$ 群描述三维旋转以及强相互作用中的同位旋. 这个群由有 3 个参数. 参数化 2×2 幺正矩阵得到

$$U(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \exp(\mathrm{i}\varepsilon_i \sigma_i) \tag{A-94}$$

其中, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是实的群参数; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 是 Pauli 矩阵:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A-95}$$

Pauli 矩阵的对易关系为

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{A-96}$$

其中, ε_{ijk} 是全反对称的 Levi-Civita 符号, $\varepsilon_{123}=1$. 满足下述关系的算符 J_1, J_2, J_3

$$[J_i, J_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk} J_k \tag{A-97}$$

称为 $SU(2)$ 的生成元, 对易关系称为 $SU(2)$ 群的**李代数**. 显然这与角动量算符 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 的对易关系相同. $SU(2)$ 群的表示在第 2 章已经详细讨论过了, 现在我们直接来处理 $SU(3)$ 群.

$SU(3)$ 代数

$SU(3)$ 群的一个物理应用是介子与重子的八重道 (eightfold way) 分类法. 这也是粒子物理中的夸克模型的基础之一. 以 α_i $(i=1,2,\ldots,8)$ 表示群变量, 群元素可以写成

$$U(\alpha_i) = \exp(\mathrm{i}\alpha_i\lambda_i), \quad \lambda_i: 3\times 3 \text{ 的无迹厄米矩阵} \tag{A-98}$$

Gell-Mann 最先给出 λ_i 矩阵的标准形式

$$\begin{gathered}
\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\
\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix}\\
\lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad \lambda_8=\sqrt{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{A-99}$$

这些 3×3 矩阵可以看成是 Pauli 矩阵的推广. 注意这些矩阵是按照下式归一化的

$$\mathrm{tr}(\lambda_i\lambda_j) = 2\delta_{ij} \tag{A-100}$$

这些矩阵的对易子, 即 Lie 代数, 有如下形式

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}\right] = \mathrm{i} f_{ijk}\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) \tag{A-101}$$

f_{ijk} 是全反对称结构常数, 其中非零的常数给出如下

$$f_{123}=1, \quad f_{147}=-f_{156}=f_{246}=f_{257}=f_{345}=-f_{367}=\frac{1}{2}, \quad f_{458}=f_{678}=\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{A-102}$$

因此 $SU(3)$ 群的生成元 F_i 满足同样的对易关系

$$[F_i, F_j] = \mathrm{i} f_{ijk} F_k \tag{A-103}$$

由 λ_3 和 λ_8 都是对角矩阵可知

$$[\lambda_3, \lambda_8] = 0 \tag{A-104}$$

即

$$[F_3, F_8] = 0 \tag{A-105}$$

因此, F_3 和 F_8 可以被同时对角化, 其本征值可用于标记表示中的物理态. 代数中可相互对易的生成元的最大数目被称为**群或代数的秩**(rank). 因此 $SU(3)$ 是秩为 2 的群, 而 $SU(2)$ 是秩为 1 的群. 这也同样是在一个给定的不可约表示标记物理态所需的本征值的数目.

$SU(3)$ 代数的表示

定义升降算符为

$$T_\pm = F_1 \pm \mathrm{i} F_2, \quad U_\pm = F_6 \pm \mathrm{i} F_7, \quad V_\pm = F_4 \pm \mathrm{i} F_5 \tag{A-106}$$

如果令 $T_3 = F_3$, $Y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} F_8$, 其中 T_3 是我们常用的同位旋, 而 Y 是超荷. 对易关系就变成了

$$\begin{cases} [T_3, T_\pm] = \pm T_\pm, & [Y, T_\pm] = 0 \\ [T_3, U_\pm] = \mp \dfrac{1}{2} U_\pm, & [Y, U_\pm] = \pm U_\pm \\ [T_3, V_\pm] = \pm \dfrac{1}{2} V_\pm, & [Y, V_\pm] = \pm V_\pm \end{cases} \tag{A-107}$$

$$\begin{cases} [T_+, T_-] = 2T_3 \\ [U_+, U_-] = \dfrac{3}{2} Y - T_3 \equiv 2U_3 \\ [V_+, V_-] = \dfrac{3}{2} Y + T_3 \equiv 2V_3 \end{cases} \tag{A-108}$$

$$\begin{cases} [T_+, V_+] = [T_+, U_-] = [U_+, V_+] = 0 \\ [T_+, V_-] = -U_-, \quad [T_+, U_+] = V_+, \quad [U_+, V_-] = T_- \end{cases} \tag{A-109}$$

显然, 这些升降算符将物理态在 (T_3, Y) 平面上移动:

$$\begin{aligned} &T_+ \ \text{让}\ T_3\ \text{增加}\ 1,\ \text{而}\ y\ \text{不变;} \\ &U_+ \ \text{让}\ T_3\ \text{减少}\ 1/2,\ y\ \text{增加}\ 1; \\ &V_+ \ \text{让}\ T_3\ \text{增加}\ 1/2,\ y\ \text{增加}\ 1;\ \text{等等} \end{aligned} \tag{A-110}$$

如果调节好 T_3 和 Y 在图中的单位长度, 那么升降算符就会将表示多重态的点连接成一条条相互之间夹角为 60° 的线段 (图 A-1).

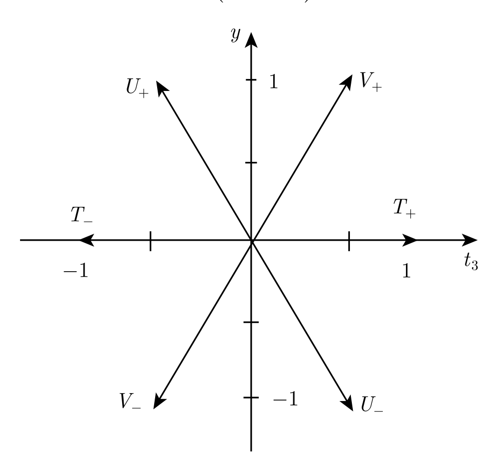


图 A-1　$SU(3)$ 代数的升降算符

$SU(3)$ 群的表示相当复杂, 这里只作简单的介绍, 只叙述而不证明. $SU(3)$ 的每个不可约表示可以用两个整数 (p, q) 代表. 在图像上则是 T_3-Y 平面上的一个六边形：其中三边长度为 p 个单位, 而其他三边为 q 个单位长度 (图 A-2(a)); 当 p 或 q 为 0 时, 这个六边形将坍塌为一个等边三角形 (图 A-2(b)). 这个图形对于 Y 轴的反射是对称的. 回想此前提到 $SU(2)$ 不可约表示可用一个整数 j 表示, 那么图像上它是一条长度为 $2j$ 的线段, 有 $2j+1$ 的点, 每个点都被一个物理态占据. 对于 $SU(3)$ 的表示 (p, q), T_3-Y 平面上每个点的物理态的重数符合下列规律：边界上的点只被一个物理态占据, 下一层则有两个物理态, 第三层有三个, 依此类推. 直到六边形缩小到三角形, 每个点的物理态数不再增加, 若 $p > q$ 则停留在 $q+1$, $q > p$ 则是 $p+1$. 图 A-3 中给出了一些低维表示的例子, 这也是一些非常重要的表示.

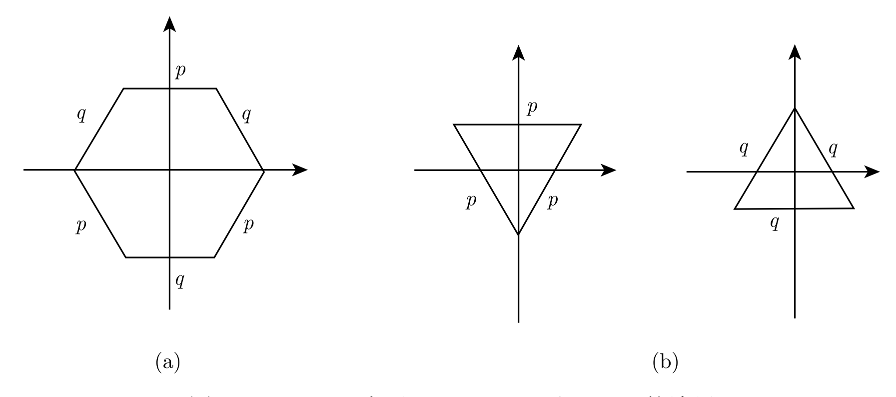
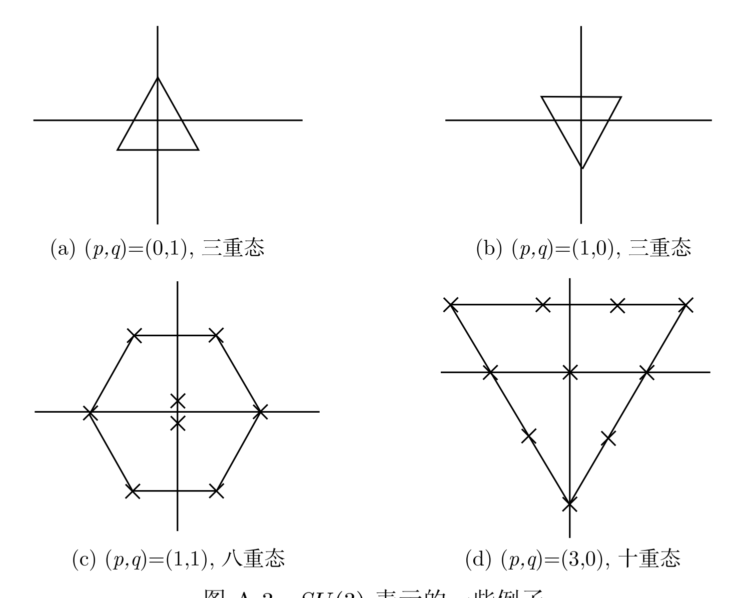


图 A-2　$SU(3)$ 表示 (p, q), $(p, 0)$ 和 $(0, q)$ 的边界



(a) (p,q)=(0,1), 三重态　(b) (p,q)=(1,0), 三重态

(c) (p,q)=(1,1), 八重态　(d) (p,q)=(3,0), 十重态

图 A-3　$SU(3)$ 表示的一些例子

图中所有的点都只有一个物理态占据, 除了表示 8 的中心

3. $\boldsymbol{SU(n)}$ 中的张量方法

我们已经讨论过 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 的情形, 可以看出, 随着群的增大, 研究表示结构的基本技巧变得越来越复杂. 下面要讲的张量分析方法将给我们提供一个对于低阶表示十分有用的工具.

1)　张量分析

考虑一个物理系统对固定坐标轴进行旋转. 令 x'_a, x_b 代表旋转前后向量的分量, 则有

$$x'_a = \sum_b R_{ab} x_b \tag{A-111}$$

其中, R_{ab} 是代表旋转的矩阵中的矩阵元. 例如, 关于 z 轴旋转的矩阵有如下形式

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A-112}$$

注意, x'_a 与 x_b 之间的关系是线性齐次的. 旋转变换有下列重要性质.

(1) R 是一个正交矩阵.

$$RR^{\mathrm{T}} = R^{\mathrm{T}}R = 1, \quad 即 \quad R_{ab}R_{ac} = \delta_{bc}, \quad R_{ab}R_{cb} = \delta_{ac} \tag{A-113}$$

正交关系有更简洁的表达形式

$$R_{ab}R_{cd}\delta_{ac}=\delta_{bd},\quad R_{ab}R_{cd}\delta_{bd}=\delta_{ac} \tag{A-114}$$

也就是说, 在两个旋转矩阵元的乘积中, 让行指标或列指标相同再取和, 将会得到 Kronecker δ 函数.

(2) 乘积 $\boldsymbol{x}^2=x_a x_a$ 是旋转不变的.

$$x'_a x'_a=R_{ac}R_{ab}x_c x_b=x_b x_b \tag{A-115}$$

这个结论可以推广到任意两个进行相同旋转变换的向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$,

$$A'_a=R_{ab}A_b,\quad B'_c=R_{cd}B_d \tag{A-116}$$

因此 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_a B_a$ 是旋转不变的. 可以简便地写为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_a B_a=A_a B_b\delta_{ab} \tag{A-117}$$

有时被称为**指标的缩并**(contraction of indices).

(3) 梯度算符的变换

$$\frac{\partial}{\partial x'_a}=\frac{\partial}{\partial x_c}\frac{\partial x_c}{\partial x'_a} \tag{A-118}$$

由 $x_b=\left(R^{-1}\right)_{ba}x'_a$ 可以得到

$$\frac{\partial}{\partial x'_a}=\left(R^{-1}\right)_{ca}\frac{\partial}{\partial x_c} \tag{A-119}$$

因此梯度算符按照 $\left(R^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$ 变换. 但是对于旋转变换来说, R 是正交的: $\left(R^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=R$,

$$\frac{\partial}{\partial x'_a}=R_{ac}\frac{\partial}{\partial x_c} \tag{A-120}$$

即 $\partial_\alpha=\dfrac{\partial}{\partial x_a}$ 与 x_a 以相同的方式变换.

假设有两个矢量, 它们在旋转变换下按如下方式变换

$$A_a\to A'_a=R_{ab}A_b,\quad B_c\to B'_c=R_{cd}B_d \tag{A-121}$$

则向量直积的变换为

$$A'_a B'_c=R_{ab}R_{cd}A_b B_d \tag{A-122}$$

二阶张量与两个向量直积有相同的变换性质, 即

$$T_{ac}\to T'_{ac}=\left(R_{ab}R_{cd}\right)T_{bd} \tag{A-123}$$

类似地, n 阶张量定义为按如下方式变换的量

$$T_{i_1 i_2 \dots i_n} \to T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = (R_{i_1 j_1})(R_{i_2 j_2}) \cdots (R_{i_n j_n}) T_{j_1 j_2 \cdots j_n} \tag{A-124}$$

注意, 这些变换都是线性齐次的, 那么如果对于所有的 j_i 都有

$$T_{j_1 j_2 \cdots j_n} = 0 \tag{A-125}$$

则它们在其他的坐标系下也都是零.

下面这些运算可以保持张量的性质:

(1) 乘以常数

$$(cT)_{i_1 i_2 \dots i_n} = cT_{i_1 i_2 \dots i_n} \tag{A-126}$$

(2) 同阶张量的加法

$$(T_1 + T_2)_{i_1 i_2 \dots i_n} = (T_1)_{i_1 i_2 \dots i_n} + (T_2)_{i_1 i_2 \dots i_n} \tag{A-127}$$

(3) 两个张量的乘积

$$(ST)_{i_1 i_2 \dots i_n j_1 j_2 \cdots j_m} = S_{i_1 i_2 \dots i_n} T_{j_1 j_2 \cdots j_m} \tag{A-128}$$

结果是一个阶数为两个张量阶数之和的张量.

(4) 缩并

$$S_{abc} T_{de} = S_{abc} T_{de} \delta_{ad} \to 3 \text{ 阶张量} \tag{A-129}$$

这个运算得到的张量比原张量的阶数少 2.

(5) 对称化和反对称化

$$\text{如果 } T_{ab} \text{ 是 2 阶张量} \Rightarrow T_{ab} \pm T_{ba} \text{ 也是 2 阶张量} \tag{A-130}$$

(6) 特殊张量

$$RR^{\mathrm{T}} = 1, \Longrightarrow R_{ij} R_{kj} = \delta_{ik} \quad \text{或} \quad R_{ij} R_{kl} \delta_{jl} = \delta_{ik} \tag{A-131}$$

这意味着 δ_{ij} 可以当成 2 阶张量来处理. 同样地,

$$(\det R)\, \varepsilon_{abc} = \varepsilon_{ijk} R_{ai} R_{bj} R_{ck} \tag{A-132}$$

ε_{abc} 是 3 阶张量. ε_{abc} 有两个常用的等式

$$\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ijl} = \delta_{kl}, \quad \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \tag{A-133}$$

张量旋转更普遍的记法 ——Jackson 记法是

$$x'_a = R_{ab} x_b \Longrightarrow R_{ab} = \frac{\partial x'_a}{\partial x_b} \tag{A-134}$$

从而可以写成

$$x'_a = \frac{\partial x'_a}{\partial x_b} x_b \tag{A-135}$$

$SU(n)$ 中的张量变换

$SU(n)$ 群由行列式为 1 的 $n \times n$ 幺正矩阵组成. 可以将这些矩阵视为 n 维复向量空间 C_n 中的线性变换. 因此 C_n 中的任意向量 $\psi_i = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$ 会被一个 $SU(n)$ 变换 U_{ij} 映射为

$$\psi_i \to \psi'_i = U_{ij}\psi_j \tag{A-136}$$

这个 ψ'_i 也同样属于 C_n, 其中 $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$, $\det U = 1$. 显然, 对于任意两个向量, 可以定义标量积

$$(\psi, \phi) \equiv \psi_i^* \phi_i \tag{A-137}$$

它在 $SU(n)$ 变换下是不变量. 对于共轭向量的变换有

$$\psi_i^* \to \psi_i'^* = U_{ij}^* \psi_j^* = \psi_j^* U_{ji}^\dagger \tag{A-138}$$

为方便起见, 引入上下指标

$$\psi^i \equiv \psi_i^*, \quad U_i^{\ j} \equiv U_{ij}, \quad U^i_{\ j} \equiv U_{ij}^* \tag{A-139}$$

因此复共轭只是把下标和上标对换了. 在这种记法下, 式 (A-136) 和式 (A-138) 中的转换变为

$$\psi_i \to \psi'_i = U_i^{\ j}\psi_j \tag{A-140}$$

$$\psi^i \to \psi'^i = U^i_{\ j}\psi^j \tag{A-141}$$

$SU(n)$ 不变的标量积为

$$(\psi, \phi) = \psi^i \phi_i \tag{A-142}$$

幺正条件变为

$$U^i_{\ k} U^k_{\ j} = \delta^i_{\ j} \tag{A-143}$$

其中, Kronecker delta 函数定义为

$$\delta^i_{\ j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} i = j \\ 0, & \text{如果} i \neq j \end{cases} \tag{A-144}$$

注意这种记法中求和总是对一对上下标进行的. 我们将之称为**指标的缩并**. ψ_i 是 $SU(n)$ 定义表示 (也称为**基础表示**或**向量表示**, 用 $\boldsymbol{n}$ 标记) 的基, 而 ψ^i 是共轭表示 $\boldsymbol{n}^*$ 的基.

高阶张量定义为有相同变换性质向量直积. 因此, 张量在变换中通常既有上标也有下标.

$$\psi'^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} = \left(U^{i_1}_{k_1} U^{i_2}_{k_2} \cdots U^{i_p}_{k_p}\right) \left(U^{l_1}_{j_1} U^{l_2}_{j_2} \cdots U^{l_q}_{j_q}\right) \psi^{k_1 k_2 \cdots k_p}_{l_1 l_2 \cdots l_q} \tag{A-145}$$

它们对应的是更高阶表示的基.

Kronecker delta 函数和 Levi-Civita 符号在 $SU(n)$ 变换下是不变的. 在不可约张量中它们起到重要的作用.

(1) 从式 (A-143) 的幺正条件出发, 立刻得到

$$\delta^i_j = U^i{}_k U^l{}_j \delta^k_l \tag{A-146}$$

因此 δ^i_j 虽然在 $SU(n)$ 变换下是不变的, 却有着与二阶张量相同的行为, 所以可以被当成张量来处理. 它们可以用于缩并其他张量以得到低阶张量. 例如, 如果 ψ^k_{ij} 是一个 3 阶张量

$$\psi^k_{ij} \to \psi'^k_{ij} = U^k_a U^b_i U^c_j \psi^a_{bc} \tag{A-147}$$

用 δ^k_i 缩并得到

$$\psi'^k_{ij}\delta^k_i = \delta^k_i U^k_a U^b_i U^c_j \psi^a_{bc} = U^c_j \delta^b_a \psi^a_{bc} \tag{A-148}$$

上式中用到了式 (A-146), 得到了一个一阶张量 (向量).

(2) Levi-Civita 符号定义为全反对称量：

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } (i_1 i_2 \cdots i_n) \text{ 是 } (1,2,\cdots,n) \text{ 的一个偶置换} \\ -1, & \text{如果 } (i_1 i_2 \cdots i_n) \text{ 是 } (1,2,\cdots,n) \text{ 的一个奇置换} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} \tag{A-149}$$

它同样是一个不变张量, 从行列式的性质可以得到

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{i_1 i_2 \cdots i_n} &= U^{j_1}_{i_1} U^{j_2}_{i_2} \cdots U^{j_n}_{i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} \\ &= (\det U)\, \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \end{aligned} \tag{A-150}$$

因为在 $SU(n)$ 中 $\det U = 1$, 所以 $\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 可被视为 n 阶张量. 我们可以利用这一点来改变张量的阶数. 例如,

$$\psi^{i_2 \cdots i_n} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \sim \psi_{i_1} \tag{A-151}$$

是一个矢量.

2) 不可约表示和 Young 表

通常而言我们定义的张量是 $SU(n)$ 的可约表示的基. 为了将他们分解为不可约表示的基, 利用张量的如下性质. 置换上标或下标的操作与 $SU(n)$ 的操作是对易的, 因为后者由相同的 U_{ij}(或 U^*_{ij}) 组成. 我们将以一个简单的例子说明这一点. 考虑二阶张量 ψ_{ij} 的变换

$$\psi'_{ij} = U^a_i U^b_j \psi_{ab} \tag{A-152}$$

由于 U 矩阵是相同的, 可以重新标记指标如下

$$\psi'_{ji} = U_j^b U_i^a \psi_{ba} \tag{A-153}$$

因此张量的指标置换不影响变换. 令 P_{12} 为交换两个指标的置换算符

$$P_{12}\psi_{ij} = \psi_{ji} \tag{A-154}$$

则 P_{12} 与群变换对易

$$P_{12}\psi'_{ij} = U_i^a U_j^b \left(P_{12}\psi_{ab}\right) \tag{A-155}$$

这一性质可以被用于分解 ψ_{ij}. 首先, 利用对称化和反对称化得到置换算符 P_{12}

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\psi_{ij} + \psi_{ji}\right), \quad A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\psi_{ij} - \psi_{ji}\right) \tag{A-156}$$

从而有

$$P_{12}S_{ij} = S_{ij}, \quad P_{12}A_{ij} = -A_{ij} \tag{A-157}$$

在群论的语言里 S_{ij} 是置换群 S_2 的一个一阶表示的基, 而 A_{ij} 是另一个一阶表示的基. 显然, S_{ij} 和 A_{ij} 在 $SU(n)$ 变换下不会混合

$$S'_{ij} = U_i^a U_j^b S_{ab}, \quad A'_{ij} = U_i^a U_j^b A_{ab} \tag{A-158}$$

这意味着二阶张量 ψ_{ij} 可以被分解成 S_{ij} 和 A_{ij}, 而群变换绝不会使得不同对称性的部分混合. 事实上, S_{ij} 和 A_{ij} 无法进一步分解了, 它们由此组成了 $SU(n)$ 不可约表示的基. 这一点可以推广到更高阶的张量 (以及混合对称性) 上, 结论是, $SU(n)$ 不可约表示的基对应着特定的指标置换对称性的张量.

寻找一个任意阶 f 的不可约张量的过程需要寻找一个指标置换操作的完备集. 置换群的不可约表示问题可以利用 Young 表 (Young tableaux)完备地解出. Young 表是 f 个有标号的盒子, 是对 f 个对象的置换操作的图像表示. 例如, 对于二阶张量, S_{ij} 中的对称指标 i 和 j 可以用 $\boxed{i}\boxed{j}$ 表示; A_{ij} 的反对称指标可以用 $\begin{array}{|c|}\hline i \\ \hline j \\ \hline\end{array}$ 表示. 根据张量变换的规则有

$$S'_{ij} = U_i^k U_j^l S_{kl}, \quad A'_{ij} = U_i^k U_j^l A_{kl} \tag{A-159}$$

对于 $n=2$ 的情况则有

$$\varepsilon^{ij}A'_{ij} = \varepsilon^{ij}U_i^k U_j^l A_{kl} = \varepsilon^{kl}A_{kl} \tag{A-160}$$

这里使用了等式

$$\varepsilon^{ij}U_i^k U_j^l = \det U \varepsilon^{kl} = \varepsilon^{kl} \tag{A-161}$$

因此 $\varepsilon^{ij}A_{ij}$ 在 $SU(2)$ 变换下是不变的. 事实上, A_{ij} 已经是反对称的, 因此有

$$\varepsilon^{ij}A_{ij}=2A_{12} \tag{A-162}$$

这意味着, 对应 Young 表 $\begin{array}{|c|}\hline i\\\hline j\\\hline\end{array}$ 的反对称张量 A_{ij} 在 $SU(2)$ 变换下保持不变.

对于三阶张量 ψ_{ijk} 有

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline i & j & k\\\hline\end{array}\text{, 表示全对称组合} S_{ijk}=\frac{1}{6}\left(\psi_{ijk}+\psi_{jki}+\psi_{kij}+\psi_{jik}+\psi_{kji}+\psi_{ikj}\right) \tag{A-163}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline i\\\hline j\\\hline k\\\hline\end{array}\text{, 表示全反对称组合} A_{ijk}=\frac{1}{6}\left(\psi_{ijk}+\psi_{jki}+\psi_{kij}-\psi_{jik}-\psi_{kji}-\psi_{ikj}\right) \tag{A-164}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline i & j\\\hline k \\\cline{1-1}\end{array}\text{, 表示混合对称性的张量} \chi_{ij;k}=\frac{1}{4}\left(\psi_{ijk}+\psi_{jik}-\psi_{kij}-\psi_{kji}\right) \tag{A-165}$$

可以把前面的分析推广到更高阶的张量. 例如, 考虑对应 $\begin{array}{|c|c|}\hline i & j\\\hline k \\\cline{1-1}\end{array}$ 的张量 $\chi_{ij;k}$. 对于 $SU(2)$ 的情况, 变换法则是

$$\chi'_{ij;k}=U_i^lU_j^mU_k^n\chi_{lm;n} \tag{A-166}$$

因为 $\chi_{ij;k}$ 关于 $i\leftrightarrow k$ 变换是反对称的, 有

$$\varepsilon^{\mathrm{ik}}\chi'_{ij;k}=\varepsilon^{\mathrm{ik}}U_i^lU_j^mU_k^n\chi_{lm;n}=U_j^m\varepsilon^{ln}\chi_{lm;n} \tag{A-167}$$

其中使用了等式

$$\varepsilon^{\mathrm{ik}}U_i^lU_k^n=\varepsilon^{ln}\det U \tag{A-168}$$

这意味着, 竖直方向的两个盒子对应于 $SU(2)$ 不变的张量, $\chi_{ij;k}$ 是一个一阶张量. 因此 $\begin{array}{|c|c|}\hline i & j\\\hline k \\\cline{1-1}\end{array}$ 表示的张量等价于一个盒子 $\begin{array}{|c|}\hline j\\\hline\end{array}$ 表示的张量. 也就是说, 在 $SU(2)$ 表示中, 可以消去任意的有两个盒子的一列, 因为它们是 $SU(2)$ 不变的. 对于一般的 $SU(n)$ 的情况也不难看出来, n 个竖直方向的盒子表示的张量是 $SU(n)$ 不变的, 同样也是因为 Levi-Civita 符号不变张量的性质

$$\varepsilon^{i_1i_2\cdots i_n}U_{i_1}^{j_1}U_{i_2}^{j_2}\cdots U_{i_n}^{j_n}=\varepsilon^{j_1j_2\cdots j_n}\det U=\varepsilon^{j_1j_2\cdots j_n} \tag{A-169}$$

式 (A-170) 是一个一般的 Young 表的例子. 它将 f 个盒子放在行与列中, 并满足行的长度从上到下是不增的, 即 $f_1\geqslant f_2\geqslant f_3\geqslant\cdots$ 且 $f_1+f_2+f_3+\cdots=f$,

类似地, 列的长度从左到右是不增的. 每个盒子都有一个标号 $i_k = 1, 2, \cdots, n$.

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
i_1 & i_2 & \cdots & \cdots & i_{f_1} \\
\hline
i_{f_1+1} & \cdots & \cdots & i_{f_2} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-4}
\vdots & & \multicolumn{3}{c}{} \\
\cline{1-2}
i_{\cdots} & \multicolumn{4}{c}{} \\
\cline{1-1}
\end{array}
\tag{A-170}
$$

上式对应一个张量

$$
\psi_{i_1 \cdots i_{f_1}; i_{f_1+1} \cdots}
\tag{A-171}
$$

对应方法如下:

(1) 首先作对称化操作, 同一行的指标不会改变.

(2) 然后作反对称化操作, 同一列的指标不会改变.

如果一个 Young 表的指标在同一行里从左到右不减, 在同一列里从上到下严格增加时, 我们就称之为正则 Young 表 (standard tableaux). 例如, 下面给出 $n = 3$ 的混合对称张量各自的正则杨表:

$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad 2(\psi_{112} - \psi_{211}), \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad 2(\psi_{113} - \psi_{311})
$$
$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad (\psi_{122} - \psi_{221})
\tag{A-172}
$$

$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad (\psi_{133} - \psi_{331}), \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad (\psi_{233} - \psi_{332})
$$
$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad 2(\psi_{223} - \psi_{322})
\tag{A-173}
$$

$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad (\psi_{123} + \psi_{213} - \psi_{321} - \psi_{312})
$$
$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad (\psi_{132} + \psi_{312} - \psi_{231} - \psi_{213})
\tag{A-174}
$$

其中用到了式 (A-165) 给出的张量 $\chi_{ij;k}$. 因此我们有 8 个独立的张量, 对应的是 8 维不可约表示.

非正则的杨表给出的张量都可以通过对称化和反对称化变为零或者不与正则表的张量独立. 因此, 对于某个给定的杨表结构, 正则杨表的数量即为其对应的不可约表示的独立张量个数, 即不可约表示的维数.

不难看出, 对于由 k 个反对称指标构成的张量的例子, 这个数量满足

$$\left.\begin{array}{c}\square\\\square\\\square\\\vdots\\\square\end{array}\right\} k, \quad \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\times2\times3\times\cdots\times k} \tag{A-175}$$

对于 k 个对称指标构成的张量则为

$$\underbrace{\square\square\square\cdots\square}_{k} \qquad \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix} = \frac{n\,(n+1)\cdots(n+k-1)}{1\times2\times3\times\cdots\times k} \tag{A-176}$$

注意, 由于反对称性的要求, Young 表不能超过 n 行. 如果 Young 表有 n 行, 则可以用 $\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$ 来缩并有 n 行的列的指标. 从图像来讲, 就是简单地划去有 n 行的列而不会改变张量的变换性质.

基本原理(见 Hammermesh 1963.) 对应给定结构杨表的张量可以组成 $SU(n)$ 的不可约表示的一组基. 此外, 如果我们把所有不超过 $n-1$ 行的杨表都算进来, 且这个群对应的所有有限维的不可约表示都只计算一次, 这些张量将组成一组完备集,

接下来给出**不可约表示维数**的两个等式. 如果用行长度来标记一个 Young 表, $(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})$, 相邻的行之间长度差为

$$\lambda_1 = f_1 - f_2, \quad \lambda_2 = f_2 - f_3, \quad \cdots, \lambda_{n-2} = f_{n-2} - f_{n-1}, \quad \lambda_{n-1} = f_{n-1} \tag{A-177}$$

那么 $SU(n)$ 的不可约表示的维数是 一个给定 Young 表形状里的标准表的个数:

$$\begin{aligned}
& d\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{n-1}) \\
&= (1+\lambda_1)\,(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_{n-1}) \\
&\quad \times\left(1+\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)\left(1+\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}}{2}\right) \\
&\quad \times\left(1+\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{3}\right)\left(1+\frac{\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda_{n-3}+\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}}{3}\right) \\
&\quad \cdots\cdots \\
&\quad \times\left(1+\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}}{n-1}\right)
\end{aligned} \tag{A-178}$$

可以用全对称和全反对称张量来验算一下. 以下给出一些简单的例子.

例 A-3 $SU(2)$ 群. Young 表只有一行

$$d(\lambda_1) = (1 + \lambda_1) \tag{A-179}$$

因此 $\lambda_1 = 2j$. 依次有

$$\square \quad 二重态, \quad \square\square \quad 三重态, \cdots \tag{A-180}$$

例 A-4 $SU(3)$ 群. Young 表可以有两行

$$d(\lambda_1, \lambda_2) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)\left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right) \tag{A-181}$$

等同于前述 $SU(n)$ 维数的另一种计算方法, $\lambda_1 = p$ 且 $\lambda_2 = q$. 简单的情况如下给出

$$\square\,(1,0)\ \mathbf{3}, \quad \square\square\,(2,0)\ \mathbf{6}, \quad \square\square\square\,(3,0)\ \mathbf{10} \tag{A-182}$$

$$\begin{array}{c}\square\\\square\end{array}(0,1)\ \mathbf{3}^*, \quad \begin{array}{c}\square\square\\\square\square\end{array}(0,2)\ \mathbf{6}^*, \quad \begin{array}{l}\square\square\\\square\end{array}(1,1)\ \mathbf{8} \tag{A-183}$$

式 (A-180) 在 n 值较大的情况下很难计算, 这时我们更多的利用另一个等式. 为此, 需要引入两个定义 —— 钩长和轴距离. 从表中任何一个盒子出发画两条垂直的钩形线, 一条向右, 一条向下. 钩子经过的包括原来的这个盒子的盒子总数称为钩长 (h_i), i 为出发的盒子编号. 例如,

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\\hline 3 & 4\\\hline\end{array}\ h_1 = 3, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\\hline 3 & \\\cline{1-1}\end{array}\ h_2 = 1 \tag{A-184}$$

轴距离 D_i定义为某个盒子到 Young 表左上角的盒子所需的步数. 向左记 $+1$, 向上记 -1. 例如, 有

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2\\\hline -1 & 0 & \\\cline{1-2} -2 & & \\\cline{1-1}\end{array} \tag{A-185}$$

这个 Young 表形状对应的 $SU(n)$ 不可约表示的维数是

$$d = \prod_i \left(\frac{n + D_i}{h_i}\right) \tag{A-186}$$

对 Young 图中所有盒子取乘积. 用一个简单的例子来说明.

$$\text{Young 表}\begin{array}{l}\square\square\\\square\end{array}, \quad \text{钩长}\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1\\\hline 1 & \\\cline{1-1}\end{array}, \quad \text{轴距离}\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1\\\hline -1 & \\\cline{1-1}\end{array} \tag{A-187}$$

因此维数为

$$d=\binom{n}{3}\binom{n+1}{1}\binom{n-1}{1}=\frac{n\left(n^{2}-1\right)}{3} \tag{A-188}$$

当 $n=3$ 时, $d=8$, 与我们之前计算的结果一致.

3) 直积表示的分解

$SU(n)$ 不可约表示的 Young 图标记一个重要应用在于直积表示的分解. 为了得到直积表示的不可约表示:

(1) 在两个相乘的表中较小的一个 Young 表里, 给每一行用 $a, b, c, \cdots$ 依次标记

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & a & \cdots & \cdots & a \\ \hline b & b & \cdots & b \\ \cline{1-4} c & \cdots & c \\ \cline{1-3} \cdots \\ \cline{1-1} \end{array} \tag{A-189}$$

(2) 将用 a 标记的盒子放入另一个相乘的表中, 要求没有两个 a 出现在同一列, 且结果的表仍旧是 Young 表 (即不同行的长度从上到下不增, 不同列的长度从左到右不增, 且不超过 n 行.) 对 $b, c, \ldots$ 依次重复这个过程.

(3) 等第一个表中所有盒子都已放入第二个表了, 从右往左数每一行, 会得到一个序列, 要求这个序列从任意一点截断, 其左的子序列里, a 出现次数 $\geqslant b$ 出现次数 $\geqslant c$ 出现次数 $\geqslant \cdots$

考虑 $SU(3)$ 群的两个例子.

例 A-5

$$\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline a \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline \end{array} \tag{A-190}$$

对应着

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3}=\mathbf{3}^{*}+\mathbf{6} \tag{A-191}$$

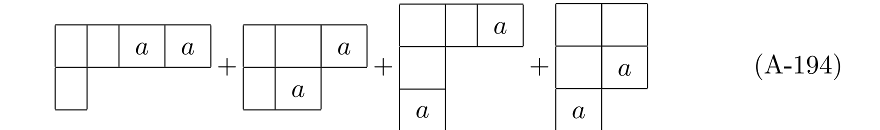
例 A-6

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b \\ \cline{1-1} \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \end{array} = \mathbf{8} \times \mathbf{8} \tag{A-192}$$

第一步:

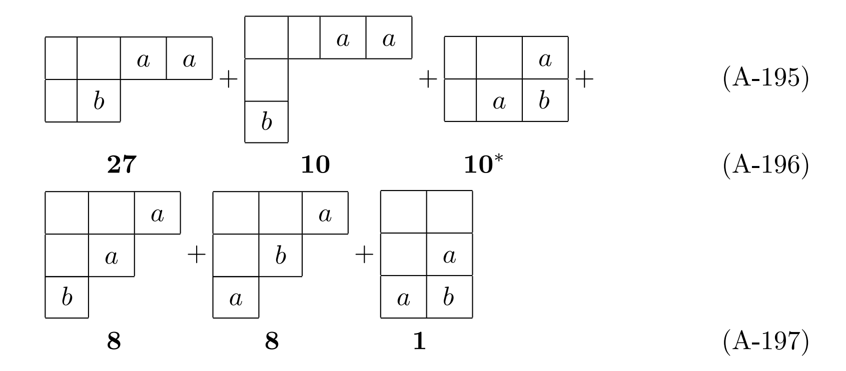
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline \\ \cline{1-1} \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & a \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} a \\ \cline{1-1} \end{array} \tag{A-193}$$

第二步：



(A-194)

第三步：



(A-195)

$$\mathbf{27} \qquad \mathbf{10} \qquad \mathbf{10}^* \tag{A-196}$$

$$\mathbf{8} \qquad \mathbf{8} \qquad \mathbf{1} \tag{A-197}$$

得到结果

$$\mathbf{8}\times\mathbf{8}=\mathbf{1}+\mathbf{8}+\mathbf{8}+\mathbf{10}+\mathbf{10}^*+\mathbf{27} \tag{A-198}$$

索　引

E

F

G

其　他

《现代物理基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1. 现代声学理论基础	马大猷 著	2004.03
2. 物理学家用微分几何 (第二版)	侯伯元, 侯伯宇 著	2004.08
3. 数学物理方程及其近似方法	程建春 编著	2004.08
4. 计算物理学	马文淦 编著	2005.05
5. 相互作用的规范理论 (第二版)	戴元本 著	2005.07
6. 理论力学	张建树, 等 编著	2005.08
7. 微分几何入门与广义相对论 (上册 · 第二版)	梁灿彬, 周彬 著	2006.01
8. 物理学中的群论 (第二版)	马中骐 著	2006.02
9. 辐射和光场的量子统计	曹昌祺 著	2006.03
10. 实验物理中的概率和统计 (第二版)	朱永生 著	2006.04
11. 声学理论与工程应用	朱海潮, 等 编著	2006.05
12. 高等原子分子物理学 (第二版)	徐克尊 著	2006.08
13. 大气声学 (第二版)	杨训仁, 陈宇 著	2007.06
14. 输运理论 (第二版)	黄祖洽 著	2008.01
15. 量子统计力学 (第二版)	张先蔚 编著	2008.02
16. 凝聚态物理的格林函数理论	王怀玉 著	2008.05
17. 激光光散射谱学	张明生 著	2008.05
18. 量子非阿贝尔规范场论	曹昌祺 著	2008.07
19. 狭义相对论 (第二版)	刘 辽, 等 编著	2008.07
20. 经典黑洞与量子黑洞	王永久 著	2008.08
21. 路径积分与量子物理导引	侯伯元, 等 著	2008.09
22. 量子光学导论	谭维翰 著	2009.01
23. 全息干涉计量——原理和方法	熊秉衡, 李俊昌 编著	2009.01
24. 实验数据多元统计分析	朱永生 编著	2009.02
25. 微分几何入门与广义相对论(中册 · 第二版)	梁灿彬, 周彬 著	2009.03

26. 中子引发轻核反应的统计理论	张竞上 著	2009.03
27. 工程电磁理论	张善杰 著	2009.08
28. 微分几何入门与广义相对论(下册 · 第二版)	梁灿彬, 周彬 著	2009.08
29. 经典电动力学	曹昌祺 著	2009.08
30. 经典宇宙和量子宇宙	王永久 著	2010.04
31. 高等结构动力学(第二版)	李东旭 著	2010.09
32. 粉末衍射法测定晶体结构(第二版 · 上、下册)	梁敬魁 编著	2011.03
33. 量子计算与量子信息原理	Giuliano Benenti 等 著	
——第一卷：基本概念	王文阁, 李保文 译	2011.03
34. 近代晶体学(第二版)	张克从 著	2011.05
35. 引力理论(上、下册)	王永久 著	2011.06
36. 低温等离子体	B. M. 弗尔曼, И. M. 扎什京 编著	
——等离子体的产生、工艺、问题及前景	邱励俭 译	2011.06
37. 量子物理新进展	梁九卿, 韦联福 著	2011.08
38. 电磁波理论	葛德彪, 魏 兵 著	2011.08
39. 激光光谱学	W. 戴姆特瑞德 著	
——第 1 卷：基础理论	姬 扬 译	2012.02
40. 激光光谱学	W. 戴姆特瑞德 著	
——第 2 卷：实验技术	姬 扬 译	2012.03
41. 量子光学导论(第二版)	谭维翰 著	2012.05
42. 中子衍射技术及其应用	姜传海, 杨传铮 编著	2012.06
43. 凝聚态、电磁学和引力中的多值场论	H. 克莱纳特 著	
	姜 颖 译	2012.06
44. 反常统计动力学导论	包景东 著	2012.06
45. 实验数据分析(上册)	朱永生 著	2012.06
46. 实验数据分析(下册)	朱永生 著	2012.06
47. 有机固体物理	解士杰, 等 著	2012.09
48. 磁性物理	金汉民 著	2013.01
49. 自旋电子学	翟宏如, 等 编著	2013.01

50. 同步辐射光源及其应用(上册)　麦振洪，等　著　2013.03

51. 同步辐射光源及其应用(下册)　麦振洪，等　著　2013.03

52. 高等量子力学　汪克林　著　2013.03

53. 量子多体理论与运动模式动力学　王顺金　著　2013.03

54. 薄膜生长（第二版）　吴自勤，等　著　2013.03

55. 物理学中的数学物理方法　王怀玉　著　2013.03

56. 物理学前沿——问题与基础　王顺金　著　2013.06

57. 弯曲时空量子场论与量子宇宙学　刘　辽，黄超光　著　2013.10

58. 经典电动力学　张锡珍，张焕乔　著　2013.10

59. 内应力衍射分析　姜传海，杨传铮　编著　2013.11

60. 宇宙学基本原理　龚云贵　著　2013.11

61. B 介子物理学　肖振军　著　2013.11

62. 量子场论与重整化导论　石康杰，等　编著　2014.06

63. 粒子物理导论　杜东生，杨茂志　著　2015.01

64. 固体量子场论　史俊杰，等　著　2015.03

65. 物理学中的群论（第三版）——有限群篇　马中骐　著　2015.03

66. 中子引发轻核反应的统计理论（第二版）　张竞上　著　2015.03

67. 自旋玻璃与消息传递　周海军　著　2015.06

68. 粒子物理学导论　肖振军，吕才典　著　2015.07

69. 量子系统的辛算法　丁培柱　编著　2015.07

70. 原子分子光电离物理及实验　汪正民　著　2015.07

71. 量子场论　李灵峰　著　2015.09

(O−6135.31)

科学数理分社
电话：(010) 64017957
Email：qianjun@mail.sciencep.com

销售分类建议：物理

www.sciencep.com



定 价：148.00 元